C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 153–155

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse mathématique/Physique mathématique

Modèle électromagnétique d'objet dissimulé

Electromagnetic model of a hidden object

Jean-Baptiste Bellet [a], Gérard Berginc [b]

[a] *CMAP, École polytechnique, route de Saclay, 91128 Palaiseau cedex, France*
[b] *Thales Optronique, 2, avenue Gay-Lussac, CS 90502, 78995 Élancourt cedex, France*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 29 novembre 2010
Accepté le 5 janvier 2011
Disponible sur Internet le 19 janvier 2011

Présenté par Philippe G. Ciarlet

RÉSUMÉ

Nous élaborons un modèle de propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu, inhomogène, avec une couche rugueuse, et dissimulant un objet. Nous obtenons un milieu effectif, puis nous résolvons le problème par équations intégrales.

ABSTRACT

We model propagation of electromagnetic waves in a medium, which is inhomogeneous with a rough layer, and which hides an object. We first get an effective medium, and then we solve the problem by integral equations.

1. Introduction

Nous sommes motivés par l'imagerie laser d'un objet dans un milieu fluctuant. Ceci est adapté pour la détection d'une tumeur enfouie dans le derme, ou d'un engin explosif improvisé camouflé. Nous résolvons un problème modèle de propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu contenant un demi-espace avec des inhomogénéités, surmonté d'une couche rugueuse. La couche peut représenter la couche cornée de la peau, ou un filet de camouflage. Le demi-espace peut constituer l'intérieur de la peau, ou un milieu de camouflage. Nous nous plaçons dans un contexte bi-dimensionnel périodique. Enfin, nous considérons un cas asymptotique multi-échelles : la couche est mince par rapport à la longeur d'onde, et les inhomogénéités sont petites par rapport à la couche mince.

Ainsi, on modélise la couche supérieure par la couche mince périodique $\mathscr{D}_\xi^{\mathrm{cl}} = \{(x_1, x_2)\colon\ 0 < x_2 < \xi f(x_1/\xi)\}$, où $f > 0$ est une fonction 1-périodique, et $\xi > 0$ est un petit paramètre (par rapport à la longueur d'onde). Cette couche mince est délimitée par les interfaces $\gamma_0 = \{x_2 = 0\}$ et $\gamma_\xi = \{(x_1, \xi f(x_1/\xi)), x_1 \in \mathbb{R}\}$. La sous-couche est le demi-espace $\mathscr{D}^- = \{x_2 < 0\}$. Le milieu extérieur est $\mathscr{D}_\xi^+ = \{x_2 > \xi f(x_1/\xi)\}$. Le milieu supérieur $\mathscr{D}_\xi^+$ et la couche $\mathscr{D}_\xi^{\mathrm{cl}}$ sont homogènes. Le milieu inférieur $\mathscr{D}^-$ est un milieu ξY-périodique contenant des petites inclusions, où la cellule de référence $Y = (0, \ell_1) \times (0, \ell_2)$ $(\ell_1, \ell_2 > 0)$ contient une inhomogénéité B. Bien que la taille caractéristique de la période soit encore notée ξ dans $\mathscr{D}^-$, nous la supposons être à une échelle inférieure à la taille de la couche. Dans la cellule Y, la perméabilité et la permittivité sont respectivement : $\mu_Y(y) = \mu_B \mathbb{1}_B(y) + \mu \mathbb{1}_{Y\setminus\overline{B}}(y)$, $\varepsilon_Y(y) = \varepsilon_B \mathbb{1}_B(y) + \varepsilon \mathbb{1}_{Y\setminus\overline{B}}(y)$, où $\mu_B, \mu, \varepsilon_B, \varepsilon > 0$ sont des constantes. Dans tout le domaine $\mathbb{R}^2$, la perméabilité et la permittivité sont respectivement : $\mu_\xi(x) = \mu^+ \mathbb{1}_{\mathscr{D}_\xi^+}(x) + \mu^{\mathrm{cl}} \mathbb{1}_{\mathscr{D}_\xi^{\mathrm{cl}}}(x) + \mu_Y(x/\xi)\mathbb{1}_{\mathscr{D}^-}(x)$, $\varepsilon_\xi(x) = \varepsilon^+ \mathbb{1}_{\mathscr{D}_\xi^+}(x) + \varepsilon^{\mathrm{cl}} \mathbb{1}_{\mathscr{D}_\xi^{\mathrm{cl}}}(x) + \varepsilon_Y(x/\xi)\mathbb{1}_{\mathscr{D}^-}(x)$, où $\mu^+, \varepsilon^+ > 0$ sont des constantes et où l'on a prolongé par périodicité

Adresses e-mail : bellet@cmap.polytechnique.fr (J.-B. Bellet), gerard.berginc@fr.thalesgroup.com (G. Berginc).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2011.01.005

les coefficients dans $\mathscr{D}^-$, et $\mathbb{1}_\cdot$ est la fonction indicatrice. On illumine dans la partie supérieure du domaine par un laser, *i.e.* une onde plane $u_{\mathrm{inc}}(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^+\hat{\theta}\cdot x}$. Cette onde est de pulsation $\omega > 0$, de nombre d'onde $k^+ = \omega\sqrt{\varepsilon^+\mu^+}$, d'angle d'incidence $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ avec $\hat{\theta}_2 < 0$ et $|\hat{\theta}| = 1$. La longueur d'onde est $\lambda^+ := 2\pi/k^+$, supposée grande par rapport à la taille de la couche mince ξ. Le problème modèle consiste alors en l'étude de la propagation de l'onde résultante u_ξ dans le milieu :

$$\nabla \cdot \frac{1}{\mu_\xi}\nabla u_\xi + \omega^2\varepsilon_\xi u_\xi = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

avec en plus une condition de radiation. Cette dernière sélectionne la solution du physique du problème ; en particulier, elle veille à ce que l'onde réfléchie $u_\xi - u_{\mathrm{inc}}$ dans le milieu supérieur $\mathscr{D}_\xi^+$ et l'onde transmise u_ξ dans le milieu inférieur $\mathscr{D}^-$ soient des ondes sortantes. Enfin, une tumeur dans le derme, ou une bombe camouflée, est modélisée par une inclusion $D \subset \mathscr{D}^-$, de permittivité $\varepsilon_D > 0$ et de perméablité $\mu_D > 0$, enfouie dans la partie inférieure $\mathscr{D}^-$. On supposera que D est suffisamment en profondeur par rapport à la taille de la couche, et que D est suffisamment grande devant les inhomogénéités du milieu inférieur.

Notre problème modèle, certes simpliste, présente l'avantage d'être purement électromagnétique, et de prendre en compte la rugosité de l'interface. Il est nouveau ; pour le résoudre, nous proposons une démarche originale, en adaptant pas à pas des techniques classiques. Son caractère multi-échelles et périodique conduit à l'approcher par un modèle effectif qui lui est équivalent, par des techniques asymptotiques usuelles [2,1,5]. Par hypothèses sur l'objet D, son ajout dans le milieu périodique est équivalent à son ajout dans le milieu effectif. La solution du problème initial en présence de D est alors calculée par la méthode des équations intégrales [6,4], dans le milieu effectif.

2. Milieu effectif

Le caractère multi-échelles périodique du problème (1) suggère d'appliquer les méthodes asymptotiques usuelles. La différence d'ordre des échelles permet d'effectuer l'étude en deux temps. Tout d'abord, de façon similaire à un calcul mené dans [2], on homogénéise le milieu inférieur $\mathscr{D}^-$ en tronquant un développement à deux échelles. Puis, de façon analogue à [1,5], on élabore des conditions de transmission, de type impédance généralisée, permettant d'approcher l'effet de la couche mince. Celà s'obtient en écrivant un développement asymptotique à l'aide de correcteurs de couche limite décroissant exponentiellement. On trouve alors que la solution du problème modèle (1) peut être approchée par U solution d'un problème dans deux demi-espaces homogènes, avec des conditions de transmission à l'interface :

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu^+}\Delta U + \omega^2\varepsilon^+ U = 0, & \text{dans } \mathscr{D}^+, \\ \nabla \cdot \mathcal{A}\nabla U + \omega^2\varepsilon^- U = 0, & \text{dans } \mathscr{D}^-, \\ [U] = \psi \cdot \nabla U|_{\gamma_0^+}, & \text{sur } \gamma_0, \\ \frac{1}{\mu^+}\partial_{x_2} U|_{\gamma_0^+} - (0,1)\mathcal{A}\nabla U|_{\gamma_0^-} = \varphi_1 \cdot \partial_{x_1}(\nabla U|_{\gamma_0^+})|_{\gamma_0} + \varphi_2 \cdot (\partial^2_{x_2 x_1} U|_{\gamma_0^+}, (-k^{+2} - \partial^2_{{x_1}^2})U|_{\gamma_0^+})^T + \varphi_3 U|_{\gamma_0^+}, \\ & \text{sur } \gamma_0. \end{cases} \tag{2}$$

Les paramètres effectifs du milieu inférieur sont issus de l'homogénéisation, donnés par $\mathcal{A} = \frac{1}{|Y|}\int_Y \frac{1}{\mu_Y(y)}(\mathrm{I} - \nabla\chi(y))\,\mathrm{d}y$, et $\varepsilon^- = \frac{|B|}{|Y|}\varepsilon_B + (1 - \frac{|B|}{|Y|})\varepsilon$, où χ est la solution Y-périodique à moyenne nulle du problème de cellule $\nabla_y \cdot \frac{1}{\mu_Y(y)}\nabla_y\chi(y) = \nabla_y \cdot \frac{1}{\mu_Y(y)}\mathrm{I}$, $y \in Y$. Pour les conditions de transmission, les coefficients sont donnés par : $s = \mathcal{A}_{21}$, $\psi = \xi\psi_0$, $\varphi_2 = \xi(\frac{1}{\mu^{\mathrm{cl}}} - \frac{1}{\mu^+})\int_0^1 f(0,1)^T$, $\varphi_3 = \xi\omega^2(\varepsilon^{\mathrm{cl}} - \varepsilon^+\frac{\mu^+}{\mu^{\mathrm{cl}}})\int_0^1 f$, $\varphi_1/\xi = -s\int_{\Gamma_0}\Psi_0|_{\Gamma_0}\,\mathrm{d}\sigma + (\frac{1}{\mu^+} - \frac{1}{\mu^{\mathrm{cl}}})\int_{\Gamma_1}\nu_1\Psi_0|_{\Gamma_1}\,\mathrm{d}\sigma$, et (Ψ_0, ψ_0) est l'unique solution du problème de cellule :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{A}}\nabla\Psi_0 = (\frac{1}{\mu^{\mathrm{cl}}} - \frac{1}{\mu^+})\nu\delta_{\Gamma_1} - (\frac{1}{\mu^+} - \frac{1}{\mu^{\mathrm{cl}}})\nu\delta_{\Gamma_0}, & \text{dans } (0,1) \times \mathbb{R}, \\ y_1 \longmapsto \Psi_0(y_1, \cdot), & \text{1-périodique}, \\ \Psi_0 \longrightarrow 0, \quad y_2 \to -\infty; \qquad \Psi_0 \longrightarrow \psi_0, \quad y_2 \to +\infty, \end{cases}$$

où par remise à l'échelle $y := x/\xi$, Γ_1 et Γ_0 sont les images respectives de γ_ξ et γ_0, et $\tilde{\mathcal{A}}(y) = \mathcal{A}\mathbb{1}_{\mathscr{D}^-}(x) + \frac{1}{\mu^{\mathrm{cl}}}\mathbb{1}_{\mathscr{D}_\xi^{\mathrm{cl}}}(x) + \frac{1}{\mu_+}\mathbb{1}_{\mathscr{D}_\xi^+}(x)$.

La solution U du problème effectif (2), et la fonction de Green G associée, peuvent être calculées par analyse de Fourier tangentielle à l'interface γ_0. Pour G, ceci nécessite alors l'évaluation d'intégrales de Sommerfeld.

3. Problème modèle d'objet dissimulé

Nous avons transformé le problème modèle (1) en le problème effectif (2). Ajoutons une inclusion $D \subset \mathscr{D}^-$ dans la partie inférieure du milieu, de permittivité $\varepsilon_D > 0$ et de perméablité $\mu_D > 0$. On suppose que D est suffisamment en profondeur par rapport à la taille de la couche, et que D est grande devant les inhomogénéités du milieu inférieur. Sous ces hypothèses, l'analyse asymptotique permet, formellement, de remplacer le milieu de fond par le milieu effectif précédent. Pour résoudre ce problème, nous utilisons la méthode des équations intégrales. On note G_D la fonction de Green de l'anomalie ; on définit les potentiels de simple couche par $\mathcal{S}\varphi(x) := \int_{\partial D} G(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)$, $\mathcal{S}_D\varphi(x) := \int_{\partial D} G_D(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)$. L'ajout de D transforme U en u par convolution avec les noyaux de Green [6,3,4] :

$$u = U + \mathcal{S}\varphi \quad \text{dans } \overline{D}^c, \qquad u = \mathcal{S}_D\psi \quad \text{dans } D,$$

où $(\varphi, \psi) \in L^2(\partial D) \times L^2(\partial D)$ est solution d'un système d'équations intégrales permettant d'assurer les conditions de transmission sur ∂D. Ce dernier est résolu numériquement par la méthode des éléments finis de frontière.

Remerciements

Les auteurs remercient très chaleureusement Habib Ammari pour ses conseils et suggestions.

Références

[1] T. Abboud, H. Ammari, Diffraction at a curved grating: TM and TE cases, homogenization, Journal of Mathematical Analysis and Applications 202 (1996) 995–1026.
[2] G. Allaire, Conception optimale de structures, Springer, 2007.
[3] H. Ammari, H. Kang, Reconstruction of Small Inhomogeneities from Boundary Measurements, Springer, 2004.
[4] H. Ammari, H. Kang, Polarization and Moment Tensors with Applications to Inverse Problems and Effective Medium Theory, Springer, 2007.
[5] I. Ciuperca, M. Jai, C. Poignard, Approximate transmission conditions through a rough thin layer, the case of the periodic roughness, European Journal of Applied Mathematics.
[6] J.-C. Nédélec, Acoustic and Electromagnetic Equations, Springer, 2001.