C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 1093–1096

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Géométrie différentielle

Points singuliers du discriminant d'un d-tissu sur une surface complexe

On the singular points of the discriminant of a d-web on a complex surface

El Hadji Cheikh Mbacké Diop

Département de mathématiques et informatique, faculté des sciences et techniques, université Cheikh Anta Diop de Dakar, Sénégal

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 28 mars 2011
Accepté après révision le 16 août 2011
Disponible sur Internet le 21 septembre 2011

Présenté par le Comité de rédaction

RÉSUMÉ

On généralise la formule de Yartey sur le nombre de points de rebroussements du discriminant d'un d-tissu sur le plan projectif aux tissus sur les surfaces complexes.

ABSTRACT

We generalize for d-webs on complex surfaces a formula due to Yartey which computes the number of cusps of the discriminant of a d-web on the complex projective plane.

1. Introduction

On se référera à [2] pour les définitions et propriétés élémentaires des tissus données dans cette section. Voir aussi [4] et [3].

Un d-tissu sur un ouvert U de $\mathbf{C}^2$ est la donnée d'une équation différentielle implicite $F(x,y,y')=0$ où le polynôme $F(x,y,y')=\sum_{i=0}^{d} a_i(x,y)y'^{d-i}$ est tel que les coefficients a_i sont analytiques et n'ont pas de facteur commun, et le discriminant est un ensemble analytique de dimension complexe $\leqslant 1$. On homogénéise l'équation différentielle $F(x,y,y')=0$ en la remplaçant par l'équation $\varpi=0$, où $\varpi=\sum_{i=0}^{d} a_i(x,y)(\mathrm{d}x)^i(\mathrm{d}y)^{d-i}$ est une section de la puissance symétrique d-ième $S^d(T^\star U)$.

Un tissu $\mathcal{W}$ sur une surface holomorphe M est défini par une famille (U_i,ϖ_i) où (U_i) est un recouvrement ouvert de M, $\varpi_i \in S^d(T^\star U_i)$ vérifiant les propriétés suivantes : i) sur $U_i \cap U_j$, $\varpi_i = u_{ij}\varpi_j$ et la fonction u_{ij} ne s'annule en aucun point ; ii) si V est un ouvert de U_i où sont définies des coordonnées holomorphes (x,y), en écrivant ϖ_i dans ces coordonnées on obtient un tissu sur l'ouvert de $\mathbb{C}^2$ correspondant.

Le cocycle (u_{ij}) définit un fibré vectoriel holomorphe E sur M et les ϖ_i se recollent pour définir un polynôme homogène $\varpi : S^d(TM) \to E$ à coefficients dans E. On dit que E est le type du tissu $\mathcal{W}$.

Soit $\widetilde{M}$ la variété des éléments de contact de M : c'est le projectivisé du fibré tangent holomorphe TM de M. Notons π la projection de $\widetilde{M}$ sur M. La donnée d'un d-tissu $\mathcal{W}$ de type E sur M est équivalente à celle d'une section $s_{\mathcal{W}}$ verticalement invariante du fibré $\pi^{-1}(E)\otimes \check{L}^d$, où L est le fibré tautologique en droites sur $\widetilde{M}$ et $\check{L}$ son dual.

Considérons la surface $\mathbf{S}=s_{\mathcal{W}}^{-1}(0)$ de $\widetilde{M}$. On note $\pi_{\mathbf{S}}$ la restriction de π à $\mathbf{S}$. La courbe critique $\mathcal{R}$ de $\mathcal{W}$ est le complémentaire dans $\mathbf{S}$ de l'ensemble des points réguliers de $\mathbf{S}$ où la différentielle de $\pi_{\mathbf{S}}$ n'est pas surjective. Le discriminant du tissu est l'ensemble $\mathcal{D}=\pi_{\mathbf{S}}(\mathcal{R})$. On dit que le tissu $\mathcal{W}$ est lisse si la surface $\mathbf{S}$ n'a pas de singularité.

Adresse e-mail : elcheikh.diop@ucad.edu.sn.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2011.08.008

Un d-tissu $\mathcal{W}$ sur $\mathbb{P}^2$ est dit de degré n si le nombre de points où une droite générique de $\mathbb{P}^2$ est tangente à une feuille de $\mathcal{W}$ est égal à n ; il est équivalent de dire que $\mathcal{W}$ est de type $\mathcal{O}(n+2d)$. Les tissus algébriques sont ceux de degré 0 : leurs feuilles sont essentiellement les tangentes à une courbe plane algébrique projective réduite (voir [4]). Dans [5], Yartey a démontré le théorème suivant :

Théorème 1. *Soient un entier $d \geqslant 3$ et $\mathcal{W}$ un d-tissu lisse sur $\mathbb{P}^2$. Si la courbe critique $\mathcal{R}$ est lisse et les seules singularités du discriminant $\mathcal{D}$ sont des points doubles ordinaires ou des points de rebroussement ordinaires, le nombre κ de points de rebroussement de $\mathcal{D}$ est égal à $3(d-2)(n^2+nd+d)$.*

Sa méthode consiste à interpréter κ comme le nombre de zéros d'une section du fibré $\mathcal{J}^2(L)$ des jets d'ordre 2 le long des fibres de L. Dans cette Note, on généralise la formule de Yartey aux tissus sur une surface complexe compacte.

Définition 1. Soit Γ une courbe holomorphe compacte d'une surface complexe compacte $\mathbf{S}$ et $h : \widehat{\Gamma} \to \mathbf{S}$ une normalisation de Γ. On dit qu'un point singulier m de Γ est un point singulier élémentaire de type (a,b) si par m passe une seule branche locale de Γ, a est le plus petit entier tel que $h^{(a)}(t_0) \neq 0$, b est le plus petit entier tel que $h^{(a)}(t_0) \wedge h^{(b)}(t_0) \neq 0$, $t \to (x(t), y(t))$ étant l'expression de h en coordonnées locales, $h(t_0) = m$. Un point singulier de Γ où ne passent que des branches locales lisses de Γ, toutes à tangentes distinctes, est appelé point multiple ordinaire.

On a le résultat suivant, avec les notations de [2] :

Théorème 2. *Soit $\mathcal{W}$ un d-tissu lisse de type E sur une surface complexe compacte M, $d \geqslant 2$. Si la courbe critique $\mathcal{R}$ est lisse et les seules singularités du discriminant sont des points multiples ordinaires ou des singularités élémentaires de type (a,b), alors, en désignant par $m_{a,b}$ le nombre de points singuliers de type (a,b), $\mathcal{T}$ la restriction à $\mathcal{R}$ du fibré $\pi^{-1}(E^\star) \otimes L^d \otimes \pi^{-1}(\Lambda^2(TM))$ et $\chi(\mathcal{R})$ la caractéristique d'Euler–Poincaré de $\mathcal{R}$, on a :*

$$c_1(\mathcal{T}) \frown [\mathcal{R}] - \chi(\mathcal{R}) = \sum_{a,b} m_{a,b}(a-1).$$

La somme $\sum_{a,b} m_{a,b}(a-1)$ ne dépend que du type E du d-tissu $\mathcal{W}$. Le problème se pose de la calculer explicitement lorsque M est une surface algébrique projective.

Il serait aussi intéressant par exemple en rang maximal de mettre à jour des liaisons entre la nature des singularités du discriminant du tissu considéré et les singularités de ses relations abéliennes.

Corollaire 1. *(Voir [2].) Soit un entier $d \geqslant 2$. Un d-tissu lisse et dicritique $\mathcal{W}$ sur $\mathbb{P}^2$ est algébrique, soit $n = 0$.*

Une preuve du Corollaire 1 reposant sur le théorème d'annulation de Bott est donnée dans [2].

Corollaire 2. *Soit $\mathcal{W}$ un d-tissu lisse de degré n sur $\mathbb{P}^2$, $d \geqslant 2$. Sous les hypothèses du Théorème 2, on a :*

$$\sum_{a,b} m_{a,b}(a-1) = 3(d-2)\big(n^2+nd+d\big).$$

2. Rappels et notations

Soit (x,y) un système de coordonnées holomorphes définies sur un ouvert U de M ; on note $\partial x(m)$ le vecteur tangent $\frac{\partial}{\partial x}(m)$. L'application $[\partial x(m) + p\partial y(m)] \to (x,y,p)$ définit un système de coordonnées sur le complémentaire U_x de $[\partial y]$ dans $\pi^{-1}(U)$; de même, l'application $[q\partial x(m) + \partial y(m)] \to (x,y,q)$ définit un système de coordonnées sur le complémentaire U_y de $[\partial x]$ dans $\pi^{-1}(U)$. La section $\partial x + p\partial y$ définit une trivialisation holomorphe de L au-dessus de U_x. On pose $L^d = L^{\otimes d}$ et on note $(\partial x + p\partial y)^{-d}$ le dual de $(\partial x + p\partial y)^{\otimes d}$.

Si (x',y',p') est un autre système coordonnées locales sur $\widetilde{M}$ comme ci-dessus, en posant $\alpha = \frac{\partial x'}{\partial x}$, $\beta = \frac{\partial x'}{\partial y}$, $\gamma = \frac{\partial y'}{\partial x}$ et $\delta = \frac{\partial y'}{\partial y}$, on a : $\partial x + p\partial y = (\alpha + p\beta)(\partial x' + p'\partial y')$. On note Δ le déterminant $\left|\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right|$.

3. Preuve du Théorème 2

Soit $\widetilde{m}$ un point de $\mathcal{R}$, $m = \pi_{\mathbf{S}}(\widetilde{m})$, (x,y) et (x,y,p) des coordonnées holomorphes définies comme ci-dessus respectivement au voisinage de m et $\widetilde{m}$. Si $\mathbf{S}$ est définie par la condition $F(x,y,p) = 0$, on note F_t la dérivée partielle de F par rapport à la variable t et F_{ts} la dérivée partielle d'ordre 2 de F par rapport aux variables t et s.

Supposons par exemple $F_y(\widetilde{m}) \neq 0$; la restriction $(\tilde{x}, \tilde{p})$ de (x,p) à $\mathbf{S}$ définit alors un système de coordonnées dans un voisinage de $\widetilde{m}$ dans $\mathbf{S}$. La projection $\pi_{\mathbf{S}}$ s'écrit dans ces coordonnées locales : $(\tilde{x}, \tilde{p}) \to (x, \varphi(\tilde{x}, \tilde{p}))$ avec $\varphi_x = -\frac{F_x}{F_y}$, $\varphi_p = -\frac{F_p}{F_y}$.

Comme $F_p(\widetilde{m}) = 0$, on a : $\pi_{\mathbf{S}\star}(\partial\tilde{p}|_{\widetilde{m}}) = 0$ et $\pi_{\mathbf{S}\star}(\partial\tilde{x}|_{\widetilde{m}}) = \frac{1}{F_y}(\widetilde{m})(F_y(\widetilde{m})\partial x(\widetilde{m}) - F_x(\widetilde{m})\partial y(\widetilde{m}))$. Par suite la différentielle de $\pi_{\mathbf{S}}$ envoie $(T\mathbf{S})|_{\mathcal{R}}$ sur le sous-fibré $\mathcal{T}$ de $p_{\mathcal{R}}^{-1}(TM)$ localement engendré par la restriction à $\mathcal{R}$ des sections de $\pi_{\mathbf{S}}^{-1}(TM)$ du type $F_y\partial x - F_x\partial y$.

La surface $\mathbf{S}$ est l'ensemble des zéros d'une section holomorphe $s_{\mathcal{W}}$ de $\pi^{-1}(E)\otimes\check{L}^d$. Soient (x, y) et (x', y') deux systèmes de coordonnées locales définies sur un voisinage de m, σ_E et σ'_E deux trivialisations holomorphes de E au voisinage de m. Si, dans les trivialisations locales $\pi^{-1}\sigma_E \otimes (\partial x + p\partial y)^{-d}$ et $\pi^{-1}\sigma'_E \otimes (\partial x' + p'\partial y')^{-d}$ de $\pi^{-1}(E)\otimes\check{L}^d$, $s_{\mathcal{W}}$ s'écrit respectivement $s_{\mathcal{W}} = F\pi^{-1}(\sigma_E)\otimes(\partial x + p\partial y)^{-d}$ et $s_{\mathcal{W}} = G\pi^{-1}(\sigma'_E)\otimes(\partial x' + p'\partial y')^{-d}$, alors $G = \frac{Fu}{(\alpha+p\beta)^d}$, d'où

$$F_y\partial x - F_x\partial y|_{\mathcal{R}} = u^{-1}(\alpha + p\beta)^d\Delta\big(G_{y'}\partial x' - G_{x'}\partial y'\big|_{\mathcal{R}}\big),$$

avec $\sigma_E = u\sigma'_E$ et $\partial x + p\partial y = (\alpha + p\beta)(\partial x' + p'\partial y')$. Comme les fonctions $u^{-1}\Delta(\alpha + p\beta)^d$ sont les fonctions de transition du fibré $\pi^{-1}(E^\star)\otimes L^d \otimes \pi^{-1}(\Lambda^2(TM))$, $\mathcal{T}$ est la restriction de ce fibré à $\mathcal{R}$.

L'application $\pi_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to M$ est une normalisation du discriminant $\mathcal{D}$. D'après la première partie de la démonstration, on peut interpréter sa différentielle $\mathrm{d}\pi_{\mathcal{R}}$ comme une section du fibré $T^\star\mathcal{R}\otimes\mathcal{T}$. Notant $S(\pi_{\mathcal{R}})$ l'ensemble des points critiques de $\pi_{\mathcal{R}}$ et $I_{\widetilde{m}}^{\mathcal{R}}$ l'indice de cette section au point $\widetilde{m}$, on a :

$$c_1\big(T^\star\mathcal{R}\otimes\mathcal{T}\big)\frown[\mathcal{R}] = c_1(\mathcal{T})\frown[\mathcal{R}] - \chi(\mathcal{R}) \tag{1}$$

$$= \sum_{S(\pi_{\mathcal{R}})} I_{\widetilde{m}}^{\mathcal{R}}. \tag{2}$$

Soit $\sigma_{\mathcal{T}} = F_y\partial x - F_x\partial y$ et $\mathrm{d}\tilde{x}_{\mathcal{R}}$ la restriction de $\mathrm{d}\tilde{x}$ à $\mathcal{R}$; on a : $\mathrm{d}\pi_{\mathcal{R}} = F_{pp}\,\mathrm{d}\tilde{x}_{\mathcal{R}}\otimes\sigma_{\mathcal{T}}$. Par suite $I_{\widetilde{m}}^{\mathcal{R}}$ est l'ordre d'annulation $\nu_{\widetilde{m}}(F_{pp})$ de F_{pp} en $\widetilde{m}$.

Les points singuliers de $\mathcal{D}$ de type (a, b) sont les images des points critiques de $\pi_{\mathcal{R}}$. Si $m = \pi_{\mathcal{R}}(\widetilde{m})$ est un tel point, alors $I_{\widetilde{m}}^{\mathcal{R}} = a - 1$.

4. Cas des tissus sur le plan projectif complexe

Dans le cas particulier où M est le plan projectif $\mathbb{P}^2$, la variété des éléments de contact $\widetilde{\mathbb{P}^2}$ s'identifie à l'hypersurface de $\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}'^2$ d'équation $uX + vY + wZ = 0$, $[X, Y, Z]$ étant les coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^2$ et $[u, v, w]$ les coordonnées homogènes sur le dual $\mathbb{P}'^2$ de $\mathbb{P}^2$. Celle-ci est aussi la variété des éléments de contact de $\mathbb{P}'^2$.

Notons $\mathcal{O}(-1)$ et $\mathcal{O}'(-1)$ les fibrés tautologiques en droites respectifs sur $\mathbb{P}^2$ et $\mathbb{P}'^2$, $\mathcal{O}(1)$, $\mathcal{O}'(1)$ leur dual et π' la projection de $\widetilde{\mathbb{P}^2}$ sur $\mathbb{P}'^2$. On pose $\ell = \pi^{-1}(O(-1))$, $\ell' = \pi'^{-1}(O'(-1))$, on note $\check{\ell}$ le dual de ℓ et $\check{\ell}'$ celui de ℓ' ; $\xi = c_1(\check{\ell}) = \pi^\star(c_1(\mathcal{O}(1)))$ et $\xi' = c_1(\check{\ell}') = \pi'^\star(c_1(\mathcal{O}'(1)))$ désignent respectivement la première classe de Chern de $\check{\ell}$ et $\check{\ell}'$. Le fibré tautologique L en droites sur $\widetilde{\mathbb{P}^2}$ est égal à $\ell'\otimes\check{\ell}^2$.

Soit $\mathcal{W}$ un d-tissu de degré n sur $\mathbb{P}^2$, c'est-à-dire de type $E = \mathcal{O}(n + 2d)$; la surface $\mathbf{S}$ associée à $\mathcal{W}$ est l'ensemble des zéros d'un polynôme $K(X, Y, Z; u, v, w)$ bihomogène de degré n en (X, Y, Z) et de degré d en (u, v, w). L'entier n est le nombre de points où une droite générique de $\mathbb{P}^2$ est tangente à une solution de l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$, où $F(x, y, p) = K(x, y, 1; p, -1, y - px)$. Si $\mathbf{S}$ est lisse, son fibré normal dans $\widetilde{\mathbb{P}^2}$ est alors $N_{\mathbf{S}} = \iota^{-1}(\check{\ell}^n\otimes\check{\ell}'^d)$, ι étant l'inclusion de $\mathbf{S}$ dans $\widetilde{\mathbb{P}^2}$.

Soient $\pi_{\mathbf{S}}$ et $\pi'_{\mathbf{S}}$ les restrictions de π et π' à $\mathbf{S}$. La courbe critique $\mathcal{R}$ de $\mathcal{W}$ est non vide et est l'ensemble des zéros d'une section du fibré $N = \iota^{-1}(\check{\ell}^{n+1}\otimes\check{\ell}'^{d-2})$, où ι est l'inclusion de $\mathbf{S}$ dans $\widetilde{\mathbb{P}^2}$; si elle est lisse, son fibré normal $N_{\mathcal{R}}$ dans $\mathbf{S}$ est égal à la restriction à $\mathcal{R}$ du fibré N. L'ensemble co-critique $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{W}$ est le complémentaire dans $\mathbf{S}$ des points réguliers de $\mathbf{S}$ où la différentielle de $\pi'_{\mathbf{S}}$ est surjective. Dans les coordonnées (x, y, p), $\mathcal{R}$ a pour équations : $F = 0$ et $F_p = 0$; celles de $\mathcal{R}'$ sont $F = 0$ et $F_x + pF_y = 0$.

On dit que $\mathcal{W}$ est un tissu dicritique si $\mathcal{R}$ est inclus dans $\mathcal{R}'$; sinon $\mathcal{W}$ est dit non-dicritique. Les d-tissus non-dicritiques de degré n sur $\mathbb{P}^2$ sont ceux dont la surface associée $\mathbf{S}$ définit aussi un n-tissu de degré d sur $\mathbb{P}'^2$.

Un d-tissu de degré 0 sur $\mathbb{P}^2$ est dit algébrique ; ses feuilles sont essentiellement les tangentes à une courbe plane algébrique projective réduite (voir [4]). Un d-tissu algébrique est dicritique et sa surface associée s'écrit $\mathbf{S} = \pi'^{-1}(C')$, où C' est une courbe de $\mathbb{P}'^2$ de degré d. Un exemple de tissu dicritique non lisse qui n'est pas algébrique est donné dans [2].

Preuve du Corollaire 1. Soit $\mathcal{W}$ un tissu dicritique lisse sur $\mathbb{P}^2$. Si $\mathcal{R}$ avait un point singulier $\widetilde{m}$, supposons par exemple que $\widetilde{m}$ appartienne à l'ouvert $Zv \neq 0$ et que $F_y(\widetilde{m}) \neq 0$, $F(x, y, p) = 0$ étant l'équation de $\mathbf{S}$ dans les coordonnées (x, y, p). On aurait alors : $F_xF_{py} - F_yF_{px}(\widetilde{m}) = 0$ et $F_{pp}(\widetilde{m}) = 0$. En dérivant la fonction $F_x + pF_y$ par rapport à p et en tenant compte du fait que $pF_{py} + F_{px}(\widetilde{m}) = 0$, on aboutit à une contradiction.

Soient $\pi_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to \mathbb{P}^2$ (respectivement $\pi'_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to \mathbb{P}'^2$) la restriction de π (respectivement π') à $\mathcal{R}$. On pose $\mathcal{O}_{\mathcal{R}}(k) = \pi_{\mathcal{R}}^{-1}(\mathcal{O}(k))$, $\mathcal{O}'_{\mathcal{R}}(k) = \pi_{\mathcal{R}}'^{-1}(\mathcal{O}'(k))$, $\xi_{\mathcal{R}} = c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{R}}(1))$ et $\xi'_{\mathcal{R}} = c_1(\mathcal{O}'_{\mathcal{R}}(1))$. En remarquant que $\pi^{-1}(E^\star)\otimes L^d\otimes\pi^{-1}(\Lambda^2(TM)) = \ell^{n-3}\otimes\ell'^d$, on a : $\mathcal{T} = \mathcal{O}_{\mathcal{R}}(3 - n)\otimes\mathcal{O}'_{\mathcal{R}}(-d)$.

La première classe de Chern $c_1(\mathcal{R})$ de $\mathcal{R}$ est égale à la composante $[\frac{c(T\widetilde{\mathbb{P}^2}|_{\mathcal{R}})}{c(N_{\mathbf{S}}|_{\mathcal{R}})c(N_{\mathcal{R}})}]_1$ de dimension 1 dans le développement de $\frac{c(T\widetilde{\mathbb{P}^2}|_{\mathcal{R}})}{c(N_{\mathbf{S}}|_{\mathcal{R}})c(N_{\mathcal{R}})}$ (voir [1] pour la définition des classes caractéristiques en **K**-théorie).

Supposons $d \geqslant 2$. La différentielle de $\pi_{\mathbf{S}}$ envoie $TV|_{\mathcal{R}}$ sur le fibré $L|_{\mathcal{R}}$ de façon surjective. Il en résulte que $L|_{\mathcal{R}}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathcal{R}}(3-n) \otimes \mathcal{O}'_{\mathcal{R}}(-d)$; puisque $L|_{\mathcal{R}} = \mathcal{O}_{\mathcal{R}}(2) \otimes \mathcal{O}'_{\mathcal{R}}(-1)$, on en déduit :

$$(1-n)\xi_{\mathcal{R}} = (d-1)\xi'_{\mathcal{R}}. \tag{3}$$

Supposons $\xi'_{\mathcal{R}} = 0$. En écrivant les applications $\pi_{\mathbf{S}}$ et $\pi'_{\mathbf{S}}$ en coordonnées locales, on voit que la différentielle de $\pi_{\mathcal{R}}$ est un isomorphisme de $T\mathcal{R}$ sur $L_{\mathcal{R}}$. On en déduit : $c_1(\mathcal{R}) = (1-2n)\xi_{\mathcal{R}}$. La relation $c_1(\mathcal{R}) = c_1(L_{\mathcal{R}})$ entraîne l'égalité $(1+2n)\xi_{\mathcal{R}} = 0$, ce qui est impossible car $\xi_{\mathcal{R}}$ n'est pas identiquement nulle. Comme $\xi'_{\mathcal{R}} \neq 0$, (3) entraîne : $(1-n)\delta_{\mathcal{R}} = (d-1)\delta'_{\mathcal{R}} > 0$. Ceci n'est possible que si $n=0$. $\square$

Preuve du Corollaire 2. La première classe de Chern $c_1(N)$ de N est la duale de Poincaré de la classe fondamentale $[\mathcal{R}]$. Posons $\eta_{\mathbf{S}} = [\frac{c(T\widetilde{\mathbb{P}^2}|_S)}{c(N_{\mathbf{S}})c(N)}]_1$ et $\omega_{\mathbf{S}} = \eta_{\mathbf{S}} c_1(N)$. Comme $c_1(\mathcal{R}) = [\frac{c(T\widetilde{\mathbb{P}^2}|_{\mathcal{R}})}{c(N_{\mathbf{S}}|_{\mathcal{R}})c(N_{\mathcal{R}})}]_1$, on a : $\chi(\mathcal{R}) = \omega_{\mathbf{S}} \frown [\mathbf{S}]$. On a les égalités : $\eta_{\mathbf{S}} = \iota^\star((1-2n)\xi + (4-2d)\xi')$, $\omega_{\mathbf{S}} = \iota^\star((1-n-2n^2)\xi^2 + (-2d^2+8d-8)\xi'^2 + (-4nd+8n-d+2)\xi\xi')$.

$$\begin{aligned} c_1(\mathcal{T}) \frown [\mathcal{R}] &= c_1\big(\mathcal{O}_{\mathcal{R}}(3-n) \otimes \mathcal{O}'_{\mathcal{R}}(-d)\big) \frown [\mathcal{R}] \\ &= \big(c_1\big(\pi_{\mathbf{S}}^{-1}\big(\mathcal{O}(3-n)\big) \otimes \pi_{\mathbf{S}}'^{-1}\big(O'(-d)\big)\big).c_1(N)\big) \frown [\mathbf{S}] \\ &= \big[\big((3-n)\xi - d\xi'\big).\big((n+1)\xi + (d-2)\xi'\big)\big] \frown [\mathbf{S}]. \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que $\xi\xi' = \xi^2 + \xi'^2$ (voir [2], lemme 4.4, ii)), on a :

$$\omega_{\mathbf{S}} = \iota^\star\big(\big(-2n^2-4nd+7n-d+3\big)\xi^2 + \big(-2d^2-4nd+7d+8n-6\big)\xi'^2\big), \tag{4}$$

$$c_1(\mathcal{T}) \frown [\mathcal{R}] = \big(\big(-n^2-2nd+4n+2d-3\big)\xi^2 + \big(-d^2-2nd+4d+2n-6\big)\xi'^2\big) \frown [\mathbf{S}]. \tag{5}$$

La restriction de $\pi_{\mathbf{S}}$ à $\mathbf{S} \setminus \pi_{\mathbf{S}}^{-1}(\mathcal{D})$ étant un revêtement à d feuillets, $\xi^2 \frown [\mathbf{S}] = d(c_1^2(\mathcal{O}(1))) \frown [\mathbb{P}^2] = d$.

Si $\mathcal{W}$ est non-dicritique, la restriction de $\pi'_{\mathbf{S}}$ à $\mathbf{S} \setminus \pi_{\mathbf{S}}'^{-1}(\mathcal{D}')$ est un revêtement à n feuillets, d'où $\xi'^2 \frown [\mathbf{S}] = n(c_1^2(\mathcal{O}'(1))) \frown [\mathcal{P}'^2] = n$; par suite, on a :

$$c_1(\mathcal{T}) \frown [\mathcal{R}] = -3n^2d - 3nd^2 + 2n^2 + 2d^2 + 8nd - 3d - 6n, \tag{6}$$

$$\chi(\mathcal{R}) = -6n^2d - 6nd^2 + 14nd + 8n^2 - d^2 + 3d - 6n. \tag{7}$$

On obtient le résultat annoncé en combinant les relations (6) et (7).

Si $\mathcal{W}$ est dicritique, le Corollaire 1 implique que $\mathcal{R}' = \mathbf{S}$. L'application $\pi'_{\mathbf{S}}$ a alors pour rang 1 en chaque point et par suite $\xi'^2 = 0$. Il en résulte que : $c_1(\mathcal{T}) \frown [\mathcal{R}] - \chi(\mathcal{R}) = 3(d-2)d$. $\square$

Example. Soit C' la courbe de $\mathbb{P}'^2$ d'équation $u^3 + v^3 + w^3 = 0$. Le discriminant $\mathcal{D}$ du 3-tissu algébrique $\mathcal{W}_{C'}$ sur $\mathbb{P}^2$ defini par C' est le dual de C' et a pour équation $X^6 + Y^6 + Z^6 - 2X^3Y^3 - 2X^3Z^3 - 2Z^3Y^3 = 0$. Il a 9 points singuliers de type $(2,3)$: ce sont les points $[0,a,1], [1,0,a], [a,0,1]$ tels que $a^3 = 1$. La courbe critique $\mathcal{R}$ est définie sur **S** par l'équation $u^2Z - Xw^2 = 0$. Puisque $\pi'_{\mathcal{R}}$ est un biholomorphisme et $\chi(C') = 0$, $\chi(\mathcal{R}) = 0$. Des relations $c_1(\mathcal{O}) \frown [\mathcal{D}] = 6$ et $c_1(\mathcal{O}') \frown [C'] = 3$, on déduit $c_1(\mathcal{T}) \frown [\mathcal{R}] = 9$.

Remerciements

L'auteur remercie vivement Daniel Lehmann pour d'utiles conversations ainsi que le rapporteur pour ses suggestions.

Références

[1] A. Abouqateb, D. Lehmann, Classes caractéristiques en géométrie différentielle, Ellipses, 2010, Chapter 5.

[2] V. Cavalier, D. Lehmann, Introduction à l'étude globale des tissus sur une surface holomorphe, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 57 (4) (2007).

[3] A. Hénaut, Analytic web geometry, in: J. Grifone, E. Salem (Eds.), Web Theory and Related Topics, Toulouse, 1996, World Sci. Publishing Co., River Edge, NJ, 2001, pp. 6–47.

[4] J.V. Pereira, L. Pirio, An invitation to web geometry. From Abel's addition theorem to the algebraization of codimension one webs, in: 27° Colóquio Brasileiro de Matemática, Publicações Matemáticas do IMPA, Instituto de matemática pura e aplicada, Rio de Janeiro, 2009.

[5] J. Yartey, Number of singularities of a generic web on the complex projective plane, J. Dynam. Control Systems 11 (2) (2005).