Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1115–1118
Comptes Rendus Mathematique

Algèbre homologique/Géométrie algébrique

Un isomorphisme de type Deligne–Riemann–Roch

Dennis Eriksson

Departement of Mathematics, Tokyo University, 3-8-1 Komaba Meguro-ku, 153-8914 Tokyo, Japan

Reçu le 15 janvier 2009 ; accepté après révision le 2 septembre 2009

Disponible sur Internet le 24 septembre 2009

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Nous démontrons un théorème d'Adams–Riemann–Roch pour les morphismes projectifs entre schémas réguliers, du point de vue du programme de P. Deligne sur le théorème de Riemann–Roch fonctoriel, et nous en déduisons quelques conséquences géométriques. ***Pour citer cet article : D. Eriksson, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

An isomorphism of the Deligne–Riemann–Roch type. We prove an Adams–Riemann–Roch theorem for projective morphisms between regular schemes, in the sense of the program of P. Deligne on the functorial Riemann–Roch theorem and we deduce some geometric consequences. ***To cite this article: D. Eriksson, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

1. Introduction

Soit X un schéma. Notons $K_0(X)$ le groupe de Grothendieck des fibrés vectoriels sur X et posons $K_0(X)[\frac{1}{k}] = K_0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ (resp. $K_0(X)_{\mathbb{Q}} = K_0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$). Rappelons que les opérations d'Adams sont les opérations additives $\Psi^k : K_0(X) \to K_0(X)$ telles que $\Psi^k([L]) = [L^{\otimes k}]$ pour L un fibré en droites et $[L]$ sa classe dans $K_0(X)$. Notons aussi $\theta_k : K_0(X) \to K_0(X)[\frac{1}{k}]$ la classe de Bott qui est la classe multiplicative par rapport aux suites exactes telle que pour un fibré en droites L on ait $\theta_k([L]) = 1 + [L] + [L^{\otimes 2}] + \cdots + [L^{\otimes (k-1)}]$. Pour un morphisme projectif $f : X \to Y$ entre schémas réguliers, on dispose du théorème d'Adams–Riemann–Roch qui stipule que, pour $x \in K_0(X)[\frac{1}{k}]$,

$$\Psi^k Rf_*(x) = Rf_*\bigl(\Psi^k(x) \otimes \theta_k(\Omega_f)^{-1}\bigr)$$

dans $K_0(Y)[\frac{1}{k}]$, voir [9, V, Theorem 7.6.].

À un schéma X on peut associer sa catégorie virtuelle $V(X)$. Il s'agit en fait d'une catégorie de Picard, *i.e.* un groupoïde avec sommes, qui est le groupoïde fondamental de la construction de Quillen : $\pi_f(\Omega BQ(Vect_X))$ (cf. [1, pp. 114–115]). C'est la solution du problème des déterminants universels, où un tel foncteur est défini comme suit :

Adresse e-mail : dennis.eriksson.se@gmail.com.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.09.003

Définition 1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie exacte et $(\mathcal{C}, \mathrm{iso})$ la catégorie dont les objets sont les mêmes que ceux de $\mathcal{C}$ et les morphismes sont les isomorphismes. Un foncteur déterminant F (cf. [1, 4.3]) de $\mathcal{C}$ vers une catégorie de Picard P est un foncteur $F:(\mathcal{C}, \mathrm{iso}) \to P$ tel que, pour toute suite exacte

$$\Sigma: 0 \to A \to B \to C \to 0$$

il y ait un isomorphisme $F(\Sigma)$: $F(B) \simeq F(A) + F(C)$ respectant les isomorphismes de suites exactes. On demande aussi que le foncteur soit compatible aux filtrations admissibles et que les $F(\Sigma)$ soient compatibles aux isomorphismes dans $\mathcal{C}$ (*i.e.* A ou C est un objet nul).

On se propose d'une part de raffiner les opérations en K-théorie algébrique intervenant dans le théorème d'Adams–Riemann–Roch sous la forme de foncteurs entre catégories virtuelles et d'autre part de montrer que les égalités dans $K_0(X)_{\mathbb{Q}}$ ainsi formulées proviennent d'isomorphismes canoniques entre ces foncteurs, cf. Théorème 2.3.

2. Résultats principaux

Pour la construction qui va suivre, on passe par l'$\mathbb{A}^1$-homotopie des schémas de Morel–Voevodsky [2] dans le contexte de Riou [5] :

Théorème 2.1 *(Filtration d'Adams fonctorielle). Soit $\mathfrak{R}$ la catégorie de schémas réguliers. À tout $X \in \mathrm{ob}\,\mathfrak{R}$, on peut associer une suite de catégories de Picard $F^i V(X)$, avec $F^0 V(X) = V(X)_{\mathbb{Q}}$, qui est strictement stable par changement de base. Ses propriétés principales sont les suivantes* :

(a) *Les foncteurs $F^i V(X) \to F^{i-1} V(X)$ sont fidèles.*
(b) *Pour chaque $i, j \in \mathbb{N}_{>0}$, il existe un accouplement* :
$$F^i V(X) \times F^j V(X) \to F^{i+j} V(X)$$
compatible au produit naïf $F^0 V(X) \times F^0 V(X) \to F^0 V(X)$.
(c) *Pour $i > \dim X + 1$, $F^i(X)$ est la catégorie ponctuelle.*

En fait, les catégories $F^i V(X)$ sont par construction une catégorisation de la filtration définie par les espaces propres sous l'action des opérations d'Adams de $K_*(X)_{\mathbb{Q}}$, notée $F^i K_*(X)$, d'où (c) (cf. [7, Théorème 4(iii)]). Elles nous permettent par exemple, si L est un fibré en droites, de construire des séries formelles du type $\sum a_k (L-1)^k$ car $L - 1 \in \mathrm{ob}\, F^1 V(X)$, et pour k assez grand $(L-1)^k$ est *canoniquement* trivialisé par (c).

Théorème 2.2 *(Théorème de rigidité). Soit $F^i V$ comme ci-dessus. Alors, pour chaque transformation naturelle de préfaisceaux $f: F^i K_0(-) \to F^j K_0(-)$ sur la catégorie des schémas réguliers, il existe un foncteur canonique $F: F^i V \to F^j V$ qui relève f. On peut aussi décrire explicitement l'action du foncteur en question sur les fibrés vectoriels universels sur les Grassmanniennes $\mathrm{Gr}_{r,d,\mathbb{Z}}$ des quotients localement libres de rank r de $\mathcal{O}^{d+r}$.*

En utilisent la rigidité, on obtient directement sur $V(X)_{\mathbb{Q}}$ les opérations d'Adams « fonctorielles » notés Ψ^k, et on peut aussi déduire des opérations de type « classe de Bott ». Enfin, avec ces opérations, nous pouvons formuler le théorème principal :

Théorème 2.3 *(Théorème d'Adams–Riemann–Roch fonctoriel). Soit $\mathfrak{R}$ la catégorie des schémas réguliers et fixons un entier $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Il existe une famille canonique d'isomorphismes $\psi_{f,k}$ (dans $V(Y)_{\mathbb{Q}}$), associée à un morphisme projectif $f: X \to Y$ pour $X, Y \in \mathrm{ob}\,\mathfrak{R}$* :

$$\psi_{f,k}\colon\ \Psi^k Rf_*(-) \simeq Rf_*\big(\theta_k(\Omega_f)^{-1} \otimes \Psi^k(-)\big).$$

Si on suppose aussi les propriétés (a)–(d) *suivantes, la famille d'isomorphismes est uniquement déterminée* :

(a) *Stabilité sous changement de base transversal.*
(b) *Compatibilité avec la formule de projection.*

(c) *Compatibilité à la composition.*
(d) *Pour Z un sous-schéma fermé de Y disjoint de l'image de X, les deux côtés sont canoniquement trivialisés après multiplication par $\mathcal{O}_Z$; l'isomorphisme ψ_f doit respecter les deux trivialisations.*

Outre (a)–(d)*, l'isomorphisme vérifie aussi* :

(e) *Stabilité sous changement de base général* (*i.e. pas forcément transversal*)*. Par contre, le fibré d'excès entre ici en jeu car le changement de base en question correspond à la formule d'excès* (*cf.* [9, *Chapter* VI, *Theorem* 1.3]).
(f) *Une description explicite dans le cas des immersions fermées qui admettent des résolutions de Koszul.*

Démonstration. Nous procédons en deux étapes. Premièrement, pour l'existence, nous traitons deux cas séparément. D'abord le cas des immersions fermées et le cas des projections de fibrés projectifs. Pour les immersions fermées, nous utilisons la déformation au cône normal pour nous ramener au cas où nous disposons d'une résolution de Koszul. Nous pouvons alors faire des calculs explicites, d'où en particulier la description (f). Nous vérifions que la construction satisfait (a)–(d). Ensuite, nous traitons le cas des projections de fibrés projectifs en utilisent (b) et la formule du fibré projectif en K-théorie. Finalement, pour f une composition $p \circ i$ où i est une immersion fermée et p une projection d'un fibré projectif nous définissons l'isomorphisme comme la composition naïve de $\psi_{i,k}$ et $\psi_{p,k}$, et vérifions que la construction ne dépend pas du choix de la factorisation en i et p.

Deuxièmement, pour l'unicité, grâce à (c), il suffit de traiter les deux cas des immersions fermées et des projections de fibrés projectifs séparément. Le cas des immersions fermées se ramène par déformation au cône normal au cas d'une immersion $X \to \mathbb{P}_X(N)$ déduite d'une inclusion admissible $M \subseteq N$ pour M un fibré en droites et N un fibré vectoriel. On peut se ramener au cas où X possède un faisceau ample. Alors, quitte à tordre N par un fibré en droites convenable, on peut supposer que N est un sous-fibré d'un fibré trivial, $\mathcal{O}^r$, et grâce à la stabilité par rapport au changement de base transversal (a), on dévisse au cas d'une immersion induite par l'immersion universelle $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ sur la variété des drapeaux $\mathrm{Gr}_{1,n,r,X}$ sur X classifiant les drapeaux $M' \subseteq N' \subseteq \mathcal{O}^r$, où $\operatorname{rg} M' = 1$ et $\operatorname{rg} N' = n$. On peut alors supposer que $X = \mathrm{Gr}_{1,n,r,\mathbb{Z}}$ et $N = \mathcal{N}$, le fibré vectoriel universel de rang n sur X. L'unicité est alors évidente puisque le groupe $K_1(\mathbb{P}_X(\mathcal{N}))$ est alors une somme de copies de $K_1(\mathbb{Z})$ qui est de 2-torsion. Le cas des projections de fibrés projectifs est traité de façon similaire. $\square$

On peut aussi établir un théorème du type « Lefschetz–Riemann–Roch fonctoriel » au sens de Thomason [8] pour les actions des groupes diagonalisables de la forme $\mu_n \times \mathbb{G}_m^r$. La formulation fonctorielle (ainsi que la preuve) est analogue à celle du théorème principal ci-dessus.

3. Conséquences géométriques

Nous appelons une courbe $f : C \to S$ les données suivantes : C, S deux schémas réguliers tels que f soit propre et plat et génériquement lisse avec fibres géométriquement connexes de dimension 1. On a alors le dualisant relatif $\omega = \omega_{C/S}$. On peut définir la catégorie $\mathfrak{Pic}(S)_{\mathbb{Q}}$ des fibrés inversibles rationnels $L^{\otimes p/q}$, avec pour morphismes « les isomorphismes rationnels ». Rappelons aussi que pour une courbe $f : C \to S$ et deux fibrés inversibles L, M sur C on peut associer un fibré inversible $\langle L, M \rangle$ sur S, via $\det Rf_*((L-1) \otimes (M-1))$, qui incarne la classe $\int_{C/S} c_1(L) \wedge c_1(M)$ en tant que fibré inversible. Ici et dans la suite $\int_{C/S}$ est l'intégration le long des fibres dans une théorie cohomologique convenable qui admet des classes de Chern. Associé à un fibré virtuel v, nous avons un fibré inversible $IC_2(v) := \det Rf_*((v-r) - (\det v - 1)) = \det Rf_*(\gamma^2(v-r))$ où $r = \operatorname{rg} v$, qui incarne $\int_{C/S} c_2(v)$ (cf. [1, Section 9]). Ici γ^2 est une opération de γ qu'on peut introduire via la rigidité. Nous appliquons le théorème d'Adams–Riemann–Roch dans ce cas et utilisons la formule $\det \Psi^k E = \Psi^k(\det E) = (\det E)^{\otimes k}$ ainsi que la trivialité de $\det Rf_* F^3 V(C)$. On obtient le théorème suivant, après avoir demontré qu'il y a deux isomorphismes canoniques :

$$\Psi^2(v) - r = (v-r)^{\otimes 2} + 2(v-r) - 2\gamma^2(v-r)$$

et

$$\theta_2(-\Omega_{C/S}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Omega_{C/S} - 1}{2} + \frac{(\Omega_{C/S} - 1)^2 - \gamma^2(\Omega_{C/S} - 1)}{4} + F^3 V(C)\right).$$

Théorème 3.1. *Définissons $\lambda(v) = \det Rf_* v$ et notons $\Omega_{C/S}$ le faisceau des différentielles relatives. Il existe un unique isomorphisme canonique (i.e. stable par changement de base) rationnel :*

$$\lambda(v)^{\otimes 12} = \langle \omega, \omega\rangle^{\operatorname{rg} v} \otimes \left\langle \det v, \det v \otimes \omega^{-1}\right\rangle^{\otimes 6} \otimes IC_2(v)^{\otimes -12} \otimes IC_2(\Omega_{C/S}).$$

Comme corollaires, on a les théorèmes classiques suivants, obtenus à torsion près :

Corollaire 3.2. *(Voir P. Deligne,* [1, *Théorème* 9.9]*.) Soit $f : C \to S$ une courbe lisse. Alors $IC_2(\Omega_{C/S})$ est trivial et l'isomorphisme ci-dessus est l'isomorphisme de Deligne.*

Corollaire 3.3. *(Voir D. Mumford,* [4, *Theorem* 5.10]*.) Soient $\lambda_n = \det Rf_* \omega^{\otimes n}$ et $f : C \to S$ une courbe lisse. Alors il existe un unique isomorphisme rationnel canonique $\lambda_n = \lambda_1^{\otimes(6n^2-6n+1)}$. En particulier, on obtient un isomorphisme rationnel canonique $\lambda_2 = \lambda_1^{\otimes 13}$.*

Corollaire 3.4. *(Voir T. Saito, formule « conducteur = discriminant »,* [6]*.) Soit $f : C \to S$ une courbe. Définissons le discriminant comme la section rationnelle $\Delta \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\lambda_2, \lambda_1^{13})$ donnée par l'isomorphisme ci-dessus. Soit S un trait. Alors l'ordre de la trivialisation canonique de Δ au point générique est égal à $-\operatorname{Art}_{C/S}$, où $\operatorname{Art}_{C/S}$ désigne le conducteur d'Artin.*

Nous pouvons aussi démontrer la proposition suivante par une méthode similaire :

Proposition 3.5. *(Voir L. Moret-Bailly, la formule clef,* [3, §8.1]*.) Soit S un schéma régulier et $\pi : A \to S$ un schéma abélien avec section unité $e : S \to A$. Supposons donné un fibré en droites L sur A, symétrique, rigidifié le long de la section unité et relativement ample avec $d = \operatorname{rg} \pi_* L$. Alors il existe un isomorphisme canonique rationnel*

$$(\det \pi_* L)^{\otimes 2} = \left(e^* \omega_{A/S}^{\vee}\right)^{\otimes d}.$$

Références

[1] P. Deligne, Le déterminant de la cohomologie, Contemp. Math. 67 (1987) 93–177.
[2] V. Voevodsky, F. Morel, A^1-homotopy theory of schemes, Inst. Hautes Sci. Publ. Math. 90 (1999) 45–143.
[3] L. Moret-Bailly, Pinceaux de variétés abéliennes, Astérisque 129 (1985).
[4] D. Mumford, Stability of projective varieties, Enseign. Math. 23 (1977) 39–100.
[5] J. Riou, Opérations sur la K-théorie algébrique et régulateurs via la théorie homotopique des schémas, Ph.D. thesis, Univ. Paris 7, http://www.math.u-psud.fr/~riou/these/these.pdf, 2006.
[6] T. Saito, Conductor, discriminant, and the Noether formula of arithmetic surfaces, Duke Math. J. 57 (1) (1988) 151–173.
[7] C. Soulé, Opérations en K-théorie algébrique, Canad. J. Math. 37 (3) (1985) 488–550.
[8] R.W. Thomason, Algebraic K-theory of group scheme actions, in: Algebraic Topology and Algebraic K-Theory, Princeton, NJ, 1983, in: Ann. of Math. Stud., vol. 113, Princeton Univ. Press, 1987, pp. 539–563.
[9] S. Lang, W. Fulton, Riemann–Roch Algebra, Springer-Verlag, 1985.