Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 719–724

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Algèbre homologique

Construction fonctorielle de catégories de Frobenius

Vincent Beck [a,b]

[a] *CMLA, ENS Cachan, CNRS, UniverSud, 61, avenue du Président Wilson, 94230 Cachan, France*
[b] *IMJ, Université Paris 7, CNRS, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France*

Reçu le 17 mars 2009 ; accepté après révision le 30 avril 2009

Présenté par Michel Duflo

Résumé

Soient $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ deux catégories exactes telles que $\mathscr{A}$ soit karoubienne et $M : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ un foncteur exact. Sous des hypothèses d'adjonction pour M, on montre que les objets de $\mathscr{A}$ qui sont facteurs directs d'objets de la forme MY pour $Y \in \mathscr{B}$ forment alors une catégorie de Frobenius ce qui permet de définir par passage au quotient la catégorie M-stable de $\mathscr{A}$. Par ailleurs, on suggère la construction d'une catégorie M-stable pour $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ des catégories triangulées et M un foncteur triangulé. On illustre cette dernière notion par un théorème de Keller et Vossieck (1987) qui relie les deux notions de catégorie M-stable. ***Pour citer cet article : V. Beck, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Functorial construction of Frobenius categories. Let $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ be exact categories with $\mathscr{A}$ karoubian and M be an exact functor. Under suitable adjunction hypotheses for M, we are able to show that the direct factors of the objects of $\mathscr{A}$ of the form MY with $Y \in \mathscr{B}$ make up a Frobenius category which allows us to define an M-stable category for $\mathscr{A}$ only by quotienting. In addition, we propose a construction of an M-stable category for $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ triangulated categories and M a triangulated functor. We illustrate this notion with a theorem of Keller and Vossieck (1987) which links the two notions of M-stable category. ***To cite this article: V. Beck, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abridged English version

In this Note, we study the following situation: let us consider two additive categories $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ and an additive functor $M : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$; we are interested in the quotient category of $\mathscr{A}$ by the objects which are the direct factors of the objects MY with $Y \in \mathscr{B}$. We first consider the case where $\mathscr{A}$ is an exact category. In this case, we construct a structure of Frobenius category on $\mathscr{A}$. For this Frobenius structure, the injectives–projectives are nothing else but the direct factors of the MY for $Y \in \mathscr{B}$. Thus, we obtain a triangulated structure on the quotient which is called the M-stable category associated to $\mathscr{A}$. On the other hand, we study the case of a triangulated category $\mathscr{A}$ and also define a notion of M-stable category in this case. We finally link these two notions of M-stable category.

Adresse e-mail : beck@math.jussieu.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.05.004

We begin with the case of an exact category $\mathscr{A}$. We consider two exact categories $(\mathscr{A},\mathscr{E})$ and $(\mathscr{B},\mathscr{F})$ and an exact functor $M:\mathscr{B}\to\mathscr{A}$. Under suitable adjunction hypotheses on M (see Proposition 0.2), we will construct a new exact structure on $\mathscr{A}$ which is a Frobenius structure. For this, we begin with Lemma 0.1 which allows us to construct easily new exact structure by an inverse image process.

Lemma 0.1 *(New exact structure). Let $(\mathscr{A},\mathscr{E})$, $(\mathscr{B},\mathscr{F})$ be two exact categories and $L:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ be an exact functor. We define the family $\mathscr{E}_L^0=\{s\in\mathscr{E},\ Ls$ is a split exact sequence in $\mathscr{B}\}$. Then $(\mathscr{A},\mathscr{E}_L^0)$ is an exact category.*

The proof of this lemma is straightforward by using the minimal axioms of Keller [5]. We can now state our main result on exact categories:

Proposition 0.2 *(Frobenius category). Let $(\mathscr{A},\mathscr{E})$, $(\mathscr{B},\mathscr{F})$ be two exact categories and $M:\mathscr{B}\to\mathscr{A}$ be an exact functor. Let us assume that M has a left adjoint L and a right adjoint R. We also assume the following properties*:

(i) *$\mathscr{A}$ is karoubian*;
(ii) *L and R are exact functors between the exact categories $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$*;
(iii) $\mathscr{E}_L^0=\mathscr{E}_R^0:=\mathscr{E}'$;
(iv) *for every $f:X\to X'$ such that there exists β verifying $\beta Lf=\mathrm{id}_{LX}$, the morphism f is an inflation of $\mathscr{A}$ (and so of $(\mathscr{A},\mathscr{E}')$)*;
(v) *for every $f:X\to X'$ such that there exists β verifying $Rf\beta=\mathrm{id}_{RX}$, the morphism f is a deflation of $\mathscr{A}$ (and so of $(\mathscr{A},\mathscr{E}')$).*

Then $(\mathscr{A},\mathscr{E}')$ is a Frobenius category whose projectives–injectives are the direct factors of the objects MY for $Y\in\mathscr{B}$ (these projectives–injectives are called the M-split objects of $\mathscr{A}$). The stable category of $(\mathscr{A},\mathscr{E}')$ is called the M-stable category of $\mathscr{A}$.

These hypotheses are verified when $\mathscr{A}=A$-Mod. is the category of A-modules with A a Frobenius algebra over k, $\mathscr{B}$ is the category of vector spaces over k and $M=A\otimes{?}:\mathscr{B}\to\mathscr{A}$ is the induction functor. The hypotheses are also verified when $\mathscr{A}=\mathcal{O}G$-Mod. is the category of $\mathcal{O}G$-modules (where $\mathcal{O}$ is a commutative ring and G finite group), $\mathscr{B}$ is the category of $\mathcal{O}H$-modules (where H is a subgroup of G) and $M=\mathrm{Ind}_H^G:\mathscr{B}\to\mathscr{A}$ is the induction functor.

Let us now study triangulated categories and for this, we begin with the definition of the M-stable category in this case.

Definition 0.3 *(The M-stable category of a triangulated category).* Let $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$ be two triangulated categories and $M:\mathscr{B}\to\mathscr{A}$ be a triangulated functor with left and right adjoint. The M-stable category of $\mathscr{A}$ is, by definition, the triangulated quotient $\mathscr{A}/\langle M\text{-split}\rangle$ where $\langle M\text{-split}\rangle$ is the thick subcategory of $\mathscr{A}$ generated by the MY for $Y\in\mathscr{B}$.

Example 1 *(Derived category and M-stable category).* We assume hypotheses of Proposition 0.2 and denote by $\mathscr{H}^b(M)$ the bounded homotopy category of the M-split objects of $\mathscr{A}$. Following [7] or [6], we have $M\,\mathrm{Stab}_{\mathscr{A}}=\mathscr{D}^b(\mathscr{A},\mathscr{E}')/\mathscr{H}^b(M)$.

In addition, let us denote by $\mathscr{F}_M^0$ the exact structure on $\mathscr{B}$ obtained as inverse image of the structure of split sequences of $\mathscr{A}$ by M. The adjunctions (L,M) and (M,R) extend to triangulated adjunctions which are still denoted by (L,M) and (M,R) between the triangulated categories $\mathscr{D}^b(\mathscr{A},\mathscr{E}')$ and $\mathscr{D}^b(\mathscr{B},\mathscr{F}_M^0)$. Using Lemma 2.4 of [1], we obtain that, for this functor M, the thick subcategory of $\mathscr{D}^b(\mathscr{A},\mathscr{E}')$ generated by the MY for $Y\in\mathscr{D}^b(\mathscr{B},\mathscr{F})$ is nothing else but $\mathscr{H}^b(M)$.

Thus the M-stable category of the triangulated category $\mathscr{D}^b(\mathscr{A},\mathscr{E}')$ is also the M-stable category of the exact category $\mathscr{A}$.

1. Introduction

Cette Note propose une étude de la situation suivante : on considère une catégorie additive $\mathscr{A}$ munie d'un foncteur additif $M:\mathscr{B}\to\mathscr{A}$. On cherche à construire une structure sur la catégorie quotient de $\mathscr{A}$ par les facteurs directs d'objets de la forme MY. Dans la section 2, on s'intéresse au cas où $\mathscr{A}$ est une catégorie exacte et on construit une structure de catégorie de Frobenius dont les projectifs–injectifs sont les objets facteurs directs d'objets de la forme MY (c'est la Proposition 2.3). On obtient ainsi une structure triangulée sur le quotient (c'est la Définition 2.4). Dans la section 3, on étudie le cas où $\mathscr{A}$ est une catégorie triangulée (c'est la Définition 3.1) et on relie cette construction triangulée à celle de la section 2.

2. Construction de catégories de Frobenius

2.1. Nouvelle structure exacte

Dans le Lemme 2.1 qui suit, on construit sur une catégorie exacte une nouvelle structure exacte (extraite de celle de départ) par un procécé d'image réciproque par un foncteur exact depuis une catégorie exacte disposant de deux structures exactes. Le Corollaire 2.2 met en exergue la situation de relèvement de la structure minimale donnée par les suites exactes scindées. C'est cette dernière structure qui sera utilisée par la suite dans la sous-section 2.2 pour construire des catégories de Frobenius.

Lemme 2.1 *(Nouvelle structure exacte). Soient $(\mathscr{A},\mathscr{E})$ et $(\mathscr{B},\mathscr{F})$ deux catégories exactes au sens de Quillen* [8] *et Keller* [5] *et $L:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ un foncteur exact. On suppose que $\mathscr{F}'$ est une sous-famille de $\mathscr{F}$ telle que $(\mathscr{B},\mathscr{F}')$ est encore une catégorie exacte. On définit la famille $\mathscr{E}'=\{s\in\mathscr{E},\ Ls\in\mathscr{F}'\}$. Le couple $(\mathscr{A},\mathscr{E}')$ est une catégorie exacte.*

Preuve. On reprend les axiomes minimaux présentés dans l'appendice A de l'article [5]. Par définition, $\mathscr{E}'$ est stable par isomorphisme.

*Ex*0. Par hypothèse, la suite $0\rightarrowtail 0\twoheadrightarrow 0$ est une suite exacte de $\mathscr{E}$ dont l'image par L est dans $\mathscr{F}'$. Ainsi, elle est dans $\mathscr{E}'$: id_0 est une déflation de $\mathscr{E}'$.

*Ex*1. Soient $f:X\to X'$, $g:X'\to X''$ deux déflations de $\mathscr{E}'$. Ce sont en particulier des déflations de $\mathscr{E}$. On a donc une suite exacte de $\mathscr{E}$ de la forme $Y\rightarrowtail X\twoheadrightarrow X''$. Montrons que son image par L est dans $\mathscr{F}'$. Comme Lf et Lg sont des déflations de $\mathscr{F}'$ et comme $(\mathscr{B},\mathscr{F}')$ est exact, on a une suite exacte de $\mathscr{F}'$ de la forme $Z\rightarrowtail LX\twoheadrightarrow LX''$. Comme Z est le noyau de $LgLf$, on en déduit que cette suite exacte est isomorphe à $LY\rightarrowtail LX\twoheadrightarrow LX''$. Ainsi gf est un déflation de $\mathscr{E}'$.

*Ex*2. Soient $d:Y\to Z$ une déflation de $\mathscr{E}'$ et $f:Z'\to Z$. Il existe une déflation d' de $\mathscr{E}$ et f' tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f'"] & Z' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "d"] & Z \end{tikzcd}$$

soit cartésien. Montrons que d' est une déflation de $\mathscr{E}'$. Comme $L:(\mathscr{A},\mathscr{E})\to(\mathscr{B},\mathscr{F})$ est exact, l'image par L de ce diagramme est encore cartésienne puisque $Y'\rightarrowtail Z'\oplus Y\twoheadrightarrow Z$ est une suite exacte de $\mathscr{E}$ (voir [5]). Par ailleurs, comme Ld est une déflation de $\mathscr{F}'$, il existe une déflation d'' de $\mathscr{F}'$ et f'' tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y'' \arrow[r, "d''"] \arrow[d, "f''"] & LZ' \arrow[d, "Lf"] \\ LY \arrow[r, "Ld"] & LZ \end{tikzcd}$$

soit cartésien. Par la propriété universelle du produit fibré, on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y'' \arrow[r, "d''"] \arrow[d, "g"] & LZ' \arrow[d, equal] \\ LY' \arrow[r, "Ld'"] & LZ' \end{tikzcd}$$

où g est un isomorphisme. Comme d'' est une déflation de $\mathscr{F}'$ et d' une déflation de $\mathscr{E}$, on peut compléter le diagramme précédent en

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & Y'' \arrow[r, "d''"] \arrow[d, "g"] & LZ' \arrow[d, equal] \\ LX' \arrow[r] & LY' \arrow[r, "Ld'"] & LZ' \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes, $X' \rightarrowtail Y' \twoheadrightarrow Z'$ une suite exacte de $\mathscr{E}$ et la première ligne, une suite exacte de $\mathscr{F}'$. Ainsi d' est bien une déflation de $\mathscr{E}'$.

Ex2^{op}. On l'obtient de la même façon que l'axiome précédent. □

En considérant l'ensemble des suites scindées de $\mathscr{B}$, on obtient ainsi le résultat suivant :

Corollaire 2.2 *(Relèvement des suites scindées). Soient* $(\mathscr{A}, \mathscr{E})$ *et* $(\mathscr{B}, \mathscr{F})$ *deux catégories exactes et* $L : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *un foncteur exact. On définit la famille* $\mathscr{E}_L^0 = \{s \in \mathscr{E},\ Ls \text{ scindée}\}$. *Le couple* $(\mathscr{A}, \mathscr{E}_L^0)$ *est une catégorie exacte.*

2.2. Catégorie de Frobenius

Dans la Proposition 2.3 qui suit, on donne un cadre général permettant de construire une structure de catégorie de Frobenius à partir de la donnée d'un triplet (L, M, R) de foncteurs adjoints et exacts. De plus, pour cette structure de Frobenius, les injectifs–projectifs sont faciles à décrire : ce sont les objets facteurs directs d'objets de la forme MY. On peut alors définir la catégorie M-stable comme la catégorie stable au sens de Happel [4] de la catégorie de Frobenius ainsi obtenue : c'est la Définition 2.4. Enfin, dans l'exemple 1, on montre que les nombreuses hypothèses de la Proposition 2.3 peuvent être obtenues de façon élémentaire dans le cadre abélien.

Proposition 2.3 *(Catégorie de Frobenius). Soient* $(\mathscr{A}, \mathscr{E})$ *et* $(\mathscr{B}, \mathscr{F})$ *deux catégories exactes et un foncteur exact* $M : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ *ayant un adjoint à droite* R *et un adjoint à gauche* L. *On fait les hypothèses suivantes* :

(i) $\mathscr{A}$ *est karoubienne* ;
(ii) L *et* R *sont des foncteurs exacts entre les catégories exactes* $\mathscr{A}$ *et* $\mathscr{B}$;
(iii) $\mathscr{E}_L^0 = \mathscr{E}_R^0 := \mathscr{E}'$;
(iv) *pour tout* $f : X \to X'$ *tel qu'il existe* β *vérifiant* $\beta L f = \mathrm{id}_{LX}$, *le morphisme* f *est une inflation de* $\mathscr{A}$ *(et donc de* $(\mathscr{A}, \mathscr{E}')$*)* ;
(v) *pour tout* $f : X \to X'$ *tel qu'il existe* β *vérifiant* $Rf\beta = \mathrm{id}_{RX}$, *le morphisme* f *est une déflation de* $\mathscr{A}$ *(et donc de* $(\mathscr{A}, \mathscr{E}')$*).*

Alors $(\mathscr{A}, \mathscr{E}')$ *est une catégorie de Frobenius dont les projectifs–injectifs sont les facteurs directs d'objets de la forme* MY *pour* $Y \in \mathscr{B}$ *(ces projectifs–injectifs sont appelés les objets* M*-scindés de* $\mathscr{A}$*).*

Preuve. D'après le Corollaire 2.2, $(\mathscr{A}, \mathscr{E}')$ est une catégorie exacte. Par définition, les injectifs de $(\mathscr{A}, \mathscr{E}')$ sont les objets I de $\mathscr{A}$ tels que pour toute inflation $i : X \to X'$ de $\mathscr{A}$ telle qu'il existe β vérifiant $\beta L i = \mathrm{id}_{LX}$ et pour tout $f : X \to I$, il existe $g : X' \to I$ tel que $f = gi$. L'hypothèse (iv) assure que les injectifs de $(\mathscr{A}, \mathscr{E}')$ sont les objets vérifiant pour tout $i : X \to X'$ tel qu'il existe β vérifiant $\beta L i = \mathrm{id}_{LX}$ et pour tout $f : X \to I$, il existe $g : X' \to I$ tel que $f = gi$. Comme $\mathscr{E}$ est karoubienne, les injectifs $(\mathscr{A}, \mathscr{E}')$ sont les facteurs directs d'objets de la forme MY pour $Y \in \mathscr{B}$ (voir [3, théorème 6.8] et [2, proposition 3.24]). En suivant le même raisonnement, on obtient que les projectifs de $(\mathscr{A}, \mathscr{E}')$ sont aussi les facteurs directs d'objets de la forme MY. Enfin, les propriétés des adjonctions assurent que, pour tout X, l'unité $\eta_X : X \to MLX$ de l'adjonction (L, M) est telle qu'il existe $\beta L \eta_X = \mathrm{id}_{LX}$. Ainsi, par (iv), $(\mathscr{A}, \mathscr{E}')$ a assez d'injectifs et, de même, assez de projectifs. □

On définit maintenant la notion de catégorie M-stable de la catégorie $\mathscr{A}$ vérifiant les hypothèses de la proposition précédente simplement comme la catégorie stable de la catégorie de Frobenius construite.

Définition 2.4 *(Catégorie M-stable).* Sous les hypothèses de la proposition précédente, la catégorie stable (au sens de Happel [4]) de la catégorie exacte $(\mathscr{A}, \mathscr{E}')$ est appelée la catégorie M-stable de $\mathscr{A}$ et est notée $M\,\mathrm{stab}_{\mathscr{A}}$.

On donne à présent quelques exemples concrets de la situation décrite dans la Proposition 2.3 dans le cas où $\mathscr{A}$ est une catégorie abélienne.

Exemple 1 *(Le cas abélien).* On suppose que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont des catégories abéliennes munies de leur structure maximale de catégorie exacte. L'hypothèse (i) est automatiquement vérifiée. Par ailleurs, la fidélité de L et R donne les hypothèses (iv) et (v). On retrouve ainsi l'hypothèse 4.14 de [2].

Par ailleurs, remarquons que les hypothèses (ii) et (iii) sont toujours vérifiées lorsque $L = R$.

Soient k un corps et A une k-algèbre de Frobenius ($\dim_k A < \infty$ et $A \simeq A^*$ en tant que A-module). On considère $\mathscr{A} = A$-Mod la catégorie des A-modules, $\mathscr{B} = k$-Ev la catégorie des k-espaces vectoriels et le foncteur d'induction $M = A \otimes ?: \mathscr{B} \to \mathscr{A}$. On a alors $L = R$ est le foncteur de restriction, qui est fidèle et exact. Les injectifs–projectifs pour la structure exacte introduite ci-dessus ne sont rien d'autre que les A-modules projectifs au sens usuel.

Soient $\mathcal{O}$ un anneau commutatif unitaire, G un groupe fini et H un sous-groupe de G. On considère $\mathscr{A} = \mathcal{O}G$-mod. la catégorie des G-modules sur l'anneau $\mathcal{O}$, $\mathscr{B} = \mathcal{O}H$-mod. la catégorie des H-modules sur $\mathcal{O}$ et $M = \mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}H} ?$ le foncteur d'induction. On a alors $L = R$ qui est le foncteur de restriction. Il est bien fidèle et exact.

3. Catégorie M-stable d'une catégorie triangulée

Dans cette section, on suggère une construction d'une catégorie M-stable d'une catégorie triangulée. Dans la remarque 1, on montre que, dans la catégorie M-stable, le décalage se calcule « à la Schanuel ». Enfin, dans l'exemple 2, on relie, à l'aide d'un théorème de Keller et Vossieck, les deux notions de catégorie M-stable : celle d'une catégorie exacte et celle d'une catégorie triangulée.

Définition 3.1 *(Catégorie M-stable d'une catégorie triangulée).* On considère la situation suivante : $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux catégories triangulées, $M: \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ un foncteur triangulé qui admet un adjoint à droite R et à gauche L, tous deux triangulés. On définit la catégorie M-stable de $\mathscr{A}$ comme la catégorie triangulée quotient $\mathscr{A}/\langle M\text{-scindé}\rangle$ où $\langle M\text{-scindé}\rangle$ désigne la sous-catégorie épaisse de $\mathscr{A}$ engendrée par les objets de la forme MY pour $Y \in \mathscr{B}$.

Remarque 1 *(Lemme de Schanuel triangulé).* Dans le cadre de la définition précédente, le décalage peut se calculer de la façon suivante : pour $X \in \mathscr{A}$, on considère un couple (P, i) où P est un facteur direct d'un objet de la forme MY et $i: X \to P$ (par exemple $P = MLX$ et $i = \eta_X$). On complète alors $i: X \to P$ en un triangle $X \to P \to \Omega X \to X[1]$. Dans le quotient P s'annule et ainsi ΩX s'identifie au décalé de X. Si on impose en plus à i de vérifier l'existence d'un β tel que $\beta L i = \mathrm{id}_{LX}$ alors l'identification précédente est fonctorielle (voir [2, proposition 4.4]).

Exemple 2 *(Catégorie dérivée et catégorie M-stable).* On se place dans le cadre des hypothèses de la Proposition 2.3. On note $\mathscr{H}^b(M)$ la catégorie homotopique bornée de la sous-catégorie pleine de $\mathscr{A}$ formée des objets M-scindés de $\mathscr{A}$. D'après [7] ou [6], on a $M\,\mathrm{Stab}_{\mathscr{A}} = \mathscr{D}^b(\mathscr{A}, \mathscr{E}')/\mathscr{H}^b(M)$.

Par ailleurs, on note $\mathscr{F}'$ la structure exacte sur $\mathscr{B}$ obtenue comme image réciproque de la structure des suites exactes scindées de $\mathscr{A}$ par le foncteur M (voir le Corollaire 2.2). Les adjonctions (L, M) et (M, R) s'étendent en des adjonctions (triangulées) encore notée (L, M) et (M, R) entre les catégories triangulées $\mathscr{D}^b(\mathscr{A}, \mathscr{E}')$ et $\mathscr{D}^b(\mathscr{B}, \mathscr{F}')$. Pour ce foncteur M, la sous-catégorie épaisse de $\mathscr{D}^b(\mathscr{A}, \mathscr{E}')$ engendrée par les objets de la forme MY pour $Y \in \mathscr{D}^b(\mathscr{B}, \mathscr{F})$ (qu'on note $\langle M\text{-scindé}\rangle$), est en fait $\mathscr{H}^b(M)$. En effet, comme $\mathscr{A}$ est karoubienne, la sous-catégorie pleine de $\mathscr{A}$ formée des objets M-scindés l'est aussi. Le lemme 2.4 de [1] assure que $\mathscr{H}^b(M)$ l'est aussi. Par ailleurs, la catégorie $\langle M\text{-scindé}\rangle$ contient bien entendu les complexes ayant une seule composante non nulle qui est M-scindée et donc, par extension, elle contient aussi $\mathscr{H}^b(M)$.

Ainsi la catégorie M-stable de la catégorie triangulée $\mathscr{D}^b(\mathscr{A}, \mathscr{E}')$ coïncide avec la catégorie M-stable de la catégorie $\mathscr{A}$.

Remerciements

Je remercie grandement Bernhard Keller pour ses conseils avisés ainsi que pour les nombreuses références bibliographiques qu'il m'a données.

Références

[1] P. Balmer, M. Schlichting, Idempotent completion of triangulated categories, J. Algebra 236 (2001) 819–834.
[2] V. Beck, Algèbre des invariants relatifs pour les groupes de réflexions – Catégorie stable, PhD Thesis, University Paris 7, 2008.
[3] M. Broué, Higman criterion revisited, Michigan J. Math. 58 (1) (2009) 125–179.
[4] D. Happel, Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 119, Cambridge University Press, 1988.
[5] B. Keller, Chain complexes and stable categories, Manuscripta Math. 67 (4) (1990) 379–417.
[6] B. Keller, Derived categories and their uses, in: M. Hazewinkel (Ed.), Algebra, vol. 1, Elsevier, 1996 (chapter of the handbook).
[7] B. Keller, D. Vossieck, Sous les catégories dérivées, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 305 (1987) 225–228.
[8] D. Quillen, Higher algebraic K-theory I, Lecture Notes in Math. 341 (1966) 85–147.