C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 977–981

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Géométrie différentielle

# Opérateurs de Toeplitz et torsion analytique asymptotique

## *Toeplitz operators and asymptotic analytic torsion*

Jean-Michel Bismut [a], Xiaonan Ma [b], Weiping Zhang [c]

[a] *Département de Mathématique, Université Paris-Sud, Bâtiment 425, 91405 Orsay cedex, France*
[b] *Université Paris 7, UFR de Mathématiques, case 7012, site Chevaleret, 75205 Paris cedex 13, France*
[c] *Chern Institute of Mathematics & LPMC, Nankai University, Tianjin 300071, PR China*

INFO ARTICLE

*Historique de l'article :*
Reçu le 6 juillet 2011
Accepté le 16 août 2011
Disponible sur Internet le 1er septembre 2011

Présenté par Jean-Michel Bismut

RÉSUMÉ

Dans cette Note, on utilise la théorie des opérateurs de Toeplitz pour calculer le terme dominant dans l'asymptotique quand $p \to +\infty$ des formes de torsion analytique associées à une famille de fibrés plats, qui sont eux-mêmes des images directes de $L^p$, où $L$ est un fibré en droites positif le long des fibres d'une fibration plate en variétés de Kähler. Le terme dominant est obtenu par intégration de formes différentielles calculables localement.


ABSTRACT

In this Note, we use the theory of Toeplitz operators to obtain the leading term in the asymptotic expansion of the analytic torsion forms associated with a family of flat vector bundles that are the direct image of $L^p$, where $L$ is a positive line bundle along the fibres of a flat fibration by compact Kähler manifolds. The leading term is given by the integral of locally computable differential forms.


**Abridged English version**

Let $\pi : M \to S$ be a proper submersion, let $F$ be a flat vector bundle on $M$. In [3], Bismut and Lott have defined even analytic torsion forms on $S$, that are associated with metric data on $M$ and $F$. In degree 0, this form is just the Ray–Singer analytic torsion of the fibre [11]. In this Note, we announce the computation of the leading term in the asymptotic expansion of the analytic torsion forms associated with a family $F_p|_{p\in\mathbf{N}}$, where $F_p$ is the direct image of $L^p$, where $L$ is a holomorphic positive line bundle along a flat fibration by compact Kähler manifolds. This fibration is obtained from a flat $G$-bundle, where $G$ is a reductive group. The asymptotics is obtained under a nondegeneracy assumption involving the moment map along the fibre. The theory of Toeplitz operators plays an important role in the estimates.

The leading term is given by the integral along the fibre of a differential form $W$ that is computable locally. This form can be expressed in the Berezin integral formalism of Mathai and Quillen [9]. This invariant is closely related to another local invariant, the $V$-invariant of [2].

This way, we extend results that were obtained by Müller [10] for the Ray–Singer torsion using the trace formula, when $X$ is a compact quotient of the hyperbolic 3-space. Our results are also related to the results of [5,6] on the asymptotics of holomorphic torsion.

*Adresses e-mail :* Jean-Michel.Bismut@math.u-psud.fr (J.-M. Bismut), ma@math.jussieu.fr (X. Ma), weiping@nankai.edu.cn (W. Zhang).

1631-073X/$ – see front matter 
doi:10.1016/j.crma.2011.08.010

## 1. Introduction

Soit $\pi : M \to S$ une submersion propre de fibre $X$, soit $F$ un fibré plat sur $M$. Dans [3], Bismut et Lott ont défini des formes paires de torsion analytiques sur $S$, associées à des données métriques sur $M$ et sur $F$. En degré 0, ces formes coïncident avec la torsion analytique de Ray–Singer de la fibre [11]. Dans cette Note, on annonce le calcul du terme dominant dans l'asymptotique des formes de torsion analytique associées à une famille $F_p|_{p\in\mathbf{N}}$, où $F_p$ est l'image directe de $L^p$, $L$ étant un fibré en droite positif le long des fibres d'une fibration plate en variétés Kählériennes compactes. Cette fibration est obtenue à partir d'un $G$-fibré plat, où $G$ est un groupe réductif. Cette asymptotique est obtenue sous une hypothèse de non dégénérescence faisant intervenir l'application moment le long de la fibre. La théorie des opérateurs de Toeplitz joue un rôle important dans l'établissement des estimations.

Le terme dominant est donné par l'intégrale dans la fibre $X$ d'une forme différentielle $W$ calculable localement. Cette forme différentielle s'exprime dans le formalisme de l'intégrale de Berezin de Mathai et Quillen [9]. Cet invariant est proche d'un autre invariant local, le $V$-invariant de [2].

Nous étendons ainsi des résultats obtenus par Müller [10] pour la torsion de Ray–Singer par une utilisation adéquate de la formule des traces, quand $X$ est un quotient compact de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})/\mathrm{SU}(2)$, et $F_p = S^pF$, où $F$ vient de la représentation tautologique de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$, et $S^pF$ est sa $p$-ième puissance symétrique. Nos résultats sont également reliés aux résultats de [5,6] relatifs à l'asymptotique de la torsion analytique holomorphe. Les preuves des résultats annoncés ici sont développées dans [4].

## 2. L'invariant *W*

Soit $G$ un groupe connexe réductif, soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, et soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ sa décomposition de Cartan. Soit $U$ la forme compacte de $G$, et soit $\mathfrak{u} = i\mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ son algèbre de Lie. Soit $U\mathfrak{g}$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, soit $S\mathfrak{g}$ son algèbre symétrique. On a un isomorphisme d'espaces vectoriels $\mathbf{Z}_2$-gradués $U\mathfrak{g} \simeq S\mathfrak{g}$.

Soit $(\hat{E}, \langle\,\rangle)$ un espace vectoriel euclidien, soit $\hat{c}(\hat{E})$ l'algèbre de Clifford associée à $-\langle\,\rangle$, i.e., $\hat{c}(\hat{E})$ est engendrée par $1, \hat{e} \in \hat{E}$ et les relations de commutation $\hat{e}\hat{e}' + \hat{e}'\hat{e} = 2\langle \hat{e}, \hat{e}'\rangle$. Alors on a l'isomorphisme d'espaces vectoriels $\mathbf{Z}_2$-gradués $\hat{c}(\hat{E}) \simeq \Lambda^{\cdot}(\hat{E}^*)$. Soit $\sigma : \hat{c}(\hat{E}) \otimes U\mathfrak{g} \to \Lambda^{\cdot}(\hat{E}^*) \otimes S\mathfrak{g}$ l'application symbole déduite de ce qui précède.

Soit $\beta \in \hat{E}^* \otimes \mathfrak{p}$. Alors $\beta^2 \in \Lambda^2(\hat{E}^*) \otimes \mathfrak{k}$. Soit $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_m$ une base orthonormale de $\hat{E}$. On définit $|\beta|^2 \in S^2\mathfrak{g}$ par la formule

$$|\beta|^2 = \sum_{i=1}^{m} \beta(\hat{e}_i)^2. \tag{1}$$

On identifie $\beta$ à $\underline{\beta} \in \hat{E}^* \otimes U\mathfrak{g}$. Soit $|\underline{\beta}|^2 \in U\mathfrak{g}$ donné par

$$|\underline{\beta}|^2 = \sum_{i=1}^{m} \underline{\beta}(\hat{e}_i)^2. \tag{2}$$

On définit $\hat{c}(\underline{\beta}) \in \hat{c}(\hat{E}) \otimes U\mathfrak{g}$ par la formule

$$\hat{c}(\underline{\beta}) = \sum_{i=1}^{m} \hat{c}(\hat{e}_i)\underline{\beta}(\hat{e}_i). \tag{3}$$

Soit $N$ une variété complexe compacte de dimension complexe $n$, soit $g^{TN}$ une métrique hermitienne sur $TN$, soit $\eta$ une $(1,1)$-forme fermée positive sur $N$. On suppose que $U$ agit holomorphiquement sur $N$ et préserve $g^{TN}, \eta$. Si $A \in \mathfrak{u}$, soit $A^N$ le champ de vecteurs holomorphe associé sur $N$, de telle sorte que $A \to -A^N$ soit un morphisme d'algèbres de Lie. Soit $\mu : N \to \mathfrak{u}^*$ une application moment, telle que si $A \in \mathfrak{u}$,

$$d\langle \mu, A\rangle - i_{A^N}\eta = 0. \tag{4}$$

Alors $G_{\mathbf{C}}$ agit également sur $N$. Pour $A \in \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, on désigne par $R(A)$ l'intégrale de Duistermaat et Heckman [7]

$$R(A) = \int_N \exp\bigl(2i\pi \langle \mu, A\rangle + \eta\bigr). \tag{5}$$

Alors $R$ s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. Rappelons que $S\mathfrak{u}$ peut être identifiée à l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants sur $\mathfrak{u}$. De même $S\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ peut être identifiée à l'algèbre des opérateurs différentiels holomorphes complexes à coefficients constants sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. Soit $\sigma_\beta$ la section de $\hat{E}^*$ sur $N$

$$\sigma_\beta = 2\pi \langle \mu, i\beta\rangle. \tag{6}$$

**Définition 2.1.** On dit que $\beta$ est non dégénérée si $\sigma_\beta$ ne s'annule pas sur $N$. Dans ce cas, il existe $a>0, c>0, C>0$ tels que pour $t \geqslant 0$, $A \in \mathfrak{u}_{\mathbf{C}}$,

$$\left|\exp\left(-t|\beta|^2\right)R(A)\right| \leqslant C\exp\left(-ta+c|\operatorname{Im}A|\right). \tag{7}$$

Soit $M$ une variété $C^\infty$, soit $p: P_G \to M$ un $G$-fibré principal muni d'une connexion plate, soit $P_K$ une réduction de $P_G$ en un $K$-fibré principal. Soit

$$\mathfrak{g}_r = P_G \times_G \mathfrak{g}. \tag{8}$$

On pose

$$\mathfrak{p}_r = P_K \times_K \mathfrak{p}, \qquad \mathfrak{k}_r = P_K \times_K \mathfrak{k}. \tag{9}$$

Soit $\theta^{\mathfrak{g}}$ la forme de connexion associée à la connexion plate sur $P_G$, soit $\theta^{\mathfrak{g}} = \theta^{\mathfrak{p}} + \theta^{\mathfrak{k}}$ sa décomposition relativement à la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$. Alors $\theta^{\mathfrak{k}}$ définit une forme de connexion sur $P_K$, et $\theta^{\mathfrak{p}}$ est une section de $T^*M \otimes \mathfrak{p}_r$. On munit ces fibrés euclidiens des connexions induites par $\theta^{\mathfrak{k}}$.

On étend maintenant une construction de Mathai et Quillen [9] quand $G = \mathbf{R}$. Soit $(\hat{E}, g^{\hat{E}}, \nabla^{\hat{E}})$ un fibré euclidien sur $M$ muni d'une connexion euclidienne de courbure $R^{\hat{E}}$. Soit $\beta$ une section $C^\infty$ de $\hat{E}^* \otimes \mathfrak{p}_r$ sur $M$. Soit $\nabla^{\hat{E}\otimes\mathfrak{g}_r,u}$ la connexion sur $\hat{E} \otimes \mathfrak{g}_r$ induite par $\nabla^{\hat{E}}$ et par la connexion $\theta^{\mathfrak{k}}$. On utilise la même notation pour la connexion correspondante sur $\hat{c}(\hat{E}) \otimes U\mathfrak{g}_r$. Pour $t \geqslant 0$, soit $\mathcal{A}_t$ la superconnexion

$$\mathcal{A}_t = \nabla^{\hat{E}\otimes\mathfrak{g}_r,u} + \sqrt{t}\hat{c}(\underline{\beta}). \tag{10}$$

Soit $\mathcal{A}_t^2$ la courbure de $\mathcal{A}_t$, et soit $\sigma(\mathcal{A}_t^2)$ son symbole. Alors $\sigma(\mathcal{A}_t^2)$ est une section de $\Lambda^\cdot(T^*M) \widehat{\otimes} \Lambda^\cdot(\hat{E}^*) \otimes S\mathfrak{g}_r$. On montre dans [4] l'identité

$$\sigma\left(\mathcal{A}_t^2\right) = \frac{1}{4}\langle \hat{e}_i, R^{\hat{E}}\hat{e}_j\rangle \hat{e}^i\hat{e}^j - \theta^{\mathfrak{p},2} + \sqrt{t}\nabla_{\cdot}^{\hat{E}\otimes\mathfrak{g}_r,u}\beta + t|\beta|^2 + t\beta^2. \tag{11}$$

Alors $\sigma(\mathcal{A}_t^2)$ peut être considéré comme un opérateur différentiel holomorphe à coefficients constants sur $\mathfrak{g}_r$.

Soit $o(\hat{E})$ le fibré d'orientation de $\hat{E}$. On utilise le formalisme de l'intégrale de Berezin de Mathai et Quillen [9] sur $\Lambda^\cdot(\hat{E}^*)$, qu'on note $\int^{\hat{B}}$. Si $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_m$ est une base orthonormale de $\hat{E}$, si $\alpha \in \Lambda^\cdot(T^*M)$, on normalise l'intégrale par

$$\int^{\hat{B}} \alpha\hat{e}^1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}^m = \frac{(-1)^{m(m+1)/2}}{\pi^{m/2}}\alpha, \tag{12}$$

de telle sorte que $\int^{\hat{B}}$ est à valeurs dans $\Lambda^\cdot(T^*M) \otimes o(\hat{E})$.

**Définition 2.2.** Pour $t \geqslant 0$, on définit les formes différentielles sur $M$,

$$a_t = \int^{\hat{B}} \exp\left(-\sigma\left(\mathcal{A}_t^2\right)\right)R(0), \qquad b_t = \int^{\hat{B}} \frac{\beta}{2\sqrt{t}}\exp\left(-\sigma\left(\mathcal{A}_t^2\right)\right)R(0). \tag{13}$$

**Théorème 2.3.** *Pour $t \geqslant 0$, la forme $a_t$ est fermée, et sa classe de cohomologie ne dépend pas de $t \geqslant 0$. On a*

$$\frac{\partial}{\partial t}a_t = -\mathrm{d}b_t. \tag{14}$$

*Si $\beta$ est non dégénérée, pour tout compact $K \subset M$, il existe $c_K > 0$ tel que sur $K$, quand $t \to +\infty$,*

$$a_t = \mathcal{O}\left(e^{-c_K t}\right), \qquad b_t = \mathcal{O}\left(e^{-c_K t}\right). \tag{15}$$

*Si $\beta$ est non dégénérée, la classe d'Euler $e(\hat{E})$ s'annule.*

Soit $\pi: M \to S$ une submersion propre de fibre $X$. Soit $g^{TX}$ une métrique sur $TX$, soit $T^HM \subset TM$ un fibré horizontal sur $M$. Par [1], ces données déterminent une connexion euclidienne $\nabla^{TX}$ sur $TX$. Soit $\widehat{TX}$ une autre copie de $TX$, et soit $\nabla^{\widehat{TX}}$ la connexion correspondante. Dans la suite on prend $\hat{E} = \widehat{TX}$, où $\widehat{TX}$ est considéré comme un fibré euclidien muni de la connexion $\nabla^{\widehat{TX}}$. Soit $\hat{\theta}^{\mathfrak{p}}$ la restriction de $\theta^{\mathfrak{p}}$ à $\widehat{TX}$, de telle sorte que $\hat{\theta}^{\mathfrak{p}}$ est une section de $\widehat{T^*X} \otimes \mathfrak{p}_r$. Dans la suite, on prend $\beta = \hat{\theta}^{\mathfrak{p}}$. Alors

$$\sigma\left(\mathcal{A}_t^2\right) = \frac{1}{4}\langle e_i, R^{TX}e_j\rangle \hat{e}^i\hat{e}^j - \theta^{\mathfrak{p},2} + \nabla^{\widehat{TX}\otimes\mathfrak{g}_r,u}\sqrt{t}\hat{\theta}^{\mathfrak{p}} + t\left|\hat{\theta}^{\mathfrak{p}}\right|^2 + t\hat{\theta}^{\mathfrak{p},2}. \tag{16}$$

Soit $\chi(X)$ la caractéristique d'Euler de $X$.

**Théorème 2.4.** *On a les identités* :

$$\pi_* a_t = \chi(X) R(0), \qquad \pi_* b_t = 0. \tag{17}$$

On pose

$$\gamma = -\theta^{\mathfrak{p}} \exp\big(\theta^{\mathfrak{p},2}\big) R(0). \tag{18}$$

Alors $\gamma$ est une forme fermée impaire sur $M$.

**Définition 2.5.** Pour $t \geqslant 0$, on pose

$$c_t = -\int^{\widehat{B}} \theta^{\mathfrak{p}} \exp\big(-\sigma\big(\mathcal{A}_t^2\big)\big) R(0),$$
$$d_t = -\int^{\widehat{B}} \sqrt{t}\,\frac{\theta^{\mathfrak{p}} \wedge \hat{\theta}^{\mathfrak{p}}}{2} \exp\big(-\sigma\big(\mathcal{A}_t^2\big)\big) R(0). \tag{19}$$

Alors $c_t, d_t$ sont des formes sur $M$.

Soit $e(TX, \nabla^{TX})$ la forme d'Euler associée à la connexion $\nabla^{TX}$.

**Théorème 2.6.** *Les formes $\pi_* c_t$ sont impaires, fermées, et leur classe de cohomologie ne dépend pas de $t \geqslant 0$. Les formes $\pi_* d_t$ sont paires. De plus*

$$\pi_* c_0 = \pi_*\big[e\big(TX, \nabla^{TX}\big)\gamma\big]. \tag{20}$$

*On a l'identité* :

$$\frac{\partial}{\partial t}\pi_* c_t = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\pi_* d_t. \tag{21}$$

*Si $\hat{\theta}^{\mathfrak{p}}$ est non dégénérée, si $K \subset M$ est compact, il existe $c_K > 0$ tel que sur $K$, quand $t \to +\infty$,*

$$c_t = \mathcal{O}\big(e^{-c_K t}\big), \qquad d_t = \mathcal{O}\big(e^{-c_K t}\big). \tag{22}$$

**Définition 2.7.** Si $\hat{\theta}^{\mathfrak{p}}$ est non dégénérée, on pose

$$W = -\int_0^{+\infty} d_t \frac{\mathrm{d}t}{t}. \tag{23}$$

**Théorème 2.8.** *La forme paire $\pi_* W$ sur $S$ est telle que*

$$\mathrm{d}\pi_* W = \pi_*\big[e\big(TX, \nabla^{TX}\big)\gamma\big]. \tag{24}$$

*Si $m = \dim X$ est impair, la forme $\pi_* W$ est fermée, et sa classe de cohomologie $[\pi_* W] \in H^{\cdot}(S, \mathbf{C})$ ne dépend pas de $(T^H M, g^{TX})$.*

Dans [4], on vérifie des propriétés fonctorielles de $\pi_* W$ par composition des submersions.

## 3. L'asymptotique des formes de torsion analytique

On suppose maintenant que $L$ est un fibré en droites holomorphe hermitien sur $N$, et aussi que l'action du groupe $U$ se relève à $L$ et préserve la métrique de $L$. Alors $U$ agit unitairement sur $H^{(0,0)}(N, L)$. On suppose que $c_1(L, g^L) = \eta$, et aussi que $\mu$ est l'application moment associée à l'action de $U$ sur $L$. Pour $p \in \mathbf{N}$, on pose

$$F_p = P_K \times_K H^{(0,0)}\big(N, L^p\big). \tag{25}$$

Alors $F_p$ est un fibré plat sur $M$, muni d'une métrique Hermitienne $g^{F_p}$. Soit $D_p^X = d_p^X + d_p^{X*}$ l'opérateur de Hodge–de Rham agissant sur $\Omega^{\cdot}(X, F_p|_X)$. Alors $D_p^{X,2}$ est le Laplacien de Hodge.

Dans la suite, on suppose que $\hat{\theta}^{\mathfrak{p}}$ est non dégénérée. Quand $G = \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbf{C})$, alors $K = \mathrm{U}(n+1)$. Quand $N = \mathbf{PC}^{n+1}$ est muni du fibré hyperplan, alors $F$ est le fibré plat associé à la représentation tautologique duale de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbf{C})$, et $F_p = S^p F$. La condition de non dégénérescence dit que pour $z \in F \setminus 0$, $\langle \hat{\theta}^{\mathfrak{p}} z, \bar{z}\rangle$ est une forme non nulle. Ici $\hat{\theta}^{\mathfrak{p}}$ représente la variation de la métrique $g^F$ relativement à la connexion plate.

**Théorème 3.1.** *Si $K \subset S$ est compact, il existe $c_K > 0$, $c'_K > 0$ tel que pour $s \in K$, $p \in \mathbf{N}$,*

$$D_p^{X,2} \geqslant c_K p^2 - c'_K. \tag{26}$$

*En particulier, pour $p \in \mathbf{N}$ assez grand, $H^{\cdot}(X, F_p|_X) = 0$.*

**Démonstration.** On utilise la formule de Weitzenböck et la théorie des opérateurs de Toeplitz [8]. □

On pose

$$h(x) = xe^{x^2}. \tag{27}$$

On désigne par $\mathcal{T}_h(T^H M, g^{TX}, \nabla^{F_p}, g^{F_p})$ les formes de torsion analytique de Bismut et Lott [3] associées aux données précédentes. On élimine les normalisations de [3] par des puissances de $2i\pi$. Pour $a \in \mathbf{R}$, $\psi_a$ est l'endomorphisme de $\Lambda^{\cdot}(T^*S)$ qui à $\delta$ de degré $q$ associe $a^q \delta$. Le résultat principal annoncé dans la Note est le suivant :

**Théorème 3.2.** *Quand $p \to +\infty$,*

$$p^{-n-1} \psi_{1/\sqrt{p}} \mathcal{T}_h\big(T^H M, g^{TX}, \nabla^{F_p}, g^{F_p}\big) = \pi_* W + \mathcal{O}(1/p). \tag{28}$$

**Remarque 3.3.** Si on remplace $F_p$ par $F_p \otimes F'$, où $F'$ est un fibré plat sur $M$, on doit remplacer $\pi_* W$ par $(\dim F')\pi_* W$. En degré 0, on obtient l'asymptotique de la torsion de Ray–Singer de la fibre. On retrouve ainsi des résultats de Müller [10] que nous étendons à tous les espaces localement symétriques. Le fait que la torsion asymptotique des espaces localement symétriques soit proportionnelle à leur volume résulte d'arguments de localisation. Si $\hat{X}$ est un $\Gamma$ revêtement Galoisien de $X$, on montre dans [4] que la $\Gamma$-torsion analytique de $\hat{X}$ a le même comportement asymptotique que la torsion analytique de $X$.

## Références


[1] J.-M. Bismut, The Atiyah–Singer index theorem for families of Dirac operators: two heat equation proofs, Invent. Math. 83 (1) (1986) 91–151.
[2] J.-M. Bismut, S. Goette, Equivariant de Rham torsions, Ann. of Math. (2) 159 (1) (2004) 53–216.
[3] J.-M. Bismut, J. Lott, Flat vector bundles, direct images and higher real analytic torsion, J. Amer. Math. Soc. 8 (2) (1995) 291–363.
[4] J.-M. Bismut, X. Ma, W. Zhang, Asymptotic torsion and Toeplitz operators, 2011, in press.
[5] J.-M. Bismut, É. Vasserot, The asymptotics of the Ray–Singer analytic torsion associated with high powers of a positive line bundle, Comm. Math. Phys. 125 (2) (1989) 355–367.
[6] J.-M. Bismut, É. Vasserot, The asymptotics of the Ray–Singer analytic torsion of the symmetric powers of a positive vector bundle, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 40 (4) (1990) 835–848.
[7] J.J. Duistermaat, G.J. Heckman, On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space, Invent. Math. 69 (2) (1982) 259–268.
[8] X. Ma, G. Marinescu, Holomorphic Morse Inequalities and Bergman Kernels, Progress in Mathematics, vol. 254, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
[9] V. Mathai, D. Quillen, Superconnections, Thom classes, and equivariant differential forms, Topology 25 (1) (1986) 85–110.
[10] W. Müller, The asymptotics of the Ray–Singer analytic torsion of hyperbolic 3-manifolds, http://arxiv.org/abs/1003.5168v1.
[11] D.B. Ray, I.M. Singer, $R$-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds, Adv. Math. 7 (1971) 145–210.