



Analyse numérique

## Correction non linéaire et principe du maximum avec des schémas hybrides pour la discrétisation d'opérateurs de diffusion<sup>☆</sup>

*A nonlinear correction and maximum principle for diffusion operators with hybrid schemes*

Christophe Le Potier, Amadou Mahamane

CEA-Saclay, DEN, DM2S, STMF, LMEC, 91191 Gif-sur-Yvette, France

### INFO ARTICLE

*Historique de l'article :*

Reçu le 9 septembre 2011

Accepté après révision le 9 novembre 2011

Disponible sur Internet le 6 décembre 2011

Présenté par le Comité de rédaction

### RÉSUMÉ

Nous présentons une technique non linéaire qui permet de supprimer les oscillations apparaissant pour la discrétisation d'opérateurs de diffusion avec des schémas hybrides.

© 2011 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

### ABSTRACT

We describe a nonlinear technique to eliminate oscillations appearing in the discretization of diffusion operators with hybrid schemes.

© 2011 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

### Abridged English version

In the framework of nuclear waste disposal simulation, we are interested in a transport model in porous media which can be described by a convection–diffusion equation. Here, we focus on the diffusion part of this equation. In this context, it is of great importance to obtain approximations of solutions which respect the physical bounds of this problem. Unfortunately, most of the traditional linear schemes used to solve this problem does not respect the discrete maximum principle for distorted meshes or highly anisotropic diffusion tensors [9]. Recently, a nonlinear correction of cell-centred finite volume schemes has been proposed [11] to insure this principle. In the present work, we extend this technique to the class of hybrid schemes presented in [1,2,4,7,12].

We consider a discretization of an elliptic problem and an hybrid scheme satisfying consistency and coercivity conditions. Here,  $\mathcal{M}$  and  $\mathcal{E}$  are the meshes and the faces of the grid. We define  $F_{K,\sigma}$ , a consistent approximation of  $\int_{\sigma} \bar{D} \nabla u \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \, d\sigma$ . For  $\nu > 0$ , we propose the nonlinear correction described in (2).

In Proposition 4.1, we show that the new scheme is equivalent to the original scheme with a modified flux presented in (3). The consistency of this modified flux is proved in Proposition 4.2. In Proposition 4.3, we give a few words about the coercivity of the modified scheme. In Proposition 4.4, we show that, with light assumptions, the new scheme is non-oscillating.

In the final section, we give a few numerical results. In the first case, we consider the analytical problem (4) and use the finite volume scheme described in [7] (Scheme 1) and its nonlinear correction (Scheme 2). We first show the  $L^2$  error with respect to the analytical solution, the order in space, the minimum values and the percentage of negative values as a

<sup>☆</sup> Ce travail est effectué dans le cadre du GDR Momas et du projet VFSitCom (ANR-08-BLAN-0275-01), <http://ens.math.univ-montp2.fr/droniou/vfsitcom/>.  
Adresses e-mail : [clepotier@cea.fr](mailto:clepotier@cea.fr) (C. Le Potier), [moulaye.ahmad@gmail.com](mailto:moulaye.ahmad@gmail.com) (A. Mahamane).

function of the discretization step  $h$ . We also present these results for a new modification (Scheme 3) of the original scheme. We observe that Scheme 1 presents great oscillations while the modified versions remain positive. However, Scheme 2 is first order in space. We also notice that Scheme 3 is more accurate than the original scheme.

For the second test case, we consider the same diffusion problem with a stiff source term. We observe that the original scheme is highly oscillating while its corrected versions remain positive.

## 1. Introduction

Dans le cadre des études concernant le stockage des déchets nucléaires en formation géologique profonde, nous nous intéressons à un modèle de type transport qui s'écrit à l'aide d'une équation de convection–diffusion–dispersion avec un terme de décroissance radioactive et qui permet d'étudier la migration d'un radionucléide. Il est bien connu que les schémas classiques discrétisant des opérateurs de diffusion ne satisfont pas toujours le principe du maximum pour des mailles très déformées ou des rapports d'anisotropie très élevés [9]. Un travail récent consistant à modifier le schéma «Diamant» [5] permet d'obtenir ce principe [6,8]. Nous proposons une correction non linéaire pour des méthodes hybrides [1,2,4,7,12]. Rappelons qu'un certain nombre d'entre elles prennent en compte de manière robuste et précise des mailles de forme générale et des tenseurs de diffusion discontinus. Sur des maillages quelconques, elles ne se réécrivent généralement pas sous forme de schéma centré compact, ce qui signifie que la correction non linéaire décrite dans [11] ne peut leur être appliquée. Dans ce travail, il s'agira donc de corriger à la fois l'équation de continuité des flux et l'équation de conservation de la masse en les écrivant dans un formalisme adéquat pour obtenir les propriétés désirées.

## 2. Présentation

Nous considérons un domaine polygonal  $\Omega$  de  $\mathcal{R}^N$ . Nous simplifions le modèle de transport et nous nous intéressons au problème elliptique suivant :  $\operatorname{div} \bar{D} \nabla u = -f$  sur  $\Omega$  et  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ , avec :  $u$ , la concentration de radionucléide,  $\bar{D}$ , une matrice  $(N, N)$  symétrique définie positive,  $f \in L^2(\Omega)$ , le terme source.

## 3. Correction non linéaire

Nous considérons un maillage de  $\Omega$  caractérisé par l'ensemble de ses mailles  $\mathcal{M}$ , de ses faces  $\mathcal{E}$  (arêtes en dimension 2) et de ses points  $\mathcal{P}$  notés  $x_{K,K \in \mathcal{M}}$  et  $x_{\sigma, \sigma \in \mathcal{E}}$ . Nous notons :

- $|K|$  le volume de la maille  $K \in \mathcal{M}$ ,  $|\sigma|$  l'aire d'une face  $\sigma \in \mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}_K$ , l'ensemble des faces de  $K$  et  $\mathbf{n}_{K,\sigma}$  les normales orientées vers l'extérieur de  $K$  pour  $\sigma \in \mathcal{E}_K$ ,  $h_K$  le diamètre de chaque maille  $K$ ,  $h_{\mathcal{M}} = \sup_{K \in \mathcal{M}} h_K$ ,  $\mathcal{E}_{int}$  l'ensemble des faces intérieures,  $\mathcal{E}_{ext}$  l'ensemble des faces appartenant à  $\partial\Omega$ .
- $\forall \sigma \in \mathcal{E}_{int}$ ,  $K$  et  $L$  les mailles de part et d'autre de cette face  $\sigma$ .
- $u_K$  la valeur de la concentration dans la maille  $K$ ,  $u_\sigma$  la valeur de la concentration sur la face  $\sigma$  et  $f_K = \frac{\int_K f d\Omega}{|K|}$  la valeur moyenne du terme source.

Nous nous donnons un schéma hybride convergent, localement conservatif déduit du calcul des flux  $F_{K,\sigma}$  qui vérifie :

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} = -|K|f_K, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \quad F_{K,\sigma} + F_{L,\sigma} = 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \quad u_\sigma = 0.$$

Notons  $V(K, \sigma)$  et  $\alpha_{\sigma,J, J \in V(K,\sigma)}$  le stencil et les coefficients relatifs au calcul de  $F_{K,\sigma}$  tels que

$F_{K,\sigma} = \sum_{J \in V(K,\sigma)} \alpha_{\sigma,J} (u_\sigma - u_J)$ . Nous supposons que le schéma vérifie les hypothèses de consistance suivantes :

$$\forall u \in C^2(\Omega), \quad \forall \bar{D} \text{ régulière}, \quad \sum_{J \in V(K,\sigma)} \alpha_{\sigma,J} (u(x_\sigma) - u(x_J)) = \int_{\sigma} \bar{D} \nabla u \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\sigma + \mathcal{O}(|\sigma|h_{\mathcal{M}}). \quad (1)$$

D'autre part, le schéma vérifie l'hypothèse de coercivité suivante :

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} (u_\sigma - u_K) \geq \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mu_\sigma (u_\sigma - u_K)^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \mu_\sigma u_\sigma^2,$$

où les  $\mu_{\sigma, \sigma \in \mathcal{E}}$  sont des réels strictement positifs.

Notons  $V(\sigma) = V(K, \sigma) \cup V(L, \sigma)$  le stencil du schéma pour la face  $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$  et  $V(K)$  le stencil du schéma pour la maille  $K \in \mathcal{M}$ . Les équations de continuité du flux et de conservation s'écrivent sous la forme :

$$F_\sigma := F_{K,\sigma} + F_{L,\sigma} = \sum_{J \in V(\sigma)} \alpha_{\sigma,J} (u_\sigma - u_J) = 0, \quad F_K := \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} = \sum_{\sigma \in V(K)} \alpha_{\sigma,K} (u_\sigma - u_K) = -|K|f_K.$$

D'autre part, nous complétons les ensembles  $V(K)_{K \in \mathcal{M}}$  (resp.  $V(K, \sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}}$ ) de manière à ce que  $L \in V(K)$  soit équivalent à  $K \in V(L)$  (resp.  $\sigma' \in V(K, \sigma)$  est équivalent à  $\sigma \in V(K, \sigma')$ ), ce qui revient à rendre symétrique artificiellement le stencil.

Notons que dans tous les cas, le nombre d'éléments des  $V(K)_{K \in \mathcal{M}}$  et  $V(\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}}$  est borné indépendamment du maillage. Pour  $J$  indice de maille ou de face, nous posons :

$$\Delta_J = \frac{|F_J|}{\sum_{L \in V(J)} |u_L - u_J|} \quad \text{si } \sum_{L \in V(J)} |u_L - u_J| \neq 0, \quad 0 \quad \text{sinon.}$$

Dans cette définition, nous n'avons plus en général les égalités  $F_\sigma = 0$  pour  $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$  et  $F_K = -|K|f_K$  pour  $K \in \mathcal{M}$ . Par contre, les  $F_\sigma$  et  $F_K$  vérifient encore  $F_\sigma = F_{K,\sigma} + F_{L,\sigma}$  et  $F_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}$  et sont toujours calculés avec les égalités décrites dans (1).

Nous nous donnons un paramètre strictement positif  $\nu$ . Nous proposons de modifier le schéma précédent de la manière suivante :

$$\begin{cases} \forall \sigma \in \mathcal{E}_{int}, & F_\sigma + \nu \sum_{J \in V(\sigma)} \{\Delta_\sigma + \Delta_J\}(u_\sigma - u_J) = 0, \\ \forall K \in \mathcal{M}, & F_K + \nu \sum_{\sigma \in V(K)} \{\Delta_K + \Delta_\sigma\}(u_\sigma - u_K) = -|K|f_K, \\ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{ext}, & u_\sigma = 0. \end{cases} \quad (2)$$

#### 4. Propriétés du schéma modifié

Pour  $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$  et  $K \in \mathcal{M}$ , nous définissons le flux modifié  $F'_{K,\sigma}$  comme suit :

$$F'_{K,\sigma} = F_{K,\sigma} + \nu \sum_{J \in V(K,\sigma)} \{\Delta_\sigma + \Delta_J\}(u_\sigma - u_J). \quad (3)$$

**Proposition 4.1.** *Le schéma modifié est conservatif, il est équivalent aux équations suivantes :*

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F'_{K,\sigma} = -|K|f_K, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \quad F'_{K,\sigma} + F'_{L,\sigma} = 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \quad u_\sigma = 0.$$

**Preuve.** Sur les faces, le schéma modifié s'écrit :

$$F_{K,\sigma} + \nu \sum_{J \in V(K,\sigma)} \{\Delta_\sigma + \Delta_J\}(u_\sigma - u_J) + F_{L,\sigma} + \nu \sum_{J \in V(L,\sigma)} \{\Delta_\sigma + \Delta_J\}(u_\sigma - u_J) = 0.$$

Nous reconnaissons :  $\forall \sigma \in \mathcal{E}_{int}, F'_{K,\sigma} + F'_{L,\sigma} = 0$ . D'autre part, les flux  $F'_{K,\sigma}$  vérifient :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F'_{K,\sigma} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} + \nu \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \sum_{J \in V(K,\sigma)} \{\Delta_\sigma + \Delta_J\}(u_\sigma - u_J).$$

Par symétrie de  $V(K, \sigma)$ , les termes  $u_\sigma - u_J$  s'annulent deux à deux. Nous déduisons :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F'_{K,\sigma} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} + \nu \sum_{\sigma \in V(K)} \{\Delta_K + \Delta_\sigma\}(u_\sigma - u_K) = -|K|f_K. \quad \square$$

**Proposition 4.2.** *Pour  $\bar{\bar{D}}$  régulière, avec des fonctions  $u$  dans  $C^2(\Omega)$ , les flux  $F'_{K,\sigma}$  sont consistants.*

**Preuve.** Posons :  $\forall \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \text{Exp}_\sigma := \sum_{J \in V(\sigma)} \alpha_{\sigma,J}(u(x_\sigma) - u(x_J))$  et  $\forall K \in \mathcal{M}, \text{Exp}_K := \sum_{\sigma \in V(K)} \alpha_{\sigma,K}(u(x_\sigma) - u(x_K))$ . D'après la consistance du schéma initial, pour des fonctions régulières, nous obtenons :

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \quad \text{Exp}_\sigma = \int_\sigma \bar{\bar{D}} \nabla u \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \, d\sigma + \int_\sigma \bar{\bar{D}} \nabla u \cdot \mathbf{n}_{L,\sigma} \, d\sigma + \mathcal{O}(|\sigma|h_{\mathcal{M}}) = \mathcal{O}(|\sigma|h_{\mathcal{M}}).$$

L'expression  $\text{Exp}_K$  vérifie :

$$\text{Exp}_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \left\{ \sum_{J \in V(K,\sigma)} \alpha_{\sigma,J}(u(x_\sigma) - u(x_J)) - \int_\sigma \bar{\bar{D}} \nabla u \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \, d\sigma \right\} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_\sigma \bar{\bar{D}} \nabla u \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \, d\sigma.$$

En utilisant la régularité de  $u$  et du tenseur  $\bar{\bar{D}}$ , nous obtenons :

$$\left| \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_\sigma \bar{\bar{D}} \nabla u \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \, d\sigma \right| = \left| \int_K \text{div } \bar{\bar{D}} \nabla u \, d\Omega \right| \leq |K| \sup_K |\text{div } \bar{\bar{D}} \nabla u| = \mathcal{O}(|K|).$$

D'après la consistance du schéma initial, nous déduisons  $\forall K \in \mathcal{M}, \text{Exp}_K = \mathcal{O}(|K|) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathcal{O}(|\sigma| h_{\mathcal{M}})$ .

D'autre part, nous écrivons les inégalités :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{J \in V(K, \sigma)} \alpha_{\sigma, J} (u(x_\sigma) - u(x_J)) \right. \\ & \quad \left. + \nu \sum_{J \in V(K, \sigma)} \left\{ \frac{\text{Exp}_\sigma}{\sum_{L \in V(\sigma)} |u(x_\sigma) - u(x_L)|} + \frac{\text{Exp}_J}{\sum_{L \in V(J)} |u(x_J) - u(x_L)|} \right\} (u(x_\sigma) - u(x_J)) - \int_\sigma \bar{D} \nabla u \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma} \, d\sigma \right| \\ & \leq \left| \sum_{J \in V(K, \sigma)} \alpha_{\sigma, J} (u(x_\sigma) - u(x_J)) - \int_\sigma \bar{D} \nabla u \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma} \, d\sigma \right| \\ & \quad + \left| \nu \sum_{J \in V(K, \sigma)} \left\{ \frac{\text{Exp}_\sigma}{\sum_{L \in V(\sigma)} |u(x_\sigma) - u(x_L)|} + \frac{\text{Exp}_J}{\sum_{L \in V(J)} |u(x_J) - u(x_L)|} \right\} (u(x_\sigma) - u(x_J)) \right| \\ & = T_1 + T_2. \end{aligned}$$

Par consistance du schéma initial,  $|T_1| = \mathcal{O}(|\sigma| h_{\mathcal{M}})$ . D'autre part, le terme  $T_2$  satisfait :

$$|T_2| \leq \nu \sum_{J \in V(K, \sigma)} \left\{ |\text{Exp}_\sigma| \frac{|u(x_\sigma) - u(x_J)|}{\sum_{L \in V(\sigma)} |u(x_\sigma) - u(x_L)|} + |\text{Exp}_J| \frac{|u(x_\sigma) - u(x_J)|}{\sum_{L \in V(J)} |u(x_J) - u(x_L)|} \right\}.$$

Par symétrie du stencil, nous obtenons  $\frac{|u(x_\sigma) - u(x_J)|}{\sum_{L \in V(J)} |u(x_J) - u(x_L)|} \leq 1$  et  $|T_2| \leq \nu \sum_{J \in V(K, \sigma)} \{|\text{Exp}_\sigma| + |\text{Exp}_J|\}$ . D'après les propriétés sur  $\text{Exp}_\sigma$  pour  $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$  et sur  $\text{Exp}_K$  pour  $K \in \mathcal{M}$ , le terme  $T_2$  est proportionnel à un volume car le nombre d'éléments de  $V(K, \sigma)$  est borné. En utilisant une hypothèse de non-dégénérescence du maillage lorsqu'on raffine, nous pouvons écrire que  $T_2 = \mathcal{O}(|\sigma| h_{\mathcal{M}})$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

**Proposition 4.3.** *Le schéma modifié est coercif.*

**Preuve.** Nous considérons l'expression :

$$T = \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (F'_{K, \sigma} - F_{K, \sigma})(u_\sigma - u_K) = \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \sum_{J \in V(K, \sigma)} \nu \{\Delta_\sigma + \Delta_J\} (u_\sigma - u_J)(u_\sigma - u_K).$$

Notons  $f(\sigma, J) = \nu \{\Delta_\sigma + \Delta_J\}$ . Par symétrie du stencil  $V(K, \sigma)$ , l'expression  $T$  devient :

$$T = \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K, \sigma_2 \in \mathcal{E}_K} f(\sigma, \sigma_2) (u_\sigma - u_{\sigma_2})^2 + \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} f(\sigma, K) (u_\sigma - u_K)^2.$$

La coercivité du schéma initial nous permet de conclure.  $\square$

**Remarque 1.** En utilisant ces deux propriétés de consistance et de coercivité, il devrait être possible de généraliser aux schéma hybrides modifiés la preuve de convergence présentée dans [3] pour les méthodes centrées.

**Proposition 4.4.** *Si  $\nu \geq 1$ , le schéma peut s'écrire sous la forme :*

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \quad \sum_{J \in V(\sigma)} \tau_{\sigma, J}^1(u) (u_\sigma - u_J) = 0, \quad \forall K \in \mathcal{M}, \quad \sum_{\sigma \in V(K)} \tau_{\sigma, K}^2(u) (u_\sigma - u_K) = -|K| f_K,$$

avec  $\tau_{\sigma, J}^1(u) \geq 0$  et  $\tau_{\sigma, K}^2(u) \geq 0$ .

**Preuve.** Nous écrivons :

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \quad & \sum_{J \in V(\sigma)} \frac{F_\sigma |u_J - u_\sigma| + \nu |F_\sigma| (u_\sigma - u_J)}{\sum_{L \in V(\sigma)} |u_L - u_\sigma|} + \nu \sum_{J \in V(\sigma)} |F_J| \frac{(u_\sigma - u_J)}{\sum_{L \in V(J)} |u_L - u_J|} = 0, \\ \forall K \in \mathcal{M}, \quad & \sum_{\sigma \in V(K)} \frac{F_K |u_\sigma - u_K| + \nu |F_K| (u_\sigma - u_K)}{\sum_{L \in V(K)} |u_L - u_K|} + \nu \sum_{\sigma \in V(K)} |F_\sigma| \frac{(u_\sigma - u_K)}{\sum_{L \in V(\sigma)} |u_L - u_\sigma|} = -|K| f_K. \end{aligned}$$

Nous concluons en posant :

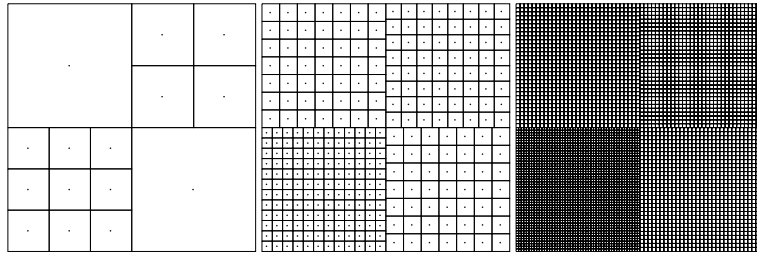


Fig. 1. Premier, troisième et cinquième maillage.

Tableau 1

Résultats obtenus avec les Schémas 1, 2 et 3 en fonction du pas en espace et comparaison avec la solution analytique sur des maillages non conformes.

$h$	$7,07 \times 10^{-1}$	$2,36 \times 10^{-1}$	$1,01 \times 10^{-1}$	$4,71 \times 10^{-2}$	$2,28 \times 10^{-2}$
Erreur $L^2$ (Schéma 1)	$2,06 \times 10^{-1}$	$5,00 \times 10^{-2}$	$2,08 \times 10^{-2}$	$5,67 \times 10^{-3}$	$1,37 \times 10^{-3}$
Ordre (Schéma 1)		1,28	1,03	1,70	1,96
Conc négatives (Schéma 1)	0,00	5,71	3,92	1,56	0,27
Val min (Schéma 1)	$1,47 \times 10^{-2}$	$-5,95 \times 10^{-2}$	$-3,82 \times 10^{-2}$	$-1,45 \times 10^{-2}$	$-2,68 \times 10^{-3}$
Erreur $L^2$ (Schéma 2)	$1,32 \times 10^{-1}$	$7,11 \times 10^{-2}$	$3,55 \times 10^{-2}$	$1,53 \times 10^{-2}$	$6,57 \times 10^{-3}$
Ordre (Schéma 2)		0,57	0,82	1,10	1,17
$nit$	11	13	12	11	8
Erreur $L^2$ (Schéma 3)	$7,72 \times 10^{-2}$	$1,18 \times 10^{-2}$	$3,31 \times 10^{-3}$	$9,95 \times 10^{-4}$	$3,08 \times 10^{-4}$
Ordre (Schéma 3)		1,71	1,50	1,58	1,61
$nit$	5	4	4	4	3

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \quad \tau_{\sigma,J}^1(u) := \frac{(\nu \pm 1)|F_\sigma|}{\sum_{L \in V(\sigma)} |u_L - u_\sigma|} + \frac{\nu|F_J|}{\sum_{L \in V(J)} |u_L - u_J|},$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \tau_{\sigma,K}^2(u) := \frac{(\nu \pm 1)|F_K|}{\sum_{L \in V(K)} |u_L - u_K|} + \frac{\nu|F_\sigma|}{\sum_{L \in V(\sigma)} |u_L - u_\sigma|}. \quad \square$$

**Remarque 2.** Si les coefficients  $\tau_{\sigma,J}^1$  et  $\tau_{\sigma,K}^2$  sont strictement positifs, on montre alors que la solution vérifie le principe du maximum.

### 5. Résultats numériques

Nous cherchons à retrouver numériquement la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\bar{D} \nabla u) = -f & \text{sur } \Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[, \\ u = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) & \text{pour } (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad \text{avec } \bar{D} = \frac{1}{(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} y^2 + \epsilon x^2 & -(1 - \epsilon)xy \\ -(1 - \epsilon)xy & x^2 + \epsilon y^2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

et

$$u_{ana} = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right), \quad f = -\operatorname{div} \bar{D} \nabla u_{ana}.$$

Le paramètre  $\epsilon$  est égal à  $10^{-6}$  ce qui donne un rapport d'anisotropie égal à  $10^6$ . Nous vérifions que  $f \geq 0$ . D'autre part, nous utilisons des maillages non conformes décrits dans la Fig. 1 où  $h = h_{\mathcal{M}}$  varie de  $7,07 \times 10^{-1}$  à  $2,28 \times 10^{-2}$ . Contrairement à de nombreuses méthodes hybrides, notons que la coercivité et donc la robustesse ne sont pas garanties avec des schémas centrés sur ce type de maillage et de tenseurs. Nous calculons la solution du problème à l'aide d'un algorithme de point fixe. Notons  $u^i$  la valeur de la solution à l'itéré  $i$  et  $A(u^i)$  la matrice discrétisant l'opérateur de diffusion. Le schéma itératif s'écrit  $A(u^i)u^{i+1} = -f$ .

Nous montrons tout d'abord les résultats obtenus dans le Tableau 1 avec le schéma développé dans [7] (Schéma 1). (Erreurs  $L^2$  de  $u$  par rapport à la solution analytique, ordre, pourcentage de valeurs négatives, valeur minimum.) Nous représentons également les résultats obtenus avec le schéma modifié (Schéma 2). Nous proposons un dernier schéma (Schéma 3) qui est une variante du Schéma 2, où le système (2) est remplacé par les deux égalités suivantes :

$$\begin{cases} \forall \sigma \in \mathcal{E}_{int} & F_\sigma + \nu \sum_{J \in V(\sigma)} \sup \left\{ \frac{|F_\sigma|}{\sum_{L \in V(\sigma)} \frac{1}{2}(|u_L| + |u_\sigma|)}, \frac{|F_J|}{\sum_{L \in V(J)} \frac{1}{2}(|u_L| + |u_J|)} \right\} (u_\sigma - u_J) = 0, \\ \forall K \in \mathcal{M} & F_K + \nu \sum_{J \in V(K)} \sup \left\{ \frac{|F_K|}{\sum_{L \in V(K)} \frac{1}{2}(|u_L| + |u_K|)}, \frac{|F_J|}{\sum_{L \in V(J)} \frac{1}{2}(|u_L| + |u_J|)} \right\} (u_J - u_K) = -|K|f_K. \end{cases} \quad (5)$$

**Tableau 2**

Résultats obtenus avec les Schémas 1, 2 et 3 avec un terme source raide sur des maillages non conformes.

$h$	$7,07 \times 10^{-1}$	$2,36 \times 10^{-1}$	$1,01 \times 10^{-1}$	$4,71 \times 10^{-2}$	$2,28 \times 10^{-2}$
Conc négatives en% (Schéma 1)	33,33	32,86	23,20	12,79	11,35
Val min (Schéma 1)	$-9,12 \times 10^{-3}$	$-1,73 \times 10^{-2}$	$-2,79 \times 10^{-3}$	$-8,43 \times 10^{-4}$	$-4,10 \times 10^{-4}$
Val max (Schéma 1)	$6,76 \times 10^{-2}$	$1,17 \times 10^{-1}$	$1,51 \times 10^{-1}$	$1,49 \times 10^{-1}$	$1,54 \times 10^{-1}$
Val min (Schéma 2)	$4,53 \times 10^{-5}$	$1,04 \times 10^{-6}$	$1,85 \times 10^{-10}$	$1,38 \times 10^{-14}$	$7,87 \times 10^{-24}$
Val max (Schéma 2)	$3,88 \times 10^{-2}$	$7,09 \times 10^{-2}$	$9,71 \times 10^{-2}$	$1,13 \times 10^{-1}$	$1,28 \times 10^{-1}$
$nit$ (Schéma 2)	22	36	61	31	40
Val min (Schéma 3)	$1,86 \times 10^{-5}$	$1,37 \times 10^{-7}$	$6,65 \times 10^{-10}$	$1,33 \times 10^{-15}$	$1,91 \times 10^{-33}$
Val max (Schéma 3)	$4,56 \times 10^{-2}$	$1,03 \times 10^{-1}$	$1,42 \times 10^{-1}$	$1,45 \times 10^{-1}$	$1,53 \times 10^{-1}$
$nit$ (Schéma 3)	14	47	19	15	14

Si  $\nu \geq 1/2$ , on montre que ce schéma peut s'écrire sous la forme :

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \quad \sum_{J \in V(\sigma)} \tau_{\sigma,J}^1(u) u_{\sigma} - \tau_{\sigma,J}^2(u) u_J = 0, \quad \forall K \in \mathcal{M}, \quad \sum_{\sigma \in V(K)} \mu_{\sigma,K}^2(u) u_{\sigma} - \mu_{\sigma,K}^1(u) u_K = -|K| f_K,$$

avec  $\tau_{\sigma,J}^i(u) \geq 0$  et  $\mu_{\sigma,K}^i(u) \geq 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Le critère d'arrêt de l'algorithme itératif s'écrit  $\frac{\|u^{i+1} - u^i\|}{\|u^{i+1}\|} \leq 10^{-4}$ . Pour les deux schémas corrigés, nous présentons également le nombre d'itérations  $nit$  effectuées dans l'algorithme du point fixe pour atteindre la convergence :  $nit$  reste inférieur à 15. D'autre part, nous observons que le Schéma 2 n'oscille plus et qu'il est d'ordre 1. Quant au Schéma 3, il reste positif et améliore de manière significative la précision du schéma initial.

Afin de montrer l'efficacité de la méthode, nous considérons le même domaine de calcul, une source vérifiant  $f = 1$  sur le carré  $]0,25, 0,75[ \times ]0,25, 0,75[$  ( $f = 0$  ailleurs), et  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Les autres données du problème ne sont pas changées. Afin de réduire le nombre d'itérations  $nit$ , nous appliquons une technique de relaxation inspirée de [13] qui consiste à remplacer, à chaque itéré de l'algorithme du point fixe, le vecteur  $u^i$  par le vecteur  $\tilde{u}^i$  défini comme suit :  $\tilde{u}_{J,J \in \mathcal{M}}^i = \max\{\max\{\min_{L \in V(J)} u_L^i, u_J^i\}, 0\}$ . Les résultats numériques présentés dans le Tableau 2 montrent de grandes oscillations du schéma initial (de l'ordre de 15% de la valeur maximum pour le maillage grossier). Nous vérifions que les Schémas 2 et 3 restent positifs. La relaxation de l'algorithme du point fixe permet d'obtenir un nombre d'itérations dans l'algorithme du point fixe qui n'augmente pas lorsqu'on raffine le maillage. Ceci améliore donc le temps de calcul de manière significative. Cependant, s'il semble trop important pour certaines applications, rappelons qu'il existe alors des schémas linéaires proposés dans [10] pour résoudre des problèmes diffusifs.

## Remerciements

Les auteurs remercient Jérôme Droniou pour avoir mis à disposition le développement informatique décrit dans [7].

## Références

- [1] I. Aavatsmark, T. Barkve, O. Boe, T. Mannseth, Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. Part I: Derivation of the methods, SIAM J. Sci. Comput. 19 (05) (September 1998) 1700–1716.
- [2] F. Brezzi, M. Fortin, Mixed and Hybrid Finite Methods, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [3] C. Cancès, M. Cathala, C. Le Potier, Monotone coercive cell-centered finite volume schemes for anisotropic diffusion equations, en préparation.
- [4] A. Cangiani, G. Manzini, A. Russo, Convergence analysis of a mimetic finite difference method for general second-order elliptic problems, SIAM J. Numer. Anal. 47 (4) (2009) 2612–2637.
- [5] Y. Coudière, J.P. Vila, P. Villiedieu, Convergence rate of a finite volume scheme for a two dimensional convection diffusion problem, M2AN 33 (3) (1999) 493–516.
- [6] J. Droniou, C. Le Potier, Construction and convergence study of local-maximum-principle preserving schemes for elliptic equations, SIAM J. Numer. Anal. 49 (2) (2011) 459–490.
- [7] J. Droniou, R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, A unified approach to mimetic finite difference, hybrid finite volume and mixed finite volume methods, Math. Model. Meth. Appl. Sci. 20 (2) (2010) 265–295.
- [8] A. Genty, C. Le Potier, Maximum and minimum principles for radionuclide transport calculations in geological radioactive waste repository: comparisons between a mixed hybrid finite element method and finite volume element discretizations, Transp. Porous Media 88 (2011) 65–85.
- [9] R. Herbin, F. Hubert, Benchmark on discretization schemes for anisotropic diffusion problems on general grids, in: 5th International Symposium on Finite Volumes for Complex Applications, June 08–13, 2008, <http://www.latp.univ-mrs.fr/fvca5>.
- [10] C. Le Potier, Un schéma linéaire vérifiant le principe du maximum pour des opérateurs de diffusion très anisotropes sur des maillages déformés, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 105–110.
- [11] C. Le Potier, Correction non linéaire et principe du maximum pour la discrétisation d'opérateurs de diffusion avec des schémas volumes finis centrés sur les mailles, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (11–12) (2010) 691–695.
- [12] K. Lipnikov, M. Shashkov, I. Yotov, Local flux mimetic finite difference methods, Numer. Math. 112 (2009) 115–152.
- [13] D. Vidović, M. Dimkić, M. Pušić, Accelerated non-linear finite volume method for diffusion, J. Comput. Phys. 230 (7) (2011) 2722–2735.