



Algèbre/Géométrie algébrique

Actions modérées de schémas en groupes affines et champs modérés

*Tame actions of affine group schemes and tame stacks*Sophie Marques^{a,b}^a Univ. Bordeaux, IMB, UMR 5251, 33400 Talence, France^b Università degli studi di Padova, Dipartimento di Matematica, Via Trieste 63, 35121 Padova, Italie¹

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 21 octobre 2011

Accepté après révision le 24 janvier 2012

Disponible sur Internet le 13 février 2012

Présenté par le Comité de rédaction

R É S U M É

Nous comparons ici deux notions de modération : celle d'action modérée introduite dans Chinburg et al. (1996) [4] et celle de champ modéré introduite dans Abramovich et al. (2008) [1], pour ensuite en déduire des résultats de structure sur les groupes d'inertie.

© 2012 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

We compare two notions of tameness: one introduced in Chinburg et al. (1996) [4] for actions of affine group schemes and one introduced in Abramovich et al. (2008) [1] for stacks. From this comparison, we deduce results on the structure of inertia groups in these tame situations.

© 2012 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Chinburg, Erez, Pappas et Taylor ont défini dans leur article [4] la notion d'action modérée. De leur côté, Abramovich, Olsson et Vistoli ont introduit dans leur article [1] la notion de champ modéré. Il est alors naturel de comparer ces deux notions de modération. En se plaçant sous les hypothèses de [1, Définition 3.1] pour le champ quotient associé à une action donnée, on montre que si l'action est modérée au sens de [4], alors le champ quotient est modéré au sens [1]. Sous des hypothèses plus restrictives mais souvent suffisantes dans la pratique, notamment de finitude sur le schéma en groupes qui agit, on montre qu'il y a même équivalence entre ces deux notions. Ces résultats nous permettent ensuite d'établir un théorème de structure pour les groupes d'inertie sous des hypothèses de modération.

2. Notations

Dans la suite, les schémas considérés seront affines sur une base affine. Plus précisément, la base sera $S := \text{Spec}(R)$ où R est un anneau commutatif unitaire, $G = \text{Spec}(A)$ sera un schéma en groupes affine plat sur S et $X := \text{Spec}(B)$ sera un schéma affine sur S . La donnée d'une action de G sur X définie par un morphisme $\mu_X : X \times_S G \rightarrow X$ est équivalente à la donnée d'un B -comodule défini par le morphisme structural, que l'on notera $\rho_B : B \rightarrow B \otimes_R A$. On notera cette action par (X, μ_X) . On notera $C := B^A := \{b \in B \mid \rho_B(b) = b \otimes 1\}$ l'anneau des invariants pour l'action et $Y := \text{Spec}(C)$. Si S' est un S -schéma, on notera $X_{(S')} = X \times_S S'$. Enfin, l'unité d'un anneau A sera notée par 1_A .

Adresse e-mail : Sophie.Marques@math.u-bordeaux1.fr.

¹ Dans le cadre de ALGANT.DOC.

3. Définitions et résultats

On rappelle qu'un morphisme $\alpha : (B, \rho_B) \rightarrow (C, \rho_C)$ de A -comodules est une application R -linéaire telle que $\rho_C \circ \alpha = (\alpha \otimes 1_B) \circ \rho_B$. La R -algèbre A peut être vu comme un A -comodule via la comultiplication $\Delta : A \rightarrow A \otimes_R A$.

Définition 1. On dira qu'une action (X, μ_X) est modérée s'il existe un morphisme de A -comodules $\alpha : A \rightarrow B$, qui est unitaire, i.e. $\alpha(1_A) = 1_B$.

Dans le cas d'un groupe constant, cette définition peut se traduire en termes de surjectivité du morphisme trace, ce qui étend le critère de Noether caractérisant les extensions d'anneaux d'entiers modérées (cf. [4, Introduction]) et explique ainsi le choix de la terminologie.

Considérons le champ quotient $[X/G]$ associé à l'action (X, μ_X) . On rappelle qu'un espace de modules grossier pour $[X/G]$ est un couple (M, ρ) où M est un espace algébrique et $\rho : [X/G] \rightarrow M$ est un morphisme universel pour les morphismes de $[X/G]$ vers un espace algébrique tel que pour tout corps Ω algébriquement clos, $|[X/G](\Omega)| \simeq M(\Omega)$ où $|[X/G](\Omega)|$ est l'ensemble des classes d'isomorphismes du groupoïde. Dans la suite, on notera simplement ρ cet espace de module. Rappelons aussi la définition de groupe d'inertie. Pour ζ un T -point de X où T est une R -algèbre, on notera $I_G(\zeta)$ le groupe d'inertie de l'action au point $\zeta : \text{Spec}(T) \rightarrow X$, défini comme le produit fibré

$$I_G(\zeta) := (X \times_S G) \times_{(X \times_S X, (\mu_X, p_1), (\zeta, \zeta) \circ \Delta)} \text{Spec}(T)$$

où p_1 est la première projection.

Hypothèses 2. Supposons que le champ quotient $[X/G]$ soit un champ algébrique localement de présentation finie et que tous les groupes d'inertie soient finis.

Sous ces hypothèses, on sait par l'article [9] qu'il existe un espace de modules grossier $\rho : [X/G] \rightarrow M$ et que le morphisme ρ est propre.

Définition 3. Sous les Hypothèses 2, on dit que le champ $[X/G]$ est modéré si le foncteur entre les catégories de faisceaux quasi-cohérents $\rho_* : \text{Qcoh}[X/G] \rightarrow \text{Qcoh}(M)$ est exact. En particulier, si on considère l'action triviale avec G fini, localement libre sur S , on dira que G est linéairement réductif au sens de [1], si le champ classifiant $[S/G]$ est modéré.

Remarque 4. Par le critère d'Artin [10, Théorème 10.1], on montre que lorsque G est plat, de présentation finie sur S , $[X/G]$ est un champ algébrique, on a même que le morphisme canonique $p : X \rightarrow [X/G]$ est un G -torseur quasi-compact et représentable. De plus, si l'on suppose X de présentation finie sur S , le champ quotient l'est aussi.

Le but de cette Note est d'abord de relier ces deux notions de modération pour ensuite en déduire des résultats sur les groupes d'inertie.

Théorème 5. Supposons que S soit noethérien, que le schéma en groupes affine G soit plat, de type fini sur S , que X soit de type fini sur S et que tous les groupes d'inertie soient finis. Si l'action (X, μ_X) est modérée alors le morphisme $[X/G] \rightarrow Y$ est un espace de modules grossier pour $[X/G]$ et le champ quotient $[X/G]$ est modéré.

Sous des conditions plus restrictives, il y a même l'équivalence entre les deux notions.

Théorème 6. Supposons que Y soit noethérien, que le schéma en groupes affine G soit fini, localement libre sur S et que le morphisme $X \rightarrow Y$ soit plat. Sous ces conditions, le morphisme $[X/G] \rightarrow Y$ est un espace de modules grossier et l'action est modérée si et seulement si le champ quotient est modéré.

Remarque 7.

1. Le sens direct est vrai sans l'hypothèse $X \rightarrow Y$ plat et Y noethérien.
2. On peut remplacer l'hypothèse Y noethérien par X de type fini si l'on suppose la base S noethérienne. En effet, par [5, Theorem 3.1 (2)], Y est alors de type fini sur S donc noethérien.

En utilisant l'article [1], on démontre le prochain théorème motivé par l'observation suivante. Si l'on considère le cas du schéma en groupes constant associé à un groupe fini Γ tel que B et $C = B^\Gamma$ sont des anneaux de Dedekind, on peut montrer que les groupes d'inertie aux points fermés de X sont linéairement réductifs si et seulement si l'extension B/C est modérée.

Théorème 8. *Supposons que S soit noethérien, le schéma en groupes G soit plat, de type fini sur S , que X soit de type fini sur S et que tous les groupes d'inertie soient finis et plats. Le champ quotient est modéré si et seulement si tous les groupes d'inertie sont linéairement réductifs.*

Remarque 9.

1. On peut montrer qu'une action par un schéma en groupes diagonalisable est toujours modérée, et en appliquant [6, exposé IX, §8], on montre que ses groupes d'inertie en tout point fermé sont diagonalisables. Cet exemple pointe vers une généralisation possible de ce dernier théorème.
2. Les théorèmes exposés ici peuvent se généraliser au cas non affine (voir [4, Définition 7.1]).

4. Preuve du Théorème 5

On commence par deux lemmes :

Lemme 10. *L'exactitude du foncteur $\rho_* : \text{Qcoh}([X/G]) \rightarrow \text{Qcoh}(\text{Spec}(B^A))$ est équivalente à celle du foncteur des invariants $(-)^A : B\text{-}A\text{-modules} \rightarrow B^A\text{-modules}$ (pour les notations voir [4, §2]).*

Démonstration. Elle est conséquence du fait que $\text{Qcoh}([X/G]) \simeq \text{Qcoh}^G(X)$ par [11, Exemple 7.17] et [8, §5]. \square

Le lemme qui suit est plus général que nécessaire mais intéressant en tant que tel (on ne fait pas d'hypothèse de noethérianité sur la base S).

Lemme 11. *Supposons le groupe G de présentation finie et plat sur S et (X, μ_X) une action modérée, alors $\rho_* : \text{Qcoh}([X/G]) \rightarrow \text{Qcoh}(Y)$ est un foncteur exact et $\mathcal{O}_Y \simeq \rho_* \mathcal{O}_{[X/G]}$.*

Démonstration. Le résultat est conséquence du Lemme 10 au vu de [4, Lemma 2.3]. \square

Alper appelle un espace de modules ayant la propriété du lemme *un bon espace de modules* (voir [2]).

Nous pouvons donc utiliser [2, Theorem 6.6], qui montre l'universalité d'un bon espace de modules pour les morphismes de $[X/G]$ vers un espace algébrique, vu que $[X/G]$ est noethérien, puisque X l'est. Par suite, $[X/G] \rightarrow \text{Spec}(C)$ est universel pour les morphismes de $[X/G]$ vers un espace algébrique. D'ailleurs, sous les conditions de notre Théorème 5, on peut appliquer [9], qui montre l'existence d'un espace de modules grossier. Par universalité pour les morphismes de $[X/G]$ vers un espace algébrique, il est égal à $\text{Spec}(C)$. Ce qui montre que $[X/G] \rightarrow \text{Spec}(C)$ est un espace de modules grossier. La suite découle aisément du Lemme 10 combiné avec [4, Lemma 2.3].

5. Preuve du Théorème 6

Le sens direct se montre comme pour le Théorème 5 sans l'hypothèse $X \rightarrow Y$ plat et Y noethérien, une fois que l'on a prouvé que $[X/G] \rightarrow \text{Spec}(C)$ est un espace de modules grossier. Ceci résulte de [5, §3]. La preuve de la réciproque se base sur le lemme algébrique suivant, étant donné le Lemme 10.

Lemme 12. *Soit (X, G) une action sur S . Supposons G fini, localement libre, C noethérien et B plat sur C . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *L'action (X, μ_X) est modérée.*
- (2) *B est A -coplat en tant que R -module (cf. [12, 10.8]).*
- (3) *$(-)^A : {}_B \mathcal{M}^A \rightarrow {}_C \mathcal{M}$, $N \mapsto (N)^A$ est exact.*
- (1') *L'action (X, G_Y) est modérée.*
- (2') *B est A_C -coplat en tant que C -module.*
- (3') *$(-)^{A_C} : {}_B \mathcal{M}^{A_C} \rightarrow {}_C \mathcal{M}$, $N \mapsto (N)^{A_C}$ est exact.*

Démonstration. Pour (1) \Rightarrow (2), on applique [7, Theorem 1.6] suivi de [3, Theorem 1] en prenant en compte [7, (1.4)]. Les équivalences (1') \Leftrightarrow (1) et (3) \Leftrightarrow (3') se montrent facilement et les équivalences (2) \Leftrightarrow (3) et (2') \Leftrightarrow (3') résultent de [3, Lemma 22].

Nous allons montrer que (3') \Rightarrow (1'). Etant donné les hypothèses du lemme, on peut montrer que A_C est de présentation finie sur C et comme par hypothèse B est plat sur C , on peut appliquer [12, 10.11] pour obtenir les isomorphismes suivants :

$$B \square_{A_C} B^* \simeq \text{Com}_{A_C}(B, B) \quad \text{et} \quad B \square_{A_C} (B \otimes_R A)^* \simeq \text{Com}_{A_C}(B \otimes_C A', B)$$

où \square dénote le produit cotensoriel et $(-)^* = \text{Hom}_C(-, C)$ est le dual sur C . Puisque $(B \otimes \epsilon)$ est une section C -linéaire de $\rho_B : B \rightarrow B \otimes_R A$, le morphisme $(B \otimes_C A_C)^* \rightarrow B^*$ est surjectif et puisque nous supposons B A_C -coplat, $B \square_{A_C} (B \otimes_R A)^* \rightarrow B \square_{A_C} B^*$ est aussi surjective. C'est ainsi, que par les isomorphismes précédents, le morphisme $\text{Com}_{A_C}(B \otimes_C A_C, B) \rightarrow \text{Com}_{A_C}(B, B)$ est surjectif, ce qui permet de conclure. \square

6. Preuve du Théorème 8

Lemme 13. *Supposons G fini, plat sur S . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le champ classifiant $[S/G]$ est modéré.*
2. *G est linéairement réductif au sens de [1].*
3. *Pour tout point géométrique $\bar{x} : \text{Spec } k \rightarrow S$ de S , la fibre $G_{\bar{x}} := G \times_S \text{Spec } k$ est linéairement réductive.*

Démonstration. L'équivalence (1) \Leftrightarrow (2) est immédiate sachant que l'identité $S \rightarrow S$ est dans ce cas un espace de modules grossier. L'équivalence (1) \Leftrightarrow (3) est alors une réécriture de l'équivalence (a) \Leftrightarrow (b) de [1, Theorem 3.2] pour une action triviale. \square

Après avoir montré que pour tout point $\zeta : \text{Spec}(T) \rightarrow X$, $\text{Aut}_T(p(\zeta)) \simeq \mathcal{I}_G(\zeta)$, où p est le morphisme canonique surjectif $X \rightarrow [X/G]$ et pour tout $\xi : T \rightarrow [X/G]$,

$$\text{Aut}_T(\xi) := [X/G] \times_{([X/G] \times_S [X/G], \Delta, \Delta \circ \xi)} \text{Spec}(T).$$

Prenons un T -point $\zeta : \text{Spec } T \rightarrow X$ au dessus de S , comme par hypothèse le groupe d'inertie $\mathcal{I}_G(\zeta)$ est fini et plat, par le lemme précédent, il nous suffit donc de démontrer que $(\mathcal{I}_G(\zeta))_{\bar{x}}$ est linéairement réductif, pour tout point $\bar{x} : \text{Spec } k \rightarrow \text{Spec } T$, avec k algébriquement clos. Or, on montre facilement que $(\mathcal{I}_G(\zeta))_{\bar{x}} = \mathcal{I}_G(\zeta \circ \bar{x})$ où $\zeta \circ \bar{x} : \text{Spec } k \rightarrow X$ est un point géométrique de X . Ainsi, pour tout point géométrique \bar{x} , par l'équivalence (a) \Leftrightarrow (b) de [1, Theorem 3.2], tous les groupes d'inertie aux points géométriques sont linéairement réductifs au sens de [1], donc $(\mathcal{I}_G(\zeta))_{\bar{x}}$ est linéairement réductif au sens de [1] ce qui montre par le lemme précédent que $\mathcal{I}_G(\zeta)$ l'est aussi. La réciproque est évidente en considérant toujours la même équivalence de [1, Theorem 3.2].

Remerciements

Cette Note doit énormément à l'aide précieuse et aux conseils de Boas Erez, Marco Garuti et Jean Gillibert. J'ai aussi bénéficié de remarques pertinentes de Brian Conrad, Cédric Pépin et Matthieu Romagny. C'est pourquoi je les remercie vivement ainsi que tous ceux qui ont contribué à l'élaboration de cette Note.

Références

- [1] D. Abramovich, M. Olsson, A. Vistoli, Tame stacks in positive characteristic, *Ann. Inst. Fourier* 58 (2008) 1057–1091.
- [2] J. Alper, Good moduli spaces for Artin stacks, *Oberwolfach Reports* 16 (2008) 14–16.
- [3] S. Caenepeel, G. Militaru, S. Zhu, Frobenius and Separable Functors for Generalized Module Categories and Nonlinear Equations, *Lecture Notes in Math.*, vol. 1787, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [4] T. Chinburg, B. Erez, G. Pappas, M. Taylor, Tame actions of group schemes: integrals and slices, *Duke Math. J.* 82 (2) (1996) 269–308.
- [5] B. Conrad, The Keel–Mori theorem via stacks, preprint from the University of Stanford, disponible à l'adresse <http://www.math.lsa.umich.edu/~bdconrad>, 2005.
- [6] M. Demazure, A. Grothendieck, Schémas en Groupes, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois–Marie (SGA 3), *Lecture Notes in Math.*, vols. 151, 152, 153, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [7] Y. Doi, Algebras with total integral, *Comm. Algebra* 13 (1985) 2137–2159.
- [8] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, 1977.
- [9] S. Keel, S. Mori, Quotients by groupoids, *Ann. of Math.* 145 (1997) 193–213.
- [10] G. Laumon, L. Moret-Bailly, *Champs Algébriques*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, vol. 39, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [11] A. Vistoli, Intersection theory on algebraic stacks and their moduli spaces, *Invent. Math.* 97 (1989) 613–670.
- [12] T. Wisbauer, R. Brzezinski, *Corings and Comodules*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.