C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 835–838

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Théorie des nombres

Sur un problème de S. Ramanujan, II

On problem by S. Ramanujan, II

Abdelhakim Smati

XLIM-UMR CNRS 6172, université de Limoges, 123, avenue Albert-Thomas, 87060 Limoges cedex, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 21 décembre 2009
Accepté le 19 juillet 2010
Disponible sur Internet le 6 août 2010

Présenté par Jean-Pierre Serre

Au Professeur Aleksandar Ivić
ce travail est dédié avec amitié et reconnaissance

RÉSUMÉ

Dans une Note publiée aux C. R. Acad. Sci. Paris en 2005 et portant le même titre, nous avons étudié le problème posé par S. Ramanujan en 1915 qui consiste à déterminer l'ordre maximum de la fonction $d(d(n))$ où $d(n)$ est la fonction nombre des diviseurs de l'entier n et nous avons amélioré les résultats connus. Dans la présente note, on résout le problème, en déterminant aux constantes près, l'ordre maximum de $d(d(n))$, ainsi que celui plus général, de la k-ième itérée de $d(n)$, $d_k(n)$, $k \geqslant 3$. Cette généralisation a été formulée et étudiée par Erdős et Kátai en 1969.

ABSTRACT

In a Note published in C. R. Acad. Sci. Paris in 2005, and having the same title, we have studied problem set by S. Ramanujan in 1915, which consists to find the maximal order of the function $d(d(n))$, where $d(n)$ is the function number of divisors of a integer n and we have improved the known results. In this note, we solve the problem by determining, to within constants, the maximal order of $d(d(n))$ as well as the more general one of the iterated k-fold of $d(n)$. This generalization was formulated and studied by Erdős and Kátai in 1969.

1. Introduction

Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. Désignons par $d(n)$ la fonction nombre des diviseurs de l'entier n et notons $d_2(n) = d(d(n))$ et pour tout entier $k \geqslant 3$, $d_k(n) = d(d_{k-1}(n))$ la k-ième itérée de $d(n)$. Notons également $\omega(n)$ le nombre des diviseurs premiers de n. Le problème de Ramanujan dont il s'agit ici, consiste à déterminer l'ordre maximun de la fonction $d(d(n))$, mais nous étudierons également sa généralisation au cas des k-ième itérées $d_k(n)$, formulée et étudiée par Erdős et Kátai [2,3,5]. Pour plus de détails sur l'historique et les résultats obtenus depuis la formulation de ces problèmes, on renvoie à [2] et aux introductions des articles [6,7]. Dans les articles [6,7], nous avons étudié ces problèmes en se basant sur le travail d'Erdős and Kátai [3], nous avons d'abord déterminé l'ordre maximum de $\omega(d(n))$ et celui de $\omega(d_{k-1}(n))$, $k \geqslant 3$, ensuite on est passé à $d(d(n))$ et $d_k(n)$ en utilisant les inégalités

$$2^{\omega(n)} \leqslant d(n) \leqslant 3e^{\omega(n)\log\log n}.$$

Cependant les majorations obtenues pour $d(d(n))$ et $d_k(n)$, bien qu'améliorant les résultats antérieurs, ne permettent pas d'aller plus loin. Cela est dû à la présence du facteur $\log\log n$ dans la majoration ci-dessus de $d(n)$. Dans cette note, on

Adresse e-mail : smati@unilim.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2010.07.018

introduit une idée qui permet d'utiliser les renseignements disponibles sur $\omega(d(n))$ et $d(d(n))$ et les analogues pour les k-ième itérées. Il s'agit, expliquons-le dans le cas de $d(d(n))$, d'écrire $d(n) = N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_{\omega(N)}^{a_{\omega(N)}}$, soit donc $d(N) = d(d(n))$. On dispose de l'ordre maximum de $\omega(N)$ et une majoration des exposants a_j de la décomposition de N en produit de facteurs premiers. Le problème revient à étudier $d(N)$, avec les renseignements sur N. La mise en oeuvre technique de cette idée utilise la méthode classique pour la détermination de l'ordre maximum de la fonction nombre des diviseurs $d(n)$ telle qu'elle est exposée dans l'ouvrage de Landau [4] et dans l'ouvrage de Chandrasekharan [1].

2. Présentation du théorème

Théorème 2.1.

1. *Soit $\epsilon > 0$ un nombre réel, fixé arbitrairement. Pour n suffisamment grand, on a*

$$d\big(d(n)\big) \leqslant e^{(1+\epsilon)9\sqrt{192}\frac{\sqrt{\log n}}{\log\log n}},$$

et il existe une infinité d'entiers n tels que

$$d\big(d(n)\big) \geqslant e^{(1-\epsilon)\log 2\frac{\sqrt{\log n}}{\log\log n}}.$$

2. *Plus généralement, pour tout nombre réel $\epsilon > 0$ arbitrairement fixé et pour tout $k \geqslant 3$, on a, pour n suffisamment grand,*

$$d_k(n) \leqslant e^{(1+\epsilon)3a_k\frac{(\log n)^{1/F_k}}{\log\log n}}$$

et il existe une infinité d'entiers n tels que

$$d_k(n) \geqslant e^{(1-\epsilon)b_k\log 2\frac{(\log n)^{1/F_k}}{\log\log n}}$$

où F_k est le k-ième terme de la suite de Fibonacci : $F_{-1} = 0$, $F_1 = 1$ et $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$; et, pour k assez grand, $a_k \approx (254{,}947785\ldots)(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k$, $b_k \approx 0{,}495266\ldots.$

Les constantes a_k et b_k et leurs approximations ont été déterminées dans [7]. Avant de présenter un lemme et la démonstration du théorème, introduisons quelques notations. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $N = d(n)$ et donc $d(N) = d(d(n))$. Posons, pour tous $\epsilon > 0$, $\epsilon' > 0$ nombres réels arbitrairement fixés,

$$\bar{S} = \left[(1+\epsilon)3\sqrt{192}\frac{\sqrt{\log n}}{\log\log n}\right], \qquad A = (1+\epsilon)\frac{1}{\sqrt{\log N}\log\log N}, \qquad B = \frac{\sqrt{\log N}}{(\log\log N)^{1+\epsilon'}}.$$

3. Lemme

Lemme 3.1.

1. *Soit $\eta > 0$ un nombre réel arbitrairement fixé. Sous les conditions*

$$a_j \geqslant (\log n)^{\frac{1}{2}+\eta}\sqrt{\log N}(\log\log N)^{\epsilon'} \quad \textit{et} \quad q_j > B \geqslant 2,$$

et pour N suffisamment grand, on a $\frac{a_j+1}{q_j^{a_jA}} \leqslant 1$.

2. *Pour $A > 0$ fixé, $q_j \geqslant 2$ et $a_j > 0$, on a $\frac{a_j+1}{q_j^{a_jA}} \leqslant \frac{1}{Ae\log 2} + 1$.*

Démonstration. 1. Soit $\beta > 0$. Il est clair que $e^{\beta t} \geqslant t + 1$, pour t suffisamment grand. On minore q_j par B et on pose $\beta = A\log B > 0$. Un calcul simple montre que pour N assez grand, l'inégalité est vérifiée pour $t \geqslant (\log n)^{\frac{1}{2}+\eta}\sqrt{\log N}(\log\log N)^{\epsilon'}$.
2. On a

$$\frac{a_j+1}{q_j^{a_jA}} \leqslant \frac{a_j}{2^{a_jA}} + 1.$$

On obtient la conclusion, en remarquant que la fonction $t \mapsto \frac{t}{2^{At}}$, $t \geqslant 0$ possède un maximum de valeur $\frac{1}{Ae\log 2}$. $\square$

4. Démonstration du théorème

Remarquons d'abord que les minorations dans le théorème ont été obtenues dans [6] et [7], nous les avons rappelées ici par commodité. On se bornera dans la suite à démontrer les majorations. On supposera dans toute la suite que N est suffisamment grand. Ecrivons la décomposition de $d(n) = N$ en produit de facteurs premiers : $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_S^{a_S}$ avec $\omega(N) = S \leqslant \bar{S}$ d'après le théorème 2.1 de [6]. On voit que tous les exposant a_j, pour $1 \leqslant j \leqslant S$ vérifient :

$$2 \leqslant a_j + 1 < d(N) = (a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_S+1) = d\big(d(n)\big) \leqslant 3e^{(1+\epsilon)3\sqrt{192}\sqrt{\log n}}.$$

La majoration de $d(d(n))$ se déduit du théorème 2.2 de [6]. On écrit $N = M_1 M_2$ où M_1 (resp. M_2) est un entier dont tous les exposants de sa factorisation en produit de facteurs premiers sont inférieurs ou égaux à $\sqrt{\log n}\sqrt{\log N}(\log\log N)^{\epsilon'}$ (resp. supérieurs ou égaux à $(\log n)^{\frac{1}{2}+\eta}\sqrt{\log N}(\log\log N)^{\epsilon'}$ où $\eta > 0$ arbitrairement fixé). On a $d(d(n)) = d(N) = d(M_1)d(M_2)$. Commençons par majorer $d(M_2)$. Ecrivons

$$M_2 = \prod_{j=1}^{S'} q_j^{a'_j}, \quad \text{avec } S' \leqslant S \leqslant \bar{S} \text{ et } a'_j \in \{a_1, a_2, \dots, a_S\},\ q_j \in \{p_1, p_2, \dots, p_S\}.$$

On a $\frac{d(M_2)}{M_2^A} = \prod_{j=1}^{S'} \frac{a'_j+1}{q_j^{a'_j A}} = \prod_{1\leqslant j\leqslant S', q_j\leqslant B} \frac{a'_j+1}{q_j^{a'_j A}} \prod_{1\leqslant j\leqslant S', q_j > B} \frac{a'_j+1}{q_j^{a'_j A}} =: P_1 P_2$. Le point 1 du le lemme 3.1 montre que $P_2 \leqslant 1$ et le point 2 montre que $\frac{a'_j+1}{q_j^{a'_j A}} \leqslant \frac{1}{Ae\log 2} + 1$ et par suite, en notant $\pi(B)$ le nombre des nombres premiers inférieurs ou égaux à B,

$$\log P_1 \leqslant \log\left(\frac{1}{Ae\log 2} + 1\right)\pi(B) \sim \frac{1}{2}\log\log N \frac{2\sqrt{\log N}}{(\log\log N)^{2+\epsilon}} = o\left(\frac{\sqrt{\log N}}{\log\log N}\right)$$

par application du théorème des nombres premiers. Il s'ensuit que

$$\log d(M_2) \leqslant A\log N + \log P_1 \leqslant (1+2\epsilon)\frac{\sqrt{\log N}}{\log\log N} \leqslant (1+2\epsilon)\frac{\sqrt{\log n}}{\log\log n}$$

puisque $M_2 \leqslant N = d(n) \leqslant n$. Majorons maintenant $d(M_1)$. Ecrivons

$$M_1 = \prod_{j=1}^{S''} r_j^{a''_j}, \quad \text{avec } S'' \leqslant S \leqslant \bar{S} \text{ et } a''_j \in \{a_1, a_2, \dots, a_S\},\ r_j \in \{p_1, p_2, \dots, p_S\}.$$

On a $\frac{d(M_1)}{M_1^A} = \prod_{j=1}^{S''} \frac{a''_j+1}{r_j^{a''_j A}} := P'$. Le point 2 du lemme 3.1 donne comme précédemment, en notant que $S'' \leqslant \bar{S}$,

$$\log P' \leqslant \log\left(\frac{1}{Ae\log 2} + 1\right)\pi(\bar{S}) \sim \frac{1}{2}\log\log N \frac{(1+\epsilon)6\sqrt{192}\sqrt{\log n}}{(\log\log n)^2} \leqslant (1+\epsilon)3\sqrt{192}\frac{\sqrt{\log n}}{\log\log n}.$$

Finalement, on obtient $\log d(M_1) \leqslant A\log N + \log P' \leqslant (1+\epsilon)6\sqrt{192}\frac{\sqrt{\log n}}{\log\log n}$ puisque $M_1 \leqslant N$. En définitive, on a obtenu $\log d(d(n)) = \log d(N) \leqslant (1+2\epsilon)9\sqrt{192}\frac{\sqrt{\log n}}{\log\log n}$.

Le cas général s'obtient, mutatis mutandis, de la démonstration ci-dessus. Pour $k \geqslant 3$, on écrit $d_{k-1}(n) = N_k$ et donc $d_k(n) = d(N_k)$. On pose, pour tous $\epsilon > 0$, $\epsilon' > 0$ nombres réels arbitrairement fixés et F_k le k-ième terme de la suite de Fibonacci,

$$\bar{S}_k = \left[(1+\epsilon)a_k\frac{(\log n)^{1/F_k}}{\log\log n}\right], \qquad A_k = (1+\epsilon)\frac{1}{(\log N_k)^{1-(1/F_k)}\log\log N_k}, \qquad B_k = \frac{(\log N_k)^{1/F_k}}{(\log\log N_k)^{1+\epsilon'}}.$$

On a $\omega(N_k) = S_k \leqslant \bar{S}_k$ par le théorème 1.1 de [7]. On écrit $N_k = M_{1,k}M_{2,k}$ où les exposants a'_j de $M_{1,k}$ vérifient : $a'_j \leqslant (\log n)^{1/F_k}(\log N_k)^{1-1/F_k}(\log\log N_k)^{\epsilon'}$ et ceux de $M_{2,k}$, a'_j vérifient, pour $\delta > 0$: $a'_j \geqslant (\log n)^{1/F_k+\delta}(\log N_k)^{1/F_k}(\log\log N_k)^{\epsilon'}$. Le reste fonctionne de la même façon.

Références

[1] K. Chandrasekharan, Arithmetical Functions, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1970.

[2] P. Erdős, Ramanujan and I, in: K. Alladi (Ed.), Number Theory, Madras, Proc. of the International Ramanujan Centenary Conference, Anna University, Madras, India, 1987, in: Lecture Notes in Mathematics, vol. 1395, Springer-Verlag, 1989, pp. 1–20.

[3] P. Erdős, I. Kátai, On the growth of $d_k(n)$, Fibonacci Quart. 7 (1969) 267–274.

[4] E. Landau, Primzahlen, third edition, Chelsea, 1974.
[5] S. Ramanujan, Collected Papers, second edition, Chelsea, 1962.
[6] A. Smati, Sur un problème de S. Ramanujan, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 1–4.
[7] A. Smati, Sur un problème d'Erdős et Kátai, Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp. 29 (2008) 213–238.