C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 41–46

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Équations aux dérivées partielles/Géométrie différentielle

Equations hessiennes complexes sur des variétés kählériennes compactes

Complex Hessian equations on some compact Kähler manifolds

Asma Jbilou

Laboratoire Jean-Alexandre-Dieudonné, université de Nice Sophia-Antipolis, parc Valrose 06108 Nice cedex 2, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 10 octobre 2009
Accepté le 19 novembre 2009
Disponible sur Internet le 29 décembre 2009

Présenté par Gilles Lebeau

RÉSUMÉ

Sur une variété kählérienne compacte connexe de dimension $2m$, ω étant la forme de Kähler, Ω une forme volume donnée dans $[\omega]^m$ et k un entier $1 < k < m$, on cherche à résoudre de façon unique dans $[\omega]$ l'équation $\tilde{\omega}^k \wedge \omega^{m-k} = \Omega$ en utilisant une notion de k-positivité pour $\tilde{\omega} \in [\omega]$ (les cas extrêmes sont résolus : $k = m$ par Yau, $k = 1$ trivialement). Nous résolvons par la méthode de continuité l'équation hessienne d'ordre k complexe elliptique correspondante sous l'hypothèse que la variété est à courbure bisectionnelle holomorphe non-négative, ici requise seulement pour établir un pincement a priori de valeurs propres.

ABSTRACT

On a compact connected $2m$-dimensional Kähler manifold with Kähler form ω, given a volume form $\Omega \in [\omega]^m$ and an integer $1 < k < m$, we want to solve uniquely in $[\omega]$ the equation $\tilde{\omega}^k \wedge \omega^{m-k} = \Omega$, relying on the notion of k-positivity for $\tilde{\omega} \in [\omega]$ (the extreme cases are solved: $k = m$ by Yau, $k = 1$ trivially). We solve by the continuity method the corresponding complex elliptic k-th Hessian equation under the assumption that the holomorphic bisectional curvature of the manifold is non-negative, required here only to derive an a priori eigenvalues pinching.

Abridged English version

Let (M, J, g, ω) be a compact connected Kähler manifold of complex dimension $m \geqslant 3$. Fix an integer $2 \leqslant k \leqslant m-1$. Let $\varphi : M \to \mathbb{R}$ be a smooth function and let us consider the $(1,1)$-form $\tilde{\omega} = \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$ and the associated 2-tensor $\tilde{g}$ defined by $\tilde{g}(X, Y) = \tilde{\omega}(X, JY)$ for all $X, Y \in TM$. Consider the symmetric sesquilinear forms h and $\tilde{h}$ on $T^{1,0}$ defined by: $h(U, V) = g(U, \overline{V})$, $\tilde{h}(U, V) = \tilde{g}(U, \overline{V})$ for all $U, V \in T^{1,0}$. We denote by $\lambda(g^{-1}\tilde{g})$ the eigenvalues of the sesquilinear form $\tilde{h}$ with respect to the hermitian form h: $\lambda(g^{-1}\tilde{g}) \in \mathbb{R}^m$. Let us consider the cone $\Gamma_k = \{\lambda \in \mathbb{R}^m / \forall 1 \leqslant j \leqslant k,\ \sigma_j(\lambda) > 0\}$, where σ_j denotes the j-th elementary symmetric function. We call φ (resp. $\tilde{\omega}$) k-admissible (resp. k-positive) if $\lambda(g^{-1}\tilde{g}) \in \Gamma_k$. In this article, we prove the following theorem, focussing on the C^2 a priori estimate:

Adresse e-mail : jbilou@math.unice.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.11.011

Theorem 0.1. *(See [13].) Let (M, J, g, ω) be a compact connected Kähler manifold of complex dimension $m \geqslant 3$ with non-negative holomorphic bisectional curvature, and let $f : M \to \mathbb{R}$ be a function of class C^∞ satisfying $\int_M e^f \omega^m = \binom{m}{k} \int_M \omega^m$. There exists a unique function $\varphi : M \to \mathbb{R}$ of class C^∞ such that*:

(i) $\int_M \varphi \omega^m = 0$;
(ii) $\tilde{\omega}^k \wedge \omega^{m-k} = \frac{e^f}{\binom{m}{k}} \omega^m \qquad (E_k)$.

Moreover the solution φ is k-admissible.

The curvature assumption is used, in Section 2.1 only, for an a priori estimate on $\lambda(g^{-1}\tilde{g})$ as in [1, p. 408], and it should be removed (as Aubin did for the case $k = m$ (Calabi–Yau equation) in [2] and Yau in [18]). For the analogue of (E_k) on $\mathbb{C}^m$, the Dirichlet problem is solved in [15,17] (using the landmark paper [7]) and a Bedford–Taylor type theory, for weak solutions of the corresponding degenerate equations, is adressed in [5].

Thanks to Julien Keller, we have just learned of an independent work [12] aiming at the same result as ours, with a different gradient estimate and a similar method to estimate $\lambda(g^{-1}\tilde{g})$, but no proofs given for the C^0 and the C^2 estimates.

1. Introduction

Soit (M, J, g, ω) une variété kählérienne compacte connexe de dimension complexe $m \geqslant 3$. On fixe un entier $2 \leqslant k \leqslant m-1$. Soit $\varphi : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse, on considère la $(1,1)$-forme $\tilde{\omega} = \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$ et le 2-tenseur associé $\tilde{g}$ défini par $\tilde{g}(X, Y) = \tilde{\omega}(X, JY)$ pour tout $X, Y \in TM$. Considérons les formes sequilinéaires à symétrie hermitienne h et $\tilde{h}$ sur $T^{1,0}$ définies par : $h(U, V) = g(U, \overline{V})$ et $\tilde{h}(U, V) = \tilde{g}(U, \overline{V})$ pour tout $U, V \in T^{1,0}$. On désigne par $\lambda(g^{-1}\tilde{g})$ le vecteur des valeurs propres de $\tilde{h}$ relativement à la forme hermitienne h : $\lambda(g^{-1}\tilde{g}) \in \mathbb{R}^m$. On considère le cône $\Gamma_k = \{\lambda \in \mathbb{R}^m / \forall 1 \leqslant j \leqslant k, \sigma_j(\lambda) > 0\}$, où σ_j désigne la j-ème fonction symétrique élémentaire. On dit que φ (resp. $\tilde{\omega}$) est k-admissible (resp. k-positive) si $\lambda(g^{-1}\tilde{g}) \in \Gamma_k$. Notre résultat est le suivant :

Théorème 1.1. *(Voir [13].) Soit (M, J, g, ω) une variété kählérienne compacte connexe de dimension complexe $m \geqslant 3$ à courbure bisectionnelle holomorphe positive ou nulle, et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que $\int_M e^f \omega^m = \binom{m}{k} \int_M \omega^m$. Il existe une unique fonction $\varphi : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que* :

(i) $\int_M \varphi \omega^m = 0$;
(ii) $\tilde{\omega}^k \wedge \omega^{m-k} = \frac{e^f}{\binom{m}{k}} \omega^m \qquad (E_k)$.

En outre la solution φ est k-admissible.

L'hypothèse de courbure intervient seulement Section 2.1 dans l'estimation a priori sur $\lambda(g^{-1}\tilde{g})$, comme elle le faisait dans la première résolution de la conjecture de Calabi [1, p. 408] et il faudrait la lever si possible (comme Aubin l'a fait avec $k = m$ (équation de Calabi–Yau) dans [2] et Yau dans [18]).

Le problème de Dirichlet posé dans un ouvert borné convenable de $\mathbb{C}^m$ a été résolu pour l'analogue de (E_k) [15,17] (en utilisant l'article fondamental [7]) et dans ce cadre, une théorie des solutions faibles des équations dégénérées correspondantes, parallèle à celle de Bedford–Taylor pour l'équation de Monge–Ampère complexe, est abordée dans [5].

Grâce à Julien Keller, que nous remercions, nous venons de prendre connaissance d'un travail indépendant [12] visant au même résultat que le nôtre, avec une estimation de gradient différente et une estimation sur $\lambda(g^{-1}\tilde{g})$ similaire, mais sans preuves données pour les estimées C^0 et C^2.

On montre d'abord que (E_k) s'écrit : $\sigma_k\lambda([\delta_i^j + g^{j\bar{l}}\partial_{i\bar{l}}\varphi]_{1\leqslant i,j\leqslant m}) = e^f$, et sous cette forme, les inégalités de Maclaurin [16] entraînent que la k-admissibilité d'une solution φ (triviale près de son point de minimum) s'étend nécessairement à toute la variété (ici l'argument de parallélisme de [12] est hors-propos, d'ailleurs $\tilde{\omega}$ n'est parallèle que si $\varphi = 0$). L'équation (E_k) est donc (une EDP non linéaire du second ordre) de type elliptique.

On prouve l'unicité en notant d'abord qu'au voisinage du minimum de la différence φ entre deux solutions, le segment entier entre celles-ci reste k-admissible. Sur un tel voisinage, on peut donc appliquer le principe du maximum de Hopf [3, p. 97] et conclure que φ y est constante. Par connexité, φ reste constante sur M, et la constante est nulle à cause de la contrainte intégrale du théorème.

Posons $F_k := \ln\sigma_k\lambda$, fixons un entier $l \geqslant 5$ et un réel $0 < \alpha < 1$, et considérons l'opérateur

$$\mathcal{F}_k[\varphi] = F_k\big(\big[\delta_i^j + g^{j\bar{l}}\partial_{i\bar{l}}\varphi\big]_{1\leqslant i,j\leqslant m}\big)$$

défini sur $S_{l,\alpha} = \{\varphi \in C^{l,\alpha}(M), k\text{-admissible} \int_M \varphi\omega^m = 0\}$ à valeurs dans $Z_{l-2,\alpha} = \{f \in C^{l-2,\alpha}(M), \int_M e^f \omega^m = \binom{m}{k} \int_M \omega^m\}$.

On prouve l'existence par la méthode de continuité en considérant, pour $t \in [0,1]$, la famille à un paramètre d'équations :

$$\mathcal{F}_k[\varphi_t] = tf + \ln\underbrace{\left(\frac{\binom{m}{k}\int_M \omega^m}{\int_M e^{tf}\omega^m}\right)}_{A_t} \qquad (E_{k,t})$$

La fonction $\varphi_0 \equiv 0$ est solution k-admissible de $(E_{k,0})$ et pour $t = 1$, on obtient l'équation (E_k). On considère l'ensemble non vide : $\mathcal{T} := \{t \in [0,1] / \exists \varphi \in S_{l,\alpha}$ solution de $E_{k,t}\}$. On veut montrer que $\mathcal{T} = [0,1]$, en raisonnant par connexité dans $[0,1]$. La propriété $\mathcal{T}$ est ouvert découle du théorème d'inversion locale car si $t \in \mathcal{T}$, l'opérateur linéarisé $d\mathcal{F}_k[\varphi_t]$ est un isomorphisme de $T_{\varphi_t}S_{l,\alpha}$ dans $T_{\mathcal{F}_k[\varphi_t]}Z_{l-2,\alpha}$. La propriété $\mathcal{T}$ est fermé, plus difficile et objet de cette Note, découle des estimées a priori. Soient $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ qui converge vers $\tau \in [0,1]$, et $(\varphi_{t_i})_{i\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions correspondante. Voici le schéma de la preuve (pour les détails, voir [13]) :

(i) Réduction à une estimée $C^{2,\beta}(M)$: si $(\varphi_{t_i})_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée dans un $C^{2,\beta}(M)$ avec $0 < \beta < 1$, l'inclusion $C^{2,\beta}(M) \subset C^2(M,\mathbb{R})$ étant compacte, on déduit que quitte à extraire $(\varphi_{t_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge dans $C^2(M,\mathbb{R})$ vers $\varphi_\tau \in C^2(M,\mathbb{R})$. On montre par passage à la limite que φ_τ est une solution de $(E_{k,\tau})$ (elle est donc k-admissible), d'intégrale nulle pour g. On montre finalement par un théorème de régularité que $\varphi_\tau \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ (cf. [4, p. 467]). Ce qui nous permet de déduire que $\tau \in \mathcal{T}$.
(ii) On montre que $(\varphi_{t_i})_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^0(M,\mathbb{R})$: on démontre tout d'abord un lemme de positivité pour l'équation $(E_{k,t})$, inspiré de celui de [8, p. 843] (où $k = m$), mais avec une preuve nouvelle, requise car la k-positivité de $\tilde{\omega}_{t_i}$ est plus faible avec $k < m$, en utilisant une méthode de polarisation de [5, p. 1740] et l'inégalité de Gårding [9] ; on déduit de ce lemme une inégalité fondamentale à l'instar de la Proposition 7.18 de [3, p. 262] ; la suite de la preuve se poursuit par la méthode d'itération à la Moser exactement comme pour l'équation de Calabi–Yau [3]. On note C_0 la constante de l'estimée a priori C^0 obtenue.
(iii) On montre le point clé de la preuve à savoir une estimée a priori C^2.
(iv) L'ellipticité uniforme étant acquise à l'étape précédente, on obtient l'estimée $C^{2,\beta}(M)$ recherchée par la théorie d'Evans et Trudinger (cf. [11, Théorème 17.14, p. 461]).

2. Estimée a priori C^2

Soient $t \in \mathcal{T}$ fixé et $\varphi_t : M \to \mathbb{R}$ la solution correspondante qu'on notera φ pour alléger.

2.1. *Pincement des valeurs propres* $\lambda(g^{-1}\tilde{g})$

Soit $B : UT^{1,0} \to \mathbb{R}$ la fonctionnelle $(P,\xi) \mapsto B(P,\xi) = \tilde{h}_P(\xi,\xi) - \varphi(P)$, où $UT^{1,0}$ désigne le fibré unitaire associé à $(T^{1,0}, h)$; B atteint son maximum en un point (P_0,ξ_0). On travaille dans une carte holomorphe normale (U_0,ψ_0) centrée en P_0 telle que : $\xi_0 = \frac{\partial}{\partial z^1}$ et $[\tilde{g}_{i\bar{j}}(P_0)]_{1\leqslant i,j\leqslant m} = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ avec $\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_m$. La fonctionnelle locale auxiliaire B_1 : $U_1 \subset U_0 \to \mathbb{R}$, $P \mapsto B_1(P) = \frac{\tilde{g}_{1\bar{1}}(P)}{g_{1\bar{1}}(P)} - \varphi(P)$ atteint un maximum local en P_0 égal à $B(P_0,\xi_0)$. En différentiant deux fois l'équation $(E_{k,t})$, on obtient en P_0 dans la carte (U_0,ψ_0) :

$$t\partial_{1\bar{1}}f = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial B_i^j}\big(\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\big)(\partial_{1\bar{1}i\bar{j}}\varphi - R_{1\bar{1}i\bar{j}}\partial_{i\bar{i}}\varphi) + \sum_{i,j,r,s=1}^m \frac{\partial^2 F_k}{\partial B_r^s \partial B_i^j}\big(\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\big)\partial_{1r\bar{s}}\varphi\partial_{\bar{1}i\bar{j}}\varphi \qquad (1)$$

Les dérivées premières de la fonction F_k en une matrice diagonale étant connues [10], et par concavité de la fonction $F_k = \ln\sigma_k\lambda$ sur $\lambda^{-1}(\Gamma_k)$ l'ensemble des matrices hermitiennes dont le vecteur des valeurs propres appartient au cône Γ_k, on déduit (en notant $\sigma_{k-1,i} := \sigma_{k-1}(\lambda_1,\dots,\hat{\lambda}_i,\dots,\lambda_m) \equiv \frac{\partial\sigma_k}{\partial\lambda_i}$) que :

$$t\partial_{1\bar{1}}f \leqslant \sum_{i=1}^m \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}(\partial_{1\bar{1}i\bar{i}}\varphi - R_{1\bar{1}i\bar{i}}\partial_{i\bar{i}}\varphi) \qquad (2)$$

En appliquant l'opérateur linéaire $L := \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial B_i^j}([\delta_i^j + g^{j\bar{l}}\partial_{i\bar{l}}\varphi]_{1\leqslant i,j\leqslant m})\nabla_i^j$ à la fonctionnelle B_1, on obtient au point P_0 dans la carte (U_1,ψ_0) :

$$L(B_1) = \sum_{i=1}^m \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}\big(\partial_{1\bar{1}i\bar{i}}\varphi + (1-\lambda_1)R_{1\bar{1}i\bar{i}} - \partial_{i\bar{i}}\varphi\big) \qquad (3)$$

En écrivant $L(B_1)(P_0) \leqslant 0$ et en simplifiant les dérivées 4-ièmes entre (2) et (3), on trouve finalement :

$$0 \geqslant \sum_{i=2}^m \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}(-R_{1\bar{1}i\bar{i}})(\lambda_1 - \lambda_i) - \sum_{i=1}^m \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}\lambda_i + \sum_{i=1}^m \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)} + t\partial_{1\bar{1}}f \qquad (4)$$

D'après notre *hypothèse de courbure*, on a $(-R_{1\bar{1}i\bar{i}})(\lambda_1-\lambda_i)\geqslant 0$ en P_0 dans la carte ψ_0 (cf. [14, p. 372]). Par homogénéité de σ_k on a $\sum_{i=1}^m \frac{\sigma_{k-1,i}}{\sigma_k}(\lambda)\lambda_i=k$. En outre, on a $\sum_{i=1}^m \frac{\sigma_{k-1,i}}{\sigma_k}(\lambda)=(m-k+1)\frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}(\lambda)$ [16] et on peut donc déduire de (4) l'existence d'une constante $c_1>0$ ne dépendant que de k et $\|f\|_{C^2}$ telle que : $q_k:=\frac{(m-k+1)}{k}\frac{\sigma_{k-1}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}\leqslant c_1$. De là, les inégalités de Newton (cf. [16]) et une récurrence permettent de majorer uniformément les λ_i. On en déduit aisément une minoration uniforme donc un pincement des valeurs propres en P_0 et plus généralement en tout point :

Proposition 2.1 *(Pincement des valeurs propres). Il existe une constante $c_2>0$ ne dépendant que de $m,k,\|f\|_{C^2}$ et C_0 telle que : $\forall P\in M, \forall 1\leqslant i\leqslant m$, $-(m-1)c_2\leqslant \lambda_i(g^{-1}\tilde{g})(P)\leqslant c_2$.*

Ce pincement implique sans difficulté l'ellipticité uniforme de $(E_{k,t})$ (grâce aux inégalités de Maclaurin [16]) et une estimation uniforme du gradient (par la formule de Green) :

Proposition 2.2 *(Ellipticité uniforme). Il existe des constantes $0<E_0\leqslant F_0$ ne dépendant que de $m,k,\|f\|_\infty$ et c_2 telles que : $\forall P\in M, \forall 1\leqslant i\leqslant m,\ E_0\leqslant \sigma_{k-1,i}(\lambda(g^{-1}\tilde{g})(P))\leqslant F_0$.*

Proposition 2.3 *(Estimation uniforme du gradient). Il existe une constante $C_1>0$ ne dépendant que de m,c_2 et (M,g) telle que : $\forall P\in M|,\ (\nabla\varphi)_P|\leqslant C_1$.*

2.2. Estimée des dérivées secondes

Pour $1\leqslant j\leqslant m$ et $z\in\mathbb{C}^m$, on note $u_j=\Re e(z_j)$ et $u_{j+m}=\Im m(z_j)$. L'exemple $\psi(z):=\frac{1}{2}K\sum_{j=1}^m[(u_j)^2-(u_{j+m})^2]$, qui vérifie $\partial_{j\bar{j}}\psi=0$ pour tout $1\leqslant j\leqslant m$, mais $\partial_{u_ju_j}\psi=K\gg 1$ arbitraire, illustre la difficulté rémanente à ce stade de la preuve. L'étape finale, ignorée dans [12], consiste à estimer $\|\varphi\|_{C^2(M)}$.

L'équation $(E_{k,t})$ est de la forme :

$$F\big(P,[\partial_{u^Iu^J}\varphi]_{1\leqslant I,J\leqslant 2m}\big)=\nu\quad P\in M \tag{E}$$

où $[\partial_{u^Iu^J}\varphi]_{1\leqslant I,J\leqslant 2m}$ désigne la matrice hessienne réelle de φ, $\nu=tf+\ln A_t$ et $F(P,r)=F_k[\delta_l^j+\frac{1}{4}g^{j\bar{s}}(P)(r_{ls}+r_{(l+m)(s+m)}+ir_{l(s+m)}-ir_{(l+m)s})]_{1\leqslant l,j\leqslant m}$ où r est une matrice réelle symétrique de taille $2m$. On considère la fonctionnelle $\Phi:UT\to\mathbb{R}, (P,\xi)\mapsto(\nabla^2\varphi)_P(\xi,\xi)+\frac{1}{2}|(\nabla\varphi)_P|_g^2$, où UT est le fibré unitaire réel associé à (TM,g). Φ atteint son maximum en un point $(P_1,\xi_1)\in UT$. On commence par montrer que trouver une estimée C^2 se réduit à majorer uniformément la quantité $(\nabla^2\varphi)_{P_1}(\xi_1,\xi_1)$: en effet, une telle majoration (par une constante c_3) combinée à l'estimation uniforme du gradient permet de déduire une estimée uniforme des dérivées secondes :

Théorème 2.4 *(Estimée uniforme des dérivées secondes). Il existe une constante $C_2>0$ ne dépendant que de m,c_2,C_1 et c_3 telle que : $\forall P\in M,\ |(\nabla^2\varphi)_P|_g\leqslant C_2$.*

Ce qui permet de déduire l'estimée C^2 uniforme recherchée : $\|\varphi\|_{C^2(M,\mathbb{R})}\leqslant C_0+C_1+C_2$.

Il reste à majorer $(\nabla^2\varphi)_{P_1}(\xi_1,\xi_1)$ uniformément. On travaille dans une carte réelle (U_1',ψ_1) de classe C^∞, g-normale centrée en P_1 satisfaisant : $\xi_1=\frac{\partial}{\partial u^1}$ et $[(\nabla^2\varphi)_{IJ}(P_1)]_{1\leqslant I,J\leqslant 2m}=\operatorname{diag}(\beta_1,\dots,\beta_{2m})$ avec $(\nabla^2\varphi)_{P_1}(\xi_1,\xi_1)=\beta_1\geqslant\cdots\geqslant\beta_{2m}$. La fonctionnelle auxiliaire $\Phi_1:U_2\subset U_1'\to\mathbb{R}, P\mapsto\Phi_1(P)=\frac{(\nabla^2\varphi)_{11}(P)}{g_{11}(P)}+\frac{1}{2}|(\nabla\varphi)_P|_g^2$ admet un maximum local en P_1. En différentiant (E) deux fois dans la *direction réelle* ∂_{u^1}, en utilisant le fait qu'en P_1 on a $\frac{\partial^2F}{\partial r_{IJ}\partial u^1}[\varphi]=0$ pour tout $I,J\in\{1,\dots,2m\}$, $\frac{\partial F}{\partial r_{IJ}}[\varphi]=0$ si $I\neq J$ et la concavité de F en la variable r, on obtient l'inégalité suivante en P_1 : $\sum_{I=1}^{2m}\frac{\partial F}{\partial r_{II}}[\varphi]\partial_{u^1u^1u^Iu^I}\varphi\geqslant\partial_{u^1u^1}\nu-\partial_{u^1u^1}F[\varphi]$. Par un calcul de $\partial_{u^1u^1}F[\varphi]$, cette inégalité devient :

$$\sum_{I=1}^{2m}\frac{\partial F}{\partial r_{II}}[\varphi]\partial_{u^1u^1u^Iu^I}\varphi\geqslant\partial_{u^1u^1}\nu+\frac{1}{2}\sum_{S=1}^m\frac{\sigma_{k-1,S}(\lambda(P_1))}{\sigma_k(\lambda(P_1))}\big(\partial_{u^1}\Gamma_{u^1u^S}^{u^S}+\partial_{u^1}\Gamma_{u^1u^{S+m}}^{u^{S+m}}\big)(\partial_{u^Su^S}\varphi+\partial_{u^{S+m}u^{S+m}}\varphi) \tag{5}$$

où $\lambda(P_1)$ désigne ici $\lambda(g^{-1}\tilde{g})(P_1)$.

Dans la suite, on omettra la lettre u dans les écritures ∂_{u^I} et $\Gamma_{u^Iu^J}^{u^S}$. En appliquant à Φ_1 au point P_1 l'opérateur $\tilde{L}=\sum_{I,J=1}^{2m}\frac{\partial F}{\partial r_{IJ}}[\varphi]\partial_{IJ}$, un calcul permet de montrer que :

$$\begin{aligned}\tilde{L}\Phi_1=\sum_{I=1}^{2m}\frac{\partial F}{\partial r_{II}}[\varphi]\Bigg[&\partial_{II11}\varphi-\sum_{S=1}^{2m}\partial_{II}\Gamma_{11}^S\partial_S\varphi-\partial_I\Gamma_{11}^I\partial_{II}\varphi-\partial_I\Gamma_{11}^I\partial_{II}\varphi-2\partial_I\Gamma_{I1}^1\big(\nabla^2\varphi\big)_{11}(P_1)\\&-\sum_{H,S=1}^{2m}\partial_I\Gamma_{IS}^H\partial_H\varphi\partial_S\varphi+\sum_{S=1}^{2m}\partial_{IIS}\varphi\partial_S\varphi+(\partial_{II}\varphi)^2\Bigg]\end{aligned} \tag{6}$$

Ecrivant $\tilde{L}\Phi_1(P_1) \leqslant 0$ et en utilisant qu'en P_1 on a : $\forall 1 \leqslant S \leqslant 2m$, $\frac{\partial F}{\partial u^S}[\varphi] = 0$ et donc $\partial_S v = \sum_{I,J=1}^{2m} \frac{\partial F}{\partial r_{IJ}}[\varphi]\partial_{SIJ}\varphi$, on élimine les dérivées 4-ièmes entre (5) et (6), et on obtient :

$$\begin{aligned} 0 \geqslant \partial_{11} v &+ \sum_{S=1}^{2m} \partial_S v \partial_S \varphi + \sum_{I=1}^{2m} \frac{\partial F}{\partial r_{II}}[\varphi]\Bigg[-2\partial_I \Gamma_{I1}^1 \big(\nabla^2\varphi\big)_{11}(P_1) - \partial_I \Gamma_{11}^I \partial_{II}\varphi - \partial_I \Gamma_{11}^I \partial_{II}\varphi - \sum_{S=1}^{2m} \partial_{II} \Gamma_{11}^S \partial_S \varphi \\ &- \sum_{H,S=1}^{2m} \partial_I \Gamma_{IS}^H \partial_H \varphi \partial_S \varphi + (\partial_{II}\varphi)^2\Bigg] + \frac{1}{2}\sum_{S=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,S}(\lambda(P_1))}{\sigma_k(\lambda(P_1))}\big(\partial_1 \Gamma_{1S}^S + \partial_1 \Gamma_{1(S+m)}^{S+m}\big)(\partial_{SS}\varphi + \partial_{(S+m)(S+m)}\varphi) \end{aligned} \tag{7}$$

On exprime ensuite les quantités $\partial\Gamma$ et $\partial^2\Gamma$ au point P_1 dans la carte normale ψ_1 en fonction des composantes de la courbure de Riemann et celles de sa dérivée covariante [6, p. 243], d'où :

$$\begin{aligned} 0 \geqslant \partial_{11} v &+ \sum_{S=1}^{2m} \partial_S v \partial_S \varphi + \sum_{I=1}^{2m} \frac{\partial F}{\partial r_{II}}[\varphi]\Bigg[(\beta_I)^2 + \frac{2}{3}R_{1I1I}(\beta_1 - 2\beta_I) + \frac{1}{3}\sum_{H,S=1}^{2m} R_{IHIS}\partial_H\varphi\partial_S\varphi \\ &- \sum_{S=1}^{2m}\bigg(\nabla_I R_{1S1I} - \frac{1}{6}\nabla_S R_{1I1I}\bigg)\partial_S\varphi\Bigg] + \frac{1}{6}\sum_{I=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,I}(\lambda(P_1))}{\sigma_k(\lambda(P_1))}(R_{1II1} + R_{1(I+m)(I+m)1})(\beta_I + \beta_{I+m}) \end{aligned} \tag{8}$$

Or en P_1 dans la carte ψ_1, et pour tout $1 \leqslant I, J, H, S, E \leqslant 2m$ on a $|R_{IJHS}| \leqslant \|R\|_g$ et $|\nabla_E R_{IJHS}| \leqslant \|\nabla R\|_g$. En outre, $v = tf + \ln A_t$ et $|\partial_S \varphi| \leqslant C_1$ pour tout $S \in \{1, \ldots, 2m\}$, d'où :

$$\begin{aligned} \|f\|_{C^2(M)}(1 + 2mC_1) \geqslant\ & \frac{\partial F}{\partial r_{11}}[\varphi](\beta_1)^2 + \frac{2}{3}\sum_{I=1}^{2m} \frac{\partial F}{\partial r_{II}}[\varphi]R_{1I1I}(\beta_1 - 2\beta_I) \\ &+ \frac{1}{6}\sum_{I=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,I}(\lambda(P_1))}{\sigma_k(\lambda(P_1))} \times (R_{1II1} + R_{1(I+m)(I+m)1})(\beta_I + \beta_{I+m}) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\sum_{I=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,I}(\lambda(P_1))}{\sigma_k(\lambda(P_1))}\right) \times \left[-\frac{4}{3}m^2(C_1)^2\|R\|_g - \frac{7}{3}mC_1\|\nabla R\|_g\right] \end{aligned} \tag{9}$$

On estime ensuite les $|\beta_I|$, $I \in \{1, \ldots, 2m\}$ en utilisant β_1 : on obtient pour tout $I \in \{1, \ldots, 2m\}$ que

$$|\beta_I| \leqslant m\big(4\beta_1 + 2(C_1)^2 + c_4\big)$$

avec $c_4 := 4[(m-1)c_2 + 1]$, et on remplace les $\frac{\partial F}{\partial r_{II}}$ par leur valeur :

$$\forall 1 \leqslant I \leqslant m, \quad \frac{\partial F}{\partial r_{II}}[\varphi] = \frac{\partial F}{\partial r_{(I+m)(I+m)}}[\varphi] = \frac{1}{4}\frac{\sigma_{k-1,I}(\lambda(P_1))}{\sigma_k(\lambda(P_1))}.$$

Finalement, par l'ellipticité uniforme et l'encadrement

$$e^{-2\|f\|_\infty}\binom{m}{k} \leqslant \sigma_k\big(\lambda(P)\big) \leqslant e^{2\|f\|_\infty}\binom{m}{k},$$

on obtient une inégalité de la forme :

$$(\beta_1)^2 - A\beta_1 - B \leqslant 0 \quad \text{avec } A, B > 0 \text{ uniformément contrôlés,} \tag{10}$$

ce qui prouve que β_1 est majoré.

Remerciements

Cette Note est tirée de ma thèse [13] encadrée par Ph. Delanoë à Nice. Je le remercie vivement pour ses conseils et sa disponibilité.

Références

[1] Th. Aubin, Métriques riemanniennes et courbures, J. Diff. Geom. 4 (1970) 383–424.
[2] Th. Aubin, Equations du type Monge–Ampère sur les variétés kählériennes compactes, C. R. Acad. Sci. Paris A 283 (1976) 116–120.
[3] Th. Aubin, Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry, Springer, 1998.
[4] A.L. Besse, Einstein Manifolds, Springer, 1987.
[5] Z. Blocki, Weak solutions to the complex Hessian equation, Ann. Inst. Fourier Grenoble 55 (2005) 1735–1756.
[6] E. Cartan, Leçons Sur la Géométrie des Espaces de Riemann, Gauthier-Villars, 1946.

[7] L. Caffarelli, L. Nirenberg, J. Spruck, The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III: Functions of the eigenvalues of the Hessian, Acta Math. 155 (1985) 261–301.
[8] Ph. Delanoë, Sur l'analogue presque-complexe de l'équation de Calabi–Yau, Osaka J. Math. 33 (1996) 829–846.
[9] L. Gårding, An inequality for hyperbolic polynomials, J. Math. and Mech. 8 (1959) 957–965.
[10] C. Gerhardt, Closed Weingarten hypersurfaces in Riemannian manifolds, J. Diff. Geom. 43 (1996) 612–641.
[11] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, reprint of the 1998 edition, Springer, 2001.
[12] Z. Hou, Complex Hessian equation on Kähler manifold, Preprint, 24 December 2008, downloadable at: http://arxiv.org/abs/0812.4549.
[13] A. Jbilou, Equations hessiennes complexes sur les variétés kählériennes compactes, Thèse, Univ. Nice Sophia-Antipolis (19 Février 2010).
[14] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry II, Interscience Publishers, 1969.
[15] S.-Y. Li, On the Dirichlet problems for symmetric function equations of the eigenvalues of the complex Hessian, Asian J. Math. 8 (2004) 87–106.
[16] M. Lin, N. Trudinger, On some inequalities for elementary symmetric functions, Bull. Austral. Math. Soc. 50 (1994) 317–326.
[17] A. Vinacua, Nonlinear elliptic equations and the complex Hessian, Comm. PDE 13 (1988) 1467–1497.
[18] S.-T. Yau, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge–Ampère equations. I, Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978) 339–441.