C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 735–738

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Algèbres de Lie

La conjecture de Duflo pour les groupes résolubles exponentiels

Duflo conjecture for solvable Lie groups

Sami Kouki [a,b]

[a] *Faculté des sciences de Tunis, campus universitaire, 1060 Tunis, Tunisie*
[b] *UMR CNRS 6086, LMA, BP 30179, 86962 Chasseneuil cedex, France*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 24 juin 2010
Accepté le 1er juillet 2010
Disponible sur Internet le 17 juillet 2010

Présenté par Michel Duflo

RÉSUMÉ

Soient G un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et π une représentation irréductible et unitaire de G, de carré intégrable (modulo le centre) associée à une G-orbite Ω par l'application de Kirillov–Bernat (Auslander and Moore, 1966 ; Bernat et al., 1972 [1,2]). Soient H un sous-groupe fermé connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ et $p : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ l'application restriction. Dans le cas où la restriction de la représentation π au sous-groupe H se décompose discrètement et avec multiplicités finies en représentations irréductibles, on dit que la série discrète en question est *H-admissible*. Nous allons démontrer la conjecture suivante due à Duflo : La représentation π est H-admissible si et seulement si la restriction de l'application p à Ω est propre sur son image. Dans le cas d'espèce, ces deux conditions sont équivalentes à $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{z}$, où $\mathfrak{z}$ est le centre de $\mathfrak{g}$.[1]

ABSTRACT

Let G be an exponential solvable Lie group, $\mathfrak{g}$ its Lie algebra and π a unitary irreducible representation of G which is square integrable modulo the center, associated by the Kirillov–Bernat map (Auslander and Moore, 1966; Bernat et al., 1972 [1,2]) to a G-orbit Ω. Let H be a closed connected subgroup of G with Lie algebra $\mathfrak{h}$ and $p : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ the restriction map. We say that the representation π is *H-admissible* if its restriction to the subgroup H splits in irreducible representations with finite multiplicities. We shall prove the following conjecture due to Duflo: The representation π is H-admissible, if and only if, the restriction of p to Ω is proper on the range $p(\Omega)$. In the case at hand, these two conditions are equivalent to $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{z}$, where $\mathfrak{z}$ is the center of $\mathfrak{g}$.

1. Définitions – préliminaires

Soient G un groupe localement compact et Z un sous-groupe fermé du centre de G. Etant donnée π une représentation de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, les coefficients de π sont les fonctions $c_{\varphi_1,\varphi_2} : x \mapsto (\varphi_1 \mid \pi(x)\varphi_2)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}$.

Adresse e-mail : sami.kouki@math.univ-poitiers.fr.
[1] Ce travail a bénéficié du soutien financier de l'action intégrée Franco–Tunisienne du Ministère des Affaires Etrangères et Européennes français et du Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Technologie tunisien.

1631-073X/$ – see front matter © 2010 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.
doi:10.1016/j.crma.2010.07.001

Définition 1.1. On dit qu'une représentation unitaire irréductible π de G est de carré intégrable modulo Z, s'il existe $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}$ non nuls tels que, pour une mesure de Haar invariante à gauche sur G/Z, le coefficient c_{φ_1,φ_2} associé soit de carré intégrable modulo Z.

Soit χ un caractère de Z. On désigne par $L^2(G,\chi)$ l'espace des fonctions mesurables φ sur G, vérifiant : (i) $\varphi(xz) = \chi(z)^{-1}\varphi(x)$, pour tout $x \in G$ et $z \in Z$ et (ii) φ est de carré intégrable modulo Z. On note λ_χ la représentation régulière gauche de G dans $L^2(G,\chi)$: Si φ est dans $L^2(G,\chi)$ et x, y sont dans G, alors $(\lambda_\chi(x)\varphi)(y) = \varphi(x^{-1}y)$. On note $\widehat{G}_\chi$ l'espace des classes de représentations unitaires irréductibles de G dont la restriction à Z est un multiple de χ. Soit $\pi \in \widehat{G}_\chi$, d'après Duflo et Raïs [3, Lemme 5.3.2], la représentation π intervient discrètement dans la représentation régulière gauche λ_χ (i.e. π est isomorphe à une sous-représentation de λ_χ) si et seulement si elle possède un coefficient non nul c_{φ_1,φ_2} de carré intégrable modulo Z. On a donc la définition (équivalente) suivante :

Définition 1.2. Soient Z un sous-groupe fermé du centre de G et χ un caractère de Z. La représentation $\pi \in \widehat{G}_\chi$ est de carré intégrable modulo Z si elle intervient discrètement dans la représentation λ_χ.

Soit G un groupe localement compact séparable de centre Z_G. Soit H un sous-groupe fermé de G, et tel que le groupe $Z_G H$ soit fermé dans G. Soit χ un caractère unitaire de Z_G. Notons Z_H le centre de H, $\tilde{Z}_H = H \cap Z_G$, ψ la restriction de χ à $\tilde{Z}_H$. On a :

Proposition 1.3. *La restriction de λ_χ à H est un multiple de λ_ψ. La multiplicité est égale au cardinal de $G/Z_G H$ si celui-ci est fini, et infinie sinon.*

Démonstration. Le groupe G étant séparable et $Z_G H$ fermé, d'après Mackey [5, Lemme 1.1] il existe une section borélienne $\mathcal{X}$ de $Z_G H \setminus G$ dans G permettant d'identifier $\mathcal{X}$ et $Z_G H \setminus G$ comme espaces boréliens. Notons $\mathrm{d}_r(g)$ (resp. $\mathrm{d}_r(h)$) la mesure de Haar à droite sur G/Z_G (resp. sur $H/Z_G \cap H$) et ρ_H une ρ-fonction dans $C(G)$ [7, Appendice 1] vérifiant $\rho_H(\xi g) = \frac{\Delta_H(\xi)}{\Delta_G(\xi)}\rho_H(g)$, $\xi \in H/Z_G \cap H$, $g \in G/Z_G$. On note $\mathrm{d}g$ (resp. $\mathrm{d}h$) la mesure de Haar à gauche de G/Z_G (resp. de $H/Z_G \cap H$) telle que $\mathrm{d}g = \Delta_G(g)^{-1}\,\mathrm{d}_r g$ (resp. $\mathrm{d}h = \Delta_H(h)^{-1}\,\mathrm{d}_r h$). Soit μ_H la mesure quasi-invariante sur $Z_G H \setminus G = \mathcal{X}$ telle que $\int_{G/Z_G} f(g)\rho_H(g)\,\mathrm{d}_r(g) = \int_{Z_G H\setminus G} \mathrm{d}\mu_H(g) \int_{H/Z_G\cap H} f(\xi g)\,\mathrm{d}_r(\xi)$, $f \in C_c(G/Z_G)$ $(*)$. En utilisant la formule $(*)$ On a : $\int_{G/Z_G} \varphi(g)\,\mathrm{d}g = \int_{G/Z_G} \varphi(g)\Delta(g)^{-1}\,\mathrm{d}_r(g) = \int_{\mathcal{X}} \Delta_G(x)\,\mathrm{d}\mu_H(x) \int_{H/Z_G\cap H} \varphi(hg)\,\mathrm{d}h$, $\varphi \in \mathcal{C}_c(G/Z_G)$. En raisonnant comme dans [6, Proposition 3], on peut écrire $G/Z_G = \mathcal{X} \times H/Z_G \cap H$ de sorte que $\mathrm{d}g = \Delta_G(x)\,\mathrm{d}\mu_H(x)\,\mathrm{d}h$. Ainsi, $L^2(G/Z_G) = L^2(\mathcal{X}) \otimes L^2(H/Z_G \cap H)$, de sorte que la restriction de λ_χ à $Z_G H$ est égale à $\dim(L^2(\mathcal{X}))\lambda_\psi$. $\square$

On a donc la proposition suivante :

Proposition 1.4. *Supposons que π est une représentation de G de carré intégrable modulo Z_G. Soit σ une représentation unitaire irréductible de H isomorphe à une sous-représentation de la restriction de π à H. Alors σ est de carré intégrable modulo $\tilde{Z}_H$.*

Démonstration. La représentation π étant de carré intégrable modulo Z_G, π est isomorphe à une sous-représentation de λ_χ pour un certain caractère χ de Z_G. D'après la Proposition 1.3, $(\lambda_\chi)|_H$ est un multiple de λ_ψ ; ainsi σ est isomorphe à une sous-représentation de λ_ψ, donc de carré intégrable modulo $\tilde{Z}_H$. $\square$

Corollaire 1.5. *Supposons qu'il existe π et σ comme dans la Proposition* 1.4. *Alors $Z_H/\tilde{Z}_H$ est compact.*

Dans la suite, G désigne un groupe résoluble exponentiel de centre Z_G, et H un sous-groupe fermé connexe de G. Soit χ un caractère unitaire de Z_G et ψ la restriction de χ à $\tilde{Z}_H$. Nous noterons $i\mu$ ($\mu \in \mathfrak{z}_\mathfrak{g}^*$) le caractère infinitésimal de χ, $i\nu$ ($\nu \in \tilde{\mathfrak{z}}_\mathfrak{h}^*$) celui de ψ, et $\mathfrak{h}_\nu^*$ l'espace affine $\mathfrak{h}_\nu^* := \{h \in \mathfrak{h}^*,\ h|_{\mathfrak{z}_\mathfrak{g}\cap\mathfrak{h}} = \nu\}$. Supposons qu'il existe π et σ comme dans la Proposition 1.4. Le corollaire nous dit que $Z_H = H \cap Z_G$, et que λ_ψ contient une sous-représentation irréductible. D'après Duflo et Raïs [3], λ_ψ est somme directe de représentations irréductibles associées à des orbites ouvertes dans $\mathfrak{h}_\nu^*$, et donc $\pi|_H$ est somme directe de représentations irréductibles. On a donc le résultat suivant :

Proposition 1.6. *Supposons que la représentation π est de carré intégrable modulo Z_G. Alors $\pi|_H$ contient une sous-représentation irréductible si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées.*

(i) $Z_H = H \cap Z_G$.
(ii) *H a au moins une orbite ouverte dans $\mathfrak{h}_\nu^*$.*

Dans ce cas, $\pi|_H$ est somme directe de représentations irréductibles de carré intégrable modulo Z_H.

Soient $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ l'orbite associée à π, $\omega \subset \mathfrak{h}^*$ une orbite coadjointe, et σ la représentation unitaire irréductible de H associée à ω. Soit β_Ω une mesure positive finie sur Ω équivalente à la mesure de Liouville. Notons $p : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ l'application restriction. D'après Fujiwara [4, Th. 1], σ est isomorphe à une sous-représentation de la restriction de π à H si et seulement si $p^{-1}(\omega) \cap \Omega$ est de mesure non nulle pour β_Ω ; puisque p est H-invariant, cela signifie que ω est contenu dans $p(\Omega)$. Ainsi, dans la situation de la Proposition 1.6, les représentations de H qui interviennent sont paramétrées par les H-orbites ouvertes contenues dans $p(\Omega)$. Elle sont en nombre fini [3, Th. 5.3.8], mais il peut arriver qu'il y en ait plus d'une.

Exemple 1. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de base t, x, y, z dont les relations de commutations sont données par : $[t, x] = x$, $[t, z] = z$ et $[x, y] = z$. Les autres crochets sont nuls ou obtenus par symétrie. Notons $G = \exp \mathfrak{g}$. Soit $g = z^*$, l'orbite $\Omega := Gg$ est l'ouvert $z > 0$ de $\mathfrak{g}^*$. Notons π la représentation de G correspondante. Soient $\mathfrak{h} = \mathbb{R}t \oplus \mathbb{R}x$, et $H = \exp \mathfrak{h}$. On a $p(\Omega) = \mathfrak{h}^*$. Cet ensemble contient deux H-orbites ouvertes ω_1 et ω_2 (l'ouvert $x > 0$ et l'ouvert $x < 0$). On note σ_1 et σ_2 les deux représentations de H correspondantes. Alors les conditions de la Proposition 1.6 sont vérifiées et $\pi|_H$ est isomorphe à la somme dénombrable de copies de $\sigma_1 \oplus \sigma_2$.

En effet, notons $\mathfrak{b}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ engendrée par y et z. C'est une polarisation en g qui vérifie la condition de Pukanszky. Si on note χ_g le caractère de B de différentielle $ig|_{\mathfrak{b}}$, alors la représentation π est isomorphe à $Ind_B^G(\chi_g)$. D'après [2, Ch. I], $\{t, x\}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$, d'où $G = HB$ et la représentation π peut être réalisée dans l'espace de Hilbert $L^2(H)$; $\pi_{|H}$ étant définie par $(\pi(a)\varphi)(b) = \varphi(a^{-1}b)$ pour tout $\varphi \in L^2(H)$, $a \in H$ et $b \in H$. La restriction de π à H n'est autre que la représentation régulière gauche de H, et donc, d'après Duflo et Raïs [3], $\pi|_H$ est isomorphe à la somme dénombrable de copies de $\sigma_1 \oplus \sigma_2$. (Je remercie M. Duflo qui m'a communiqué cet exemple.)

2. La conjecture de Duflo

Soit G un groupe de Lie de centre Z et H un sous-groupe fermé de G. Soit π une représentation irréductible unitaire de G de carré intégrable modulo Z.

Définition 2.1. On dit que la représentation π est H-admissible si la restriction de π à H se décompose discrètement et avec multiplicités finies en représentations irréductibles.

Dans la suite, G est un groupe résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, Z le centre de G et H un sous-groupe fermé connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Soit Ω une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$, π l'élément de $\widehat{G}$ associé à Ω, $g \in \Omega$ et $G(g)$ le stabilisateur de g dans G. D'après Duflo et Raïs [3, Th. 5.3.4], la représentation π est de carré intégrable modulo le centre Z de G si et seulement si $G(g) = Z$.

Dans ce paragraphe, nous allons tester la conjecture de Duflo pour une telle représentation. Le résultat principal de ce manuscrit se résume dans le théorème suivant.

Théorème 2.2. *Soient G un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et π une représentation irréductible et unitaire de carré intégrable (modulo le centre) de G associée à une G-orbite Ω. Soient H un sous-groupe fermé connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ et $p : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ l'application restriction. La représentation π est H-admissible si et seulement si la restriction de l'application p à Ω est propre sur son image. De plus, dans ce cas, la restriction de π à H est irréductible.*

Avant de démontrer le Théorème 2.2, nous allons énoncer le lemme suivant qui donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'application p soit propre.

Lemme 2.3. *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ et $p : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ l'application restriction. Alors, l'application p est propre de $\Omega := Gg$ sur son image si et seulement si $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{z}$.*

Démonstration. Pour une sous-algèbre $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{g}$, on note $\mathfrak{k}^\perp_{\mathfrak{g}^*}$ l'orthogonal de $\mathfrak{k}$ pour la forme bilinéaire canonique $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$. Comme $G(g) = Z$, Gg est un ouvert de $g + \mathfrak{z}^\perp_{\mathfrak{g}^*}$. Notons $h = g|_{\mathfrak{h}}$. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{z}$, l'application $p : Gg \to Hh$ est un difféomorphisme, et donc propre.

Dans le cas où $\mathfrak{h} + \mathfrak{z} \neq \mathfrak{g}$, on note V un sous espace supplémentaire de $\mathfrak{h} + \mathfrak{z}$ dans $\mathfrak{g}$, alors $p^{-1}(\{h\}) = g + V^*$ (on considère V^* comme un sous espace de $\mathfrak{g}^*$ formé des formes linéaires nulles sur $\mathfrak{h} + \mathfrak{z}$). Pour conclure, il suffit de remarquer que $Gg \cap p^{-1}(\{h\})$ est un ouvert non vide de $g + V^*$, et donc non compact. □

Démonstration du Théorème 2.2. Supposons tout d'abord que p est propre. D'après le Lemme 2.3 on a : $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{z}$. Il est donc immédiat que $\pi|_H$ est irréductible. Ainsi, la représentation π est H-admissible.

Inversement, supposons la représentation π H-admissible. D'après la Proposition 1.6, la restriction de π à H est somme directe de représentations irréductibles de carré intégrable modulo Z_H. Ces représentations sont en nombre fini, et sont paramétrées par les H-orbites ouvertes contenues dans $\mathfrak{h}^*_\nu$. Ainsi $\pi|_H = \sum_{j=1}^n m(\sigma_j)\sigma_j$, où $m(\sigma_j)$ désigne la multiplicité de σ_j. Si on note ω_j la H-orbite correspondant à σ_j, d'après Fujiwara [4, Théorème 1], $m(\sigma_j)$ est le nombre de H-orbites contenues dans $p^{-1}(\omega_j) \cap \Omega$. Soit σ une représentation dans $\widehat{H}$ isomorphe à une sous-représentation de $\pi|_H$ associée à une H-orbite ω ; π étant H-admissible, $p^{-1}(\omega) \cap \Omega$ est une réunion finie de H-orbites. Ainsi, d'après le théorème de Sard, il existe une forme linéaire $f \in p^{-1}(\omega) \cap \Omega$ telle que l'orbite Hf soit ouverte dans $g + \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}^*}^{\perp}$. Par conséquent, l'espace tangent $\mathfrak{h}f$ à Hf au point f est égal à l'espace tangent $\mathfrak{g}f$ à $p^{-1}(\omega) \cap \Omega$ en f. Ainsi $Hf = Gf$. Puisque $f \in \Omega$, alors $G(f) = Z$ ce qui entraîne $G = ZH$, soit encore $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{z}$, et le Lemme 2.3 nous permet de conclure que p est propre. De plus, p est une bijection de Ω sur ω, et σ est la restriction de π à H. $\square$

Références

[1] L. Auslander, C.C. Moore, Unitary representations of solvable Lie groups, Mem. Amer. Math. Soc. 62 (1966) 199.

[2] P. Bernat, N. Conze, M. Duflo, M. Lévy-Nahas, M. Raïs, P. Renouard, M. Vergne, Représentations des groupes de Lie résolubles, Monographies de la Société Mathématique de France, vol. 4, Dunod, Paris, 1972.

[3] M. Duflo, M. Raïs, Sur l'analyse harmonique sur les groupes de Lie résolubles, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 9 (1) (1976) 107–144.

[4] H. Fujiwara, Sur les restrictions des représentations unitaires des groupes de Lie résolubles exponentiels, Invent. Math. 104 (3) (1991) 647–654.

[5] G.W. Mackey, Induced representations of locally compact groups. I, Ann. of Math. (2) 55 (1952) 101–139.

[6] J. Vargas, Restrictions of some unitary representations of SU(n, 1) to U($n-1$, 1), J. of Funct. Anal. 103 (2) (1992) 352–371.

[7] G. Warner, Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups. I, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 188, Springer-Verlag, New York, 1972.