C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 350 (2012) 911–916

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Géométrie analytique/Topologie

L'indice topologique des champs de vecteurs sur les intersections complètes quasi-homogènes

The topological index of vector fields at quasihomogeneous complete intersections

Alexandre G. Aleksandrov

Institut du contrôle automatique de l'Académie des sciences de Russie, 65, rue Profsoyuznaya, GSP-7, Moscou 117997, Fédération de Russie

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 31 août 2012
Accepté après révision le 12 octobre 2012
Disponible sur Internet le 25 octobre 2012

Présenté par le Comité de rédaction

À la mémoire de Henri Poincaré
(29.04.1854–17.07.1912)

RÉSUMÉ

Cette note décrit une méthode élémentaire pour calculer l'indice topologique d'un champ de vecteurs en une singularité isolée d'intersection complète quasi-homogène. La méthode est basée sur une variante du lemme de De Rham pour les intersections complètes, qui est utilisée pour calculer l'indice homologique des champs de vecteurs introduit par X. Gómez-Mont.

ABSTRACT

In this note an elementary method for computing the topological index of a vector field at a quasihomogeneous isolated complete intersection singularity is described. It is based on a variant of the De Rham lemma for complete intersections, which is used for calculation of the homological index of vectors fields introduced by X. Gómez-Mont.

Abridged English version

Let $(X, \mathfrak{o})$ be a germ of complex space. Choose one of its representatives embedded in an open neighborhood U of the origin in $\mathbb{C}^m$ with coordinates $z_1, \dots, z_m$ and denote it by X. Then X is given by an ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_U$ generated by a sequence of holomorphic functions $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}_U$. Let Ω^p_X, $p \geqslant 0$, be the $\mathcal{O}_X$-module of holomorphic differential p-forms and $\mathrm{Der}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X)$ be the $\mathcal{O}_X$-module of regular vector fields on X. Then for any element $\mathcal{V} \in \mathrm{Der}(X)$ the interior product (contraction) of vector fields and differential forms induces a homomorphism of $\mathcal{O}_X$-modules $\iota_{\mathcal{V}} : \Omega^p_X \to \Omega^{p-1}_X$. Since $\iota^2_{\mathcal{V}} = 0$, a structure of a *decreasing* complex on the family $\Omega^\bullet_X$ is well-defined. This complex is called the *contracted* De Rham complex. Let us suppose that $\dim X = n \geqslant 1$. Then the *truncated* contracted De Rham complex $(\widehat{\Omega}^\bullet_X, \iota_{\mathcal{V}})$ is defined as follows

$$0 \longrightarrow \Omega^n_X \xrightarrow{\iota_{\mathcal{V}}} \Omega^{n-1}_X \xrightarrow{\iota_{\mathcal{V}}} \Omega^{n-2}_X \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^1_X \xrightarrow{\iota_{\mathcal{V}}} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0.$$

Suppose that all homology groups of $(\widehat{\Omega}^\bullet_{X,\mathfrak{o}}, \iota_{\mathcal{V}})$ are complex vector spaces of *finite* dimension. According to [10], the Euler–Poincaré characteristic $\chi(\widehat{\Omega}^\bullet_{X,\mathfrak{o}}, \iota_{\mathcal{V}}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H_i(\widehat{\Omega}^\bullet_{X,\mathfrak{o}}, \iota_{\mathcal{V}})$ is called the *homological* index of the vector field $\mathcal{V}$ at point $\mathfrak{o}$; it is denoted by $\mathrm{Ind}_{\mathrm{hom},\mathfrak{o}}(\mathcal{V})$.

Claim 1. *Let X be a germ of complete intersection with an isolated singularity of dimension $n \geqslant 1$ and let $\mathcal{V} \in \mathrm{Der}(X)$ be a vector field on X with an isolated singularity. Then $H_n(\widehat{\Omega}^\bullet_X, \iota_{\mathcal{V}}) \cong \mathrm{Tors}\, \Omega^n_X$.*

Adresse e-mail : ag_aleksandrov@mail.ru.

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2012.10.017

Suppose additionally that X is a *quasihomogeneous* germ embedded in $\mathbb{C}^m$, $m \geqslant 2$, given by a *regular* sequence of quasihomogeneous functions $f_1, \dots, f_k$ of *weighted degrees* $d_1, \dots, d_k$ in m variables $z_1, \dots, z_m$ of weights $w_1, \dots, w_m$. In other words, the type of homogeneity of X is equal to $(d_1, \dots, d_k; w_1, \dots, w_m) \in \mathbb{Z}_+^k \times \mathbb{Z}_+^m$, $\dim X = m - k = n \geqslant 1$. Then all the modules Ω_X^p, $p \geqslant 0$, as well as $\operatorname{Der}(X)$ are endowed with a natural grading induced by relations $\deg f_j = \deg \mathrm{d} f_j = d_j$, $j = 1, \dots, k$, $\deg z_i = \deg \mathrm{d} z_i = w_i$, $i = 1, \dots, m$. In particular, the weighted degree of $\partial/\partial z_i$ is equal to $-w_i$, $i = 1, \dots, m$. Recall, that the vector field $\mathcal{V}_0 = \sum_{i=1}^m w_i z_i \partial/\partial z_i$ of weighted degree *zero* generates $\mathcal{O}_X$-module $\operatorname{Der}(X)$ modulo *hamiltonian* vector fields (see [2, Theorem 6.1]).

Making use of a variant of the De Rham lemma for complete intersections with isolated singularities (see [12, Lemma 1.6]), one can prove that the Poincaré series of the modules of holomorphic p-forms on X for all $0 \leqslant p \leqslant n$ have the following representations (see [2, Lemma 3.2])

$$P\big(\Omega_X^p; x\big) = P(\mathcal{O}_X; x) \cdot \operatorname{res}_{t=0} t^{-p-1} \prod \big(1 + t x^{w_i}\big) / \prod \big(1 + t x^{d_j}\big), \qquad P(\mathcal{O}_X; x) = \prod \big(1 - x^{d_j}\big) / \prod \big(1 - x^{w_i}\big).$$

If $\mathcal{V}$ is homogeneous then all the homology groups $H_i(\widehat{\Omega}_X^\bullet, \iota_{\mathcal{V}})$ are graded vector spaces and the *generating* function GH_P is defined as follows

$$GH_P\big(\big(\widehat{\Omega}_X^\bullet, \iota_{\mathcal{V}}\big); x, y\big) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i P\big(H_i\big(\widehat{\Omega}_X^\bullet, \iota_{\mathcal{V}}\big); x\big) y^i,$$

where $P(H_i(\widehat{\Omega}_X^\bullet, \iota_{\mathcal{V}}); x)$ are the corresponding Poincaré series. If all these groups are finite dimensional vector spaces, then $\operatorname{Ind}_{\mathrm{hom},o}(\mathcal{V}) = GH_P((\widehat{\Omega}_X^\bullet, \iota_{\mathcal{V}}); 1, 1)$.

Theorem 1. *Under conditions of the claim above let us assume that $\mathcal{V}$ is a vector field of weighted degree v. Then*

$$GH_P\big(\big(\widehat{\Omega}_X^\bullet, \iota_{\mathcal{V}}\big); x, x^v\big) = (-1)^n x^{nv} P(\mathcal{O}_X; x) \operatorname{res}_{t=0} t^{-n-1} \big(1 + t x^{-v}\big)^{-1} \prod \big(1 + t x^{w_i}\big) / \prod \big(1 + t x^{d_j}\big).$$

Let W_λ be the λ-th elementary symmetric polynomials in ℓ variables $(y_1, \dots, y_\ell)$ defined by the formula $\prod_{i=1}^\ell (1 + y_i \zeta) = \sum_{\lambda=0}^\ell W_\lambda(y_1, \dots, y_\ell) \zeta^\lambda$. Similarly, the symmetric polynomials $D_\lambda(y_1, \dots, y_\ell)$ of degree $\lambda \geqslant 0$ are defined as follows: $\prod_{i=1}^\ell (1 + y_i \zeta)^{-1} = \sum_{\lambda=0}^\infty (-1)^\lambda D_\lambda(y_1, \dots, y_\ell) \zeta^\lambda$.

Corollary 1. *Under assumptions of Theorem* 1

$$GH_P\big(\big(\widehat{\Omega}_X^\bullet, \iota_{\mathcal{V}}\big); x, x^v\big) = \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = n} (-1)^{\lambda_2} x^{(n - \lambda_1) v} W_{\lambda_2}\big(x^{w_1}, \dots, x^{w_m}\big) D_{\lambda_3}\big(x^{d_1}, \dots, x^{d_k}\big) P(\mathcal{O}_X; x).$$

Corollary 2. *Let X be a quasihomogeneous complete intersection with an isolated singularity. Then* $\operatorname{Ind}_{\mathrm{hom},o}(\mathcal{V}_0) = 1 + (-1)^n \mu(X)$, *where $\mu(X)$ is the Milnor number of X at the singularity.*

In fact, our approach can be developed for computation of the index of vector fields defined on singular varieties of other types: Cohen–Macaulay curves, quasihomogeneous normal Gorenstein singularities and normal complete intersections, toric varieties, and so on.

1. Introduction : Autour de l'histoire de l'étude d'un problème topologique célèbre

Le concept classique d'indice topologique des champs de vecteurs à singularités isolées données sur une variété lisse de dimension deux remonte à H. Poincaré (1887). Cette notion a été généralisée aux cas de dimensions supérieures par H. Hopf et pendant une longue période de nombreux auteurs ont étudié l'indice comme un invariant topologique dans différents contextes et avec des approches variées. Toutefois, la définition originale de l'indice étant purement topologique, dépend essentiellement de la présentation concrète des champs de vecteurs, d'une structure topologique de variétés, etc. C'est pourquoi pour étudier des variétés avec singularités l'approche classique ne fonctionne pas parfaitement pour des raisons évidentes. On connaît quelques définitions équivalentes de l'indice d'un champ de vecteurs sur une variété *singulière*, par exemple la méthode originelle purement topologique [11]. Il y a aussi, entre autres, l'approche de calcul de l'indice via la théorie des résidus et de l'intégration [18], la définition (spécifique aux intersections complètes) faisant intervenir la Géométrie différentielle [19].

Un nouveau concept *algébrique* d'indice homologique pour les champs de vecteurs sur les espaces analytiques complexes réduits de dimension pure est apparu dans un travail [10] de X. Gómez-Mont (1998) ; il est simple et bien adapté à une utilisation dans la théorie des variétés singulières. Son idée principale est de considérer un invariant algébrique et analytique intéressant, la somme alternée des dimensions des groupes d'homologie du complexe De Rham tronqué des formes différentielles holomorphes, dont la différentielle est définie par la contraction le long d'un champ de vecteurs sur l'espace singulier. En d'autres termes, cet invariant est la caractéristique d'Euler–Poincaré du complexe de De Rham contracté.

Tout d'abord l'indice homologique est calculé explicitement pour les champs de vecteurs tangent à une hypersurface fixée dans une variété complexe lisse à l'aide des résolvantes standards et des propriétés de suites spectrales [9]. Dans un article de l'auteur [5] une autre méthode élémentaire pour le calcul de l'indice homologique a été décrite ; son idée principale est de calculer l'indice homologique à l'aide de formes différentielles *méromorphes* définies sur la variété ambiante et ayant des pôles logarithmiques le long de l'hypersurface donnée. L'invariant correspondant est appelé l'indice *logarithmique* d'un champ de vecteurs. Il est très important que ces formes soient naturellement décrites en utilisant une version du lemme de De Rham pour l'hypersurface avec singularités *non-isolées* [3].

Dans cette note, nous montrons comment calculer l'indice de champs de vecteurs donné sur une intersection complète quasi-homogène par des calculs élémentaires de la fonction *génératrice* [2], basés sur une variante du lemme de De Rham pour les intersections complètes [12].

2. Complexe de De Rham contracté et les intersections complètes

Soit X un représentant d'un germe $(X, \mathfrak{o})$ d'espace analytique, plongé dans un voisinage ouvert U de l'origine dans $\mathbb{C}^m$ avec les coordonnées $z_1, \dots, z_m$; ce plongement est déterminé par le choix d'un ensemble de générateurs de l'ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{o}}$. Par la suite, on appelle souvent X ou $(X, \mathfrak{o})$ la *singularité*. Alors X est donné par un idéal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_U$, qui est engendré par une suite de fonctions holomorphe $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}_U$. On désigne par Ω_X^p, $p \geqslant 0$, le module des germes de p-formes différentielles régulières holomorphes sur X, qui sont définies comme une restriction à X de module quotient

$$\Omega_U^p / \big((f_1, \dots, f_k)\Omega_U^p + \mathrm{d}f_1 \wedge \Omega_U^{p-1} + \dots + \mathrm{d}f_k \wedge \Omega_U^{p-1}\big)\big|_X.$$

La différentielle ordinaire d passe aux quotients et forme un complexe de $\mathcal{O}_X$-modules avec une différentielle de degree $+1$, appelé le *complexe de De Rham* sur X, noté $(\Omega_X^\bullet, \mathrm{d})$. Pour les variétés *lisses* ce complexe a déjà été étudié par H. Poincaré. Il est utile de remarquer que $\Omega_X^p = 0$ pour $p < 0$ et $p > m$. Notons $\mathrm{Der}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^1, \mathcal{O}_X)$, qui est le $\mathcal{O}_X$-module des champs de vecteurs réguliers sur X. Soit $\mathcal{V} \in \mathrm{Der}(X)$. Le produit intérieur (contraction) des champs de vecteurs et formes différentielles $\iota_\mathcal{V} : \Omega_X^p \to \Omega_X^{p-1}$ définit une structure de complexe *décroissant* sur $\Omega_X^\bullet$, puisque $\iota_\mathcal{V}^2 = 0$. Ce complexe est appelé le complexe de De Rham *contracté*. Les groupes de $\iota_\mathcal{V}$-homologie sont désignés par $H_*(\Omega_X^\bullet, \iota_\mathcal{V})$.

Supposons $\dim X \geqslant 1$. Le complexe contracté *tronqué* de De Rham $(\widehat{\Omega}_X^\bullet, \iota_\mathcal{V})$ est défini comme suit

$$0 \longrightarrow \Omega_X^n \xrightarrow{\iota_\mathcal{V}} \Omega_X^{n-1} \xrightarrow{\iota_\mathcal{V}} \Omega_X^{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega_X^1 \xrightarrow{\iota_\mathcal{V}} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0.$$

Définition 1. Supposons que tous les groupes d'homologie de $(\widehat{\Omega}_{X,\mathfrak{o}}^\bullet, \iota_\mathcal{V})$ soient des espaces vectoriels de dimension *finie*. La caractéristique d'Euler–Poincaré

$$\chi\big(\widehat{\Omega}_{X,\mathfrak{o}}^\bullet, \iota_\mathcal{V}\big) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_k H_i\big(\widehat{\Omega}_{X,\mathfrak{o}}^\bullet, \iota_\mathcal{V}\big)$$

s'appelle l'indice *homologique* du champ de vecteurs $\mathcal{V}$ au point $\mathfrak{o}$ et est noté $\mathrm{Ind}_{\mathrm{hom},\mathfrak{o}}(\mathcal{V})$.

Remarque. Le concept d'indice homologique a été introduit dans [10] pour les champs de vecteurs définis sur un germe d'espace analytique complexe *réduit* de dimension pure $n \geqslant 1$ avec des groupes d'homologie $H_i(\Omega_{X,\mathfrak{o}}^\bullet, \iota_\mathcal{V})$ finis. Dans les points *non singuliers* de X l'indice homologique du champ $\mathcal{V}$ coïncide avec l'indice *topologique* ou indice de Poincaré–Hopf *local* [10], pour les hypersurfaces (et les intersections complètes) à singularités isolées l'indice homologique dans le point *singulier* est égal à GSV-indice, etc.

Soit X un germe d'intersection complète *réduite* dans une variété ambiante de dimension $m \geqslant 2$. Alors l'idéal $\mathcal{I}$ donnant la singularité X de dimension positive est engendré localement en un point distingué par une certaine suite *régulière* de germes de fonctions $f_1, \dots, f_k$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}$. Alors $\dim X = m - k = n \geqslant 1$ et les modules $\Omega_X^p = \mathrm{Tors}\,\Omega_X^p$ sont des modules de *torsion* pour tout $n < p \leqslant m$. Si la singularité X est *isolée*, tous les modules de torsion sont des espaces vectoriels de dimension finie et $\mathrm{Tors}\,\Omega_X^p = 0$ lorsque $0 < p < n$ (voir [12, (1.11)]). De plus, si $n \geqslant 2$, $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{o}}$ est un *domaine d'intégrité.* En effet, dans ce cas $\mathrm{prof}_{\{\mathfrak{o}\}}\,\mathcal{O}_X \geqslant 2$, si bien que le germe $X \setminus \{\mathfrak{o}\}$ est un ensemble *connexe* [14, Cor. 3.9]. En particulier, le germe X est *irréductible* au point distingué, et donc $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{o}}$ est une algèbre analytique locale qui n'a pas de diviseur de zéro.

Assertion 1. *Soit X un germe de singularité isolée d'intersection complète de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathcal{V} \in \mathrm{Der}(X)$ un champ de vecteurs à singularité isolée. Alors $H_n(\widehat{\Omega}_X^\bullet, \iota_\mathcal{V}) \cong \mathrm{Tors}\,\Omega_X^n$.*

Démonstration. Tout d'abord, nous montrons que $\iota_\mathcal{V}(\mathrm{Tors}\,\Omega_X^n) = 0$. En premier lieu considérons le cas $n = 1$. Alors $\iota_\mathcal{V}(\mathrm{Tors}\,\Omega_X^1) = 0$ dans $\mathcal{O}_X$. En effet, si $\theta \in \mathrm{Tors}\,\Omega_X^1$, il y a un élément $u \in \mathcal{O}_X$, non diviseur de zéro tel que $u\theta \in \sum \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}\mathrm{d}f_j + (f_1, \dots, f_{m-1})\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}$. C'est pourquoi $\iota_\mathcal{V}(u\theta) = u\iota_\mathcal{V}(\theta) \in (f_1, \dots, f_{m-1})\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}$, ou $u\iota_\mathcal{V}(\theta) = 0$ dans $\mathcal{O}_X$, et, donc, $\iota_\mathcal{V}(\theta) = 0$, ce qui est la relation cherchée. Si $n \geqslant 2$, nous voyons que $\iota_\mathcal{V}(\mathrm{Tors}\,\Omega_X^n) \subseteq \mathrm{Tors}\,\Omega_X^{n-1}$, et ce dernier module est trivial selon la remarque précédente.

Supposons maintenant que $K^n = \mathrm{Ker}(\iota_\mathcal{V} : \Omega_X^n \to \Omega_X^{n-1})$. Il est évident que le support de K^n est concentré en le point singulier du germe *réduit* X. Donc à cause de la cohérence, le module K^n est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps de base, et, par conséquent, est un module de torsion. En particulier, $K^n \subseteq H_{\{\mathfrak{o}\}}^0(\Omega_X^n) \cong \mathrm{Tors}\,\Omega_X^n$. C'est pourquoi $K^n \cong \mathrm{Tors}\,\Omega_X^n$, ce qui est l'égalité cherchée. □

3. Séries de Poincaré de modules de formes holomorphes

Soit $\Bbbk$ un corps et $V=\bigoplus_{\nu\in\mathbb{Z}} V_\nu$ un $\Bbbk$-espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué ayant des composantes homogènes de dimension *finie.* La série de Poincaré de l'espace vectoriel V est la série formelle de Laurent $P(V;x)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}(\dim_\Bbbk V_\nu)x^\nu$. Notez que $P(V(\lambda);x)=x^{-\lambda}P(V;x)$, où $V(\lambda)_\nu=V_{\lambda+\nu}$. Si V est de dimension finie, alors $P(V;x)$ est appelé le polynôme de Poincaré. Dans ce cas $P(V;1)=\dim_\Bbbk V$. De la même manière, on peut considérer le cas d'espaces vectoriels *multi-gradués,* $V=\bigoplus_{\nu\in\mathbb{Z}^m} V_\nu$, $m\geqslant 1$.

Soit X un germe de singularité isolée d'intersection complète *quasi-homogène* donné par une suite *régulière* de fonctions quasi-homogènes $f_1,\dots,f_k$ de degrés pondérés $d_1,\dots,d_k$ par rapport aux variables $z_1,\dots,z_m$ de poids $w_1,\dots,w_m$. Autrement dit, le type d'homogénéité de X est $(d_1,\dots,d_k;w_1,\dots,w_m)\in\mathbb{Z}_+^k\times\mathbb{Z}_+^m$, $\dim X=m-k=n\geqslant 1$. Alors tous les modules Ω_X^p, $p\geqslant 0$, aussi bien que $\mathrm{Der}(X)$ sont *gradués* en vertu des relations suivantes : $\deg f_j=\deg \mathrm{d}f_j=d_j$, $j=1,\dots,k$, $\deg z_i=\deg \mathrm{d}z_i=w_i$, $i=1,\dots,m$. En particulier, le degré pondéré de $\partial/\partial z_i$ est égale à $-w_i$, $i=1,\dots,m$. Rappelons que le champ de vecteurs $\mathcal{V}_0=\sum_{i=1}^m w_iz_i\partial/\partial z_i$ de degré pondéré *zéro* est le générateur canonique de $\mathcal{O}_X$-module $\mathrm{Der}(X)$ modulo champs *hamiltoniens* (voir [2, Theorem 6.1]).

Lemme 1. *(Voir [2, Lemma 3.2].) Les séries de Poincaré pour des modules Ω_X^p, $0\leqslant p\leqslant n$, de formes holomorphes sont*

$$P\big(\Omega_X^p;x\big)=P(\mathcal{O}_X;x)\cdot \mathrm{res}_{t=0}\,t^{-p-1}\prod\big(1+tx^{w_i}\big)/\prod\big(1+tx^{d_j}\big),\quad \text{où}\quad P(\mathcal{O}_X;x)=\prod\big(1-x^{d_j}\big)/\prod\big(1-x^{w_i}\big).$$

Démonstration. Soit X' une singularité isolée d'intersection complète avec $\dim X'=n+1$ et $X=f^{-1}(0)$, où $f:X'\to\mathbb{C}$ est une application holomorphe plate telle que $f(\mathrm{o})=0$ et $f|_{X'-\{\mathrm{o}\}}$ est régulière. En d'autres terms, la singularité X est la *section hypersurface* de X' définie par f (voir [20]). Alors, la suite de $\mathcal{O}_X$-modules

$$0\to\Omega_X^p\xrightarrow{\wedge \mathrm{d}f}\Omega_{X'}^{p+1}/f\,\Omega_{X'}^{p+1}\longrightarrow\Omega_X^{p+1}\to 0$$

est exacte pour tous $0\leqslant p\leqslant n-1$ (voir [12, Lemma 1.6]). Dans le cas quasi-homogène, nous obtenons les relations suivantes pour les séries de Poincaré : $P(\Omega_X^{p+1};x)=(1-x^d)P(\Omega_{X'}^{p+1};x)-x^dP(\Omega_X^p;x)$, où $d=\deg f=\deg(\wedge\mathrm{d}f)$.

Considérons d'abord le cas où la singularité $X=X_k$ peut être défini par une suite régulière de fonctions f_i, $i=1,\dots,k$, tel que chaque germe X_j donné par $f_1,\dots,f_j$ est la section hypersurface de X_{j-1} définie par f_j pour tous $j=1,2,\dots,k$, et $X_0=(\mathbb{C}^m,0)$. Dans ce cas il suffit d'appliquer une double récurrence sur k et p comme dans [1]. Le cas général se ramène au cas ci-dessus par les arguments dans [20, 2.3].

Il y a lieu de citer ici que l'on peut déduire ce résultat immédiatement à l'aide des résolvantes de Lebelt [17] pour les modules Ω_X^p (voir [2, (3.3)]). $\square$

4. L'indice homologique sur les intersections complètes quasi-homogènes

Le calcul suivant utilise les propriétés élémentaires des χ_y-caractéristiques (voir [2, Introduction]), ainsi qu'une procédure simplifiée et modifiée de « dévissage » des résolvantes utilisée dans [1] et [2, (3.3)].

Définition 2. Soit $\mathcal{L}^\bullet$ un complexe *décroissant* de A-modules gradués $0\to L^n\to\cdots\to L^1\to L^0\to 0$. Alors la fonction *génératrice* de l'homologie de $\mathcal{L}^\bullet$ est définie comme suit

$$GH_P\big(\mathcal{L}^\bullet;x,y\big)=\sum_{i=0}^n(-1)^iP\big(H_i\big(\mathcal{L}^\bullet\big);x\big)y^i.$$

Remarque. Si tous les groupes d'homologie sont finis, la valeur de la fonction génératrice en $x=y=1$ est alors égale à la *caractéristique d'Euler–Poincaré* du complexe $\mathcal{L}^\bullet$, i.e. $GH_P(\mathcal{L}^\bullet;1,1)=\chi(\mathcal{L}^\bullet)$. Notez aussi que la fonction génératrice peut être considérée comme une variante de la χ_y-caractéristique utilisée par F. Hirzebruch dans un contexte similaire.

Théorème 1. *Dans les conditions et les notations de l'Assertion 1 et du Lemme 1, supposons que $\mathcal{V}$ est un champ de vecteurs de degré pondéré v. Alors*

$$GH_P\big(\big(\widehat{\Omega}_X^\bullet,\iota_{\mathcal{V}}\big);x,x^v\big)=(-1)^nx^{nv}P(\mathcal{O}_X;x)\,\mathrm{res}_{t=0}\,t^{-n-1}\big(1+tx^{-v}\big)^{-1}\prod\big(1+tx^{w_i}\big)/\prod\big(1+tx^{d_j}\big).$$

Démonstration. Considérons le complexe de De Rham tronqué, et posons : $K_X^i=\mathrm{Ker}(\iota_{\mathcal{V}}:\Omega_X^i\to\Omega_X^{i-1})$. Par l'Assertion 1, le noyau du morphisme $\iota_{\mathcal{V}}:\Omega_X^n\to\Omega_X^{n-1}$ coïncide avec la torsion, $K_X^n=\mathrm{Tors}\,\Omega_X^n\cong H_n(\widehat{\Omega}_X^\bullet,\iota_{\mathcal{V}})$. Pour tout $1\leqslant i<n$ il y a une suite exacte courte

$$0\longrightarrow K_X^i\longrightarrow\Omega_X^i\xrightarrow{\iota_{\mathcal{V}}}\iota_{\mathcal{V}}\big(\Omega_X^i\big)\longrightarrow 0$$

et les relations suivantes pour les séries de Poincaré :

$$P\big(K_X^i;x\big)=P\big(\Omega_X^i;x\big)-x^{-v}P\big(\iota_{\mathcal{V}}\big(\Omega_X^i\big);x\big),$$
$$P\big(H_i\big(\Omega_X^\bullet,\iota_{\mathcal{V}}\big);x\big)=P\big(\Omega_X^i;x\big)-x^{-v}P\big(\iota_{\mathcal{V}}\big(\Omega_X^i\big);x\big)-P\big(\iota_{\mathcal{V}}\big(\Omega_X^{i+1}\big);x\big);$$

$$P\big(H_n\big(\widehat{\Omega}^\bullet_X,\iota_{\mathcal V}\big);x\big)=P\big(\mathrm{Tors}\big(\Omega^n_X\big);x\big),\qquad P\big(\iota_{\mathcal V}\big(\Omega^n_X\big);x\big)=x^\nu P\big(\Omega^i_X;x\big)-x^\nu P\big(\mathrm{Tors}\big(\Omega^n_X\big);x\big),$$
$$P\big(H_0\big(\Omega^\bullet_X,\iota_{\mathcal V}\big);x\big)=P(\mathcal O_X;x)-P\big(\iota_{\mathcal V}\big(\Omega^1_X\big);x\big).$$

La somme qui se compose des premiers termes de la fonction génératrice GH_P avec $i=0,\dots,n-1$ et $y=x^\nu$ peut être transformeé de la façon suivante :

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i x^{i\nu}P\big(H_i\big(\Omega^\bullet_X,\iota_{\mathcal V}\big);x\big)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i x^{i\nu}P\big(\Omega^i_X;x\big)+(-1)^{n+1}x^{n\nu}P\big(\mathrm{Tors}\big(\Omega^n_X\big);x\big).$$

Enfin, en ajoutant le polynôme de Poincaré du groupe d'homologie de dimension maximum n avec le signe approprié et en utilisant le Lemme 1 et une transformation simple, nous obtenons la formule désirée. □

Il est facile d'écrire plus clairement l'expression ci-dessus pour la fonction génératrice GH_P et, par conséquent pour l'indice de la manière suivante. Notons W_λ le λ-iéme polynôme symétrique élémentaire de ℓ variables $(y_1,\dots,y_\ell)$, défini par la formule $\prod_{i=1}^{\ell}(1+y_i\zeta)=\sum_{\lambda=0}^{\ell}W_\lambda(y_1,\dots,y_\ell)\zeta^\lambda$. Définissons de même les polynômes symétriques $D_\lambda(y_1,\dots,y_\ell)$ de degré $\lambda\geqslant 0$ par la formule $\prod_{i=1}^{\ell}(1+y_i\zeta)^{-1}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda D_\lambda(y_1,\dots,y_\ell)\zeta^\lambda$.

Corollaire 1. *Dans les conditions du Théorème* 1

$$GH_P\big(\big(\widehat{\Omega}^\bullet_X,\iota_{\mathcal V}\big);x,x^\nu\big)=\sum_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=n}(-1)^{\lambda_2}x^{(n-\lambda_1)\nu}W_{\lambda_2}\big(x^{w_1},\dots,x^{w_m}\big)D_{\lambda_3}\big(x^{d_1},\dots,x^{d_k}\big)P(\mathcal O_X;x).$$

L'assertion suivante est une généralisation d'exemples donnés dans [18] et [19], où sont décrits les cas *d'hypersurfaces* quasi-homogènes et *d'intersections complètes* de deux hypersurfaces homogènes.

Corollaire 2. *Dans les conditions du Lemme* 1*, il y a égalité* $\mathrm{Ind}_{\mathrm{hom},\mathfrak o}(\mathcal V_0)=1+(-1)^n\mu(X)$*, où* $\mu(X)$ *est le nombre de Milnor de* X *en la singularité. Donc, cet indice coïncide avec la caractéristique d'Euler–Poincaré de la fibre de Milnor de la singularité.*

Démonstration. Posons $\nu=0$ dans l'expression du Théorème 1 et notons

$$\varphi(t)=t^{-n-1}(1+t)^{-1}\prod\big(1+tx^{w_i}\big)/\prod\big(1+tx^{d_j}\big)P(\mathcal O_X;x).$$

Il est aisé de voir que $\mathrm{res}_{t=0}\,\varphi(t)=-\mathrm{res}_{s=\infty}\,s^{-2}\widetilde{\varphi}(s)=\sum_{s_0\in\mathbb C\{x\}}\mathrm{res}_{s=s_0}\,s^{-2}\widetilde{\varphi}(s)$, où $t=1/s$. Puisque $s^{-2}\widetilde{\varphi}(s)=(1+s)^{-1}\prod\frac{(s+x^{w_i})}{(1-x^{w_i})}/\prod\frac{(s+x^{d_j})}{(1-x^{d_j})}$, le résidu en $s_0=-1$ est égale à $(-1)^n$, tandis que la partie restante de la somme coïncide avec le polynôme de Poincaré $P(x)$ dans [13, 3.7.b)], où $P(1)=\mu(X)$. Mais en vertu du Théorème 1, nous avons l'égalité $\mathrm{Ind}_{\mathrm{hom},\mathfrak o}(\mathcal V_0)=(-1)^n\,\mathrm{res}_{t=0}\,\varphi(t)|_{x=1}$, et cela achève la démonstration. □

Deux exemples. Pour intersection, dans $(\mathbb C^3,0)$, de deux quadriques $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$, $z_1z_2=0$, on a $\mu=5$. La formule du Corollaire 1 donne l'expression

$$GH_P\big(\big(\widehat{\Omega}^\bullet_X,\iota_{\mathcal V}\big);x,x^\nu\big)=(1+x)^2\big(1+x+\cdots+x^\nu-2x^{\nu+1}\big).$$

On obtient : $\mathrm{Ind}_{\mathrm{hom},0}(\mathcal V)=4(\nu-1)$. Cet exemple a été considéré dans [15, (4.4)], où l'auteur recommande d'utiliser un ordinateur pour les calculs explicites de l'indice homologique pour la famille de champs de vecteurs $\mathcal V_{\ell+1}=z_3^\ell(z_1-z_2)\mathcal V_0$, $\ell\geqslant 1$, de degré pondéré $\nu=\ell+1$. Notons que le champ *hamiltonien* $\mathcal H_1=z_1z_3\partial/\partial z_1-z_2z_3\partial/\partial z_2-(z_1^2-z_2^2)\partial/\partial z_3$ n'est pas colinéaire à $\mathcal V_0$.

Soit X la surface complexe du type d'homogénéité $(2,2;1,1,1,1)$ définie comme l'intersection, dans $(\mathbb C^4,0)$, des deux hyper-quadriques. Dans ce cas, $\mu(X)=7$ et l'on obtient :

$$GH_P\big(\big(\widehat{\Omega}^\bullet_X,\iota_{\mathcal V}\big);x,x^\nu\big)=\big(1-x^\nu\big(4x-2x^2\big)+x^{2\nu}\big(6x^2-8x^3+3x^4\big)\big)P(\mathcal O_X;x).$$

Si $\nu=1$, alors $GH_P((\widehat{\Omega}^\bullet_X,\iota_{\mathcal V});x,x)=1+4x+4x^2-2x^3-2x^4+4x^5+3x^6$, c'est-à-dire : $\mathrm{Ind}_{\mathrm{hom},0}(\mathcal V)=12$. Le résultat correspondant obtenu dans [7, (4.4)] pour un champ de vecteurs à singularité isolée de degré pondéré 1 (et qui n'est pas colinéaire à $\mathcal V_0$) à l'aide de constructions très subtiles, de suites spectrales, et l'utilisation d'un ordinateur muni d'un logiciel puissant de calculs algébriques et symboliques.

5. Généralisations et remarques supplémentaires

Il n'est pas difficile de développer cette approche dans des directions variées. Décrivons brièvement les idées de base d'une méthode plus générale dans le contexte de la théorie de variétés de *Cohen–Macaulay*. Soit X une telle variété de dimension $n\geqslant 1$, et soit Z son lieu singulier ; notons $j:X\setminus Z\to X$ l'inclusion naturelle et soit ω^n_X le module *dualisant* de Grothendieck [14]. Pour tout $p \geqslant 0$, le module $\omega_X^p = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^{n-p}, \omega_X^n)$ est le module des p-formes différentielles régulières *méromorphes* sur X et $\omega_X^p \subseteq j_* j^* \Omega_X^p$. En particulier, $\omega_X^p = 0$ pour $p < 0$ et $p > n$ (voir [6]). De plus, pour tout $p \geqslant 0$, la suite de $\mathcal{O}_X$-modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_Z^0(\Omega_X^p) \longrightarrow \Omega_X^p \longrightarrow \omega_X^p \longrightarrow {}^{\#}\Omega_X^p \longrightarrow 0,$$

est exacte, où ${}^{\#}\Omega_X^p \subseteq \mathcal{H}_Z^1(\Omega_X^p)$. Il est important de souligner que, dans le cas *normal*, cette inclusion est une *égalité* (cf. [4]). Il n'est pas difficile de vérifier que la contraction $\iota_{\mathcal{V}}$ le long de tout champ $\mathcal{V} \in \mathrm{Der}(X)$ est compatible avec tous les morphismes de cette suite. Ainsi, une même suite exacte pour les complexes correspondants est bien définie. Supposons que tous les groupes d'homologie de ces complexes soient les espaces vectoriels de dimension finie sur le corps de base. On obtient alors la relation suivante pour les caractéristiques d'Euler–Poincaré de ces complexes :

$$\chi(\Omega_X^\bullet) = \chi(\omega_X^\bullet) + \chi(\mathcal{H}_Z^0(\Omega_X^\bullet)) - \chi({}^{\#}\Omega_X^\bullet).$$

En fait, pour les singularités isolées 0-ièmes modules de cohomologie locale sont isomorphes aux sous-modules de torsion correspondants de $\Omega_X^\bullet$. De plus, pour les courbes de Cohen–Macaulay, pour les surfaces Gorenstein normales quasi-homogènes, et pour les intersections complètes à singularités isolées $\chi({}^{\#}\Omega_X^\bullet) = 0$. Dans ce cas, l'indice homologique est donc exprimée par les indices du sous-complexe de torsion de $\Omega_X^\bullet$ et de l'indice de $\omega_X^\bullet$, etc.

En conclusion, rappelons également que les variétés *toriques* sont de Cohen–Macaulay et normales. De plus, dans ce cas, tous les termes du complexe $\omega_X^\bullet$ sont des espaces vectoriels *multi-gradués*. Plus précisément, soit $M \subset \mathbb{Z}^n$ un réseau n-dimensionnel, $V = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{k}$ et $\sigma \subset M$ un cône de dimension n. Alors $A = \mathsf{k}[\check{\sigma} \cap M]$ est l'anneau structurel de la variété torique affine $X = X_\sigma$, et pour chaque face τ de σ, un sous-espace vectoriel $V_\tau \subset V$ est défini comme $V_\tau = \bigcap_{\theta \supset \tau} V_\theta$, où θ varie sur les faces de σ de codimension 1 qui contiennent τ. Pour chaque $p \geqslant 0$, on obtient alors les identifications naturelles

$$\omega_A^p \cong \bigoplus_{\nu \in \sigma \cap M} \bigwedge^p (V_{\Gamma(\nu)}), \qquad (\omega_A^p)_\nu \cong \bigwedge^p (V_{\Gamma(\nu)}),$$

où $\Gamma(\nu)$ est la plus petit face de σ contenant ν (voir [8, (0.7) et § 4]). Par conséquent, il reste à calculer les séries de Poincaré pour tous les ω_X^p, et les caractéristiques d'Euler–Poincaré des deux complexes contractés $\mathrm{Tors}\,\Omega_X^\bullet$ et $\mathcal{H}_Z^1(\Omega_X^\bullet)$. De plus, tout champ de vecteurs sur une variété torique opère sur $\omega_X^\bullet$ par décalage sur multi-indices $\lambda \in \mathbb{Z}^n$; ce champ de vecteurs est, en fait, un endomorphisme du semi-groupe associé à l'anneau A. Là encore, on peut appliquer la procédure « dévissage », etc. Dans un contexte plus général tous les calculs ci-dessus peuvent être considérés comme le calcul des volumes mixtes *pondérés* ou *tournés* de la même manière que dans la note [16].

Remerciements

Je remercie deux de mes professeurs à l'école, A. Kouchnirenko pour m'avoir initié aux mathématiques et pour son soutien pendant une longue période, et A. Blokhin qui m'a expliqué la définition originale de l'index des champs de vecteurs dans le plan il y a plus de 46 ans. Je suis aussi très obligé et reconnaissant à X. Gómez-Mont pour les nombreuses discussions stimulantes sur le sujet, à M. Granger pour l'aide précieuse dans la préparation d'une version préliminaire de l'article et à D. Lehmann pour ses remarques et commentaires très importants.

Références

[1] A.G. Aleksandrov, The de Rham complex of a quasihomogeneous complete intersection, Funct. Anal. Appl. 17 (1) (1983) 48–49.
[2] A.G. Aleksandrov, Cohomology of a quasihomogeneous complete intersection, Math. USSR Izv. 26 (1986) 437–477.
[3] A.G. Aleksandrov, On the De Rham complex of nonisolated singularities, Funct. Anal. Appl. 22 (2) (1988) 131–133.
[4] A.G. Aleksandrov, Vector fields on a complete intersection, Funct. Anal. Appl. 25 (4) (1991) 283–284.
[5] A.G. Aleksandrov, The index of vector fields and logarithmic differential forms, Funct. Anal. Appl. 39 (4) (2005) 245–255.
[6] D. Barlet, Le faisceau $\omega_X^\bullet$ sur un espace analytique X de dimension pure, in: Lecture Notes in Math., vol. 670, Springer-Verlag, 1978, pp. 187–204.
[7] H.-Ch. Graf von Bothmer, W. Ebeling, X. Gómez-Mont, An algebraic formula for the index of a vector field on an isolated complete intersection singularity, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 58 (5) (2008) 1761–1783.
[8] V.I. Danilov, Geometry of toric varieties, Russian Math. Surveys 33 (2) (1978) 97–154; translation from Uspekhi Mat. Nauk 33 (2(200)) (1978) 85–134.
[9] L. Giraldo, X. Gómez-Mont, P. Mardešić, On the index of vector fields tangent to hypersurfaces with non–isolated singularities, J. Lond. Math. Soc. (2) 65 (2) (2002) 418–438.
[10] X. Gómez-Mont, An algebraic formula for the index of a vector field on a hypersurface with an isolated singularity, J. Algebraic Geom. 7 (1998) 731–752.
[11] X. Gómez-Mont, J. Seade, A. Verjovski, The index of a holomorphic flow with an isolated singularity, Math. Ann. 291 (1991) 737–751.
[12] G.-M. Greuel, Der Gauß–Manin–Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchscnitten, Math. Ann. 214 (1) (1975) 235–266.
[13] G.-M. Greuel, H. Hamm, Invarianten quasihomogener vollständiger Durchschnitte, Invent. Math. 49 (1) (1978) 67–86.
[14] A. Grothendieck, Local Cohomology, Lecture Notes in Math., vol. 41, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1967.
[15] O. Klehn, Real and complex indices of vector fields on complete intersection curves with isolated singularity, Compos. Math. 141 (2005) 525–540.
[16] A.G. Kushnirenko, Newton polyhedron and Milnor numbers, Funct. Anal. Appl. 9 (1975) 71–72.
[17] K. Lebelt, Torsion äußerer Potenzen von Moduln der homologischen Dimension 1, Math. Ann. 211 (1) (1974) 183–197.
[18] D. Lehmann, M. Soarès, T. Suwa, On the index of a holomorphic vector field tangent to a singular variety, Bol. Soc. Bras. Mat. 26 (1995) 183–199.
[19] D. Lehmann, T. Suwa, Residues of holomorphic vector fields on singular varieties, in: J. Mozo Fernández (Ed.), Ecuaciones diferenciales, Singularidades, Universidad de Valladolid, 1997, pp. 159–182.
[20] I. Naruki, Some remarks on isolated singularities and their application to algebraic manifolds, Publ. RIMS Kyoto Univ. 13 (1977) 17–46.