Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 939–942
Comptes Rendus Mathematique

Analyse fonctionnelle

Une amélioration d'un résultat de E.B. Davies et B. Simon

Rachid Zarouf

Équipe d'analyse et géométrie, Institut de mathématiques de Bordeaux, Université Bordeaux, 351, cours de la Libération, 33405 Talence, France

Reçu le 4 avril 2009 ; accepté le 9 avril 2009

Disponible sur Internet le 23 mai 2009

Présenté par Gilles Pisier

Résumé

E.B. Davies et B. Simon ont montré (entre autres résultats) la chose suivante : soit T, une matrice $n \times n$ telle que son spectre $\sigma(T)$ soit inclus dans le disque $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ et soit $C = \sup_{n \geqslant 0} \|T^n\|_{E \to E}$ (E étant $\mathbb{C}^n$ muni d'une certaine norme $|\,.\,|$). Alors $\|R(1,T)\|_{E\to E} \leqslant C(3n/\operatorname{dist}(1,\sigma(T)))^{3/2}$ où $R(\lambda,T)$ désigne la résolvante de T prise au point λ. Nous améliorons ici cette dernière inégalité à travers le résultat suivant : sous les mêmes conditions (portant sur la matrice T), pour tout $\lambda \notin \sigma(A)$ tel que $|\lambda| \geqslant 1$, on a $\|R(\lambda,T)\| \leqslant C(5\pi/3 + 2\sqrt{2})n^{3/2}/\operatorname{dist}(\lambda,\sigma)$. ***Pour citer cet article : R. Zarouf, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Sharpening a result by E.B. Davies and B. Simon. E.B. Davies and B. Simon have shown (among other things) the following result: if T is an $n \times n$ matrix such that its spectrum $\sigma(T)$ is included in the open unit disc $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ and if $C = \sup_{k \geqslant 0} \|T^k\|_{E\to E}$, where E stands for $\mathbb{C}^n$ endowed with a certain norm $|\,.\,|$, then $\|R(1,T)\|_{E\to E} \leqslant C(3n/\operatorname{dist}(1,\sigma(T)))^{3/2}$ where $R(\lambda,T)$ stands for the resolvent of T at point λ. Here, we improve this inequality showing that under the same hypotheses (on the matrix T), $\|R(\lambda,T)\| \leqslant C(5\pi/3 + 2\sqrt{2})n^{3/2}/\operatorname{dist}(\lambda,\sigma)$, for all $\lambda \notin \sigma(T)$ such that $|\lambda| \geqslant 1$. ***To cite this article: R. Zarouf, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Pour $C \geqslant 1$ et $n \in \mathbb{N}^\star$ on pose

$$K_n(C) = \sup \big\| R(\lambda, T) \big\| \operatorname{dist}\big(\lambda, \sigma(T)\big),$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $|\lambda| \geqslant 1$ et sur l'ensemble des opérateurs $T : E \to E$ avec $E = (\mathbb{C}^n, |\,.\,|)$ et vérifiant $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|T^k\|_{E\to E} \leqslant C$.

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant :

Théorème. (i) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour tout $C \geqslant 1$, on a*

$$K_n(C) \leqslant C\big(5\pi/3 + 2\sqrt{2}\big) n^{3/2}.$$

Adresse e-mail : rzarouf@math.u-bordeaux1.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.04.012

(ii) *De plus, pour tout* $C \geqslant 1$ *on a*

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-\frac{3}{2}} K_n(C) \leqslant 5C\pi/3.$$

Commentaires. (1) Ce théorème est un résultat de nature « numérique » dans la mesure où il s'agit d'une estimation du type $\|R(\lambda, T)\| \leqslant K \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T))$, où la question est d'évaluer la taille de la constante $K = K_n(C)$ en fonction des paramètres dont elle dépend, à savoir n et C.

(2) Le résultat principal de E.B. Davies et B. Simon est le suivant, voir [1] : Soit K_n la même borne supérieure que celle donnant $K_n(C)$ en restreignant la condition (C_1) : [$T : E \to E$ *avec* $E = (\mathbb{C}^n, |\,.\,|)$ *et vérifiant* $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|T^k\|_{E\to E} \leqslant C$] par (C_2) : [*T est une contraction d'un espace de Hilbert*]. Alors le facteur $n^{\frac{3}{2}}$ "devient" n et $K_n = \operatorname{cotan}(\pi/4n)$.

(3) Dans ce dernier cas (où T est une contraction d'un espace de Hilbert), la méthode appliquée ci-dessous pour montrer le Théorème faisant l'objet de cette note, donne $K_n \leqslant an$ où $a = (1 + \max_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|)$. En particulier, pour $r = \max_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| < 4/\pi - 1$, cette majoration est plus précise que [1].

(4) En ce qui concerne l'exactitude du véritable ordre de croissance de la constante $K_n(C)$, on sait pour l'instant que $K_n(C)/n \geqslant K_n/n \geqslant b$ où $b = (2 + \sqrt{3})/3$, voir [1], p. 4.

(5) L'hypothèse du théorème entraîne trivialement que $\|R(\lambda, T)\| \leqslant C(|\lambda| - 1)^{-1}$, $|\lambda| > 1$. Ce théorème peut donc être vu comme un analogue unilatéral du "Lemme de Domar" bien connu (voir [2,6]) : si $\sigma \subset \mathbb{D}$ et u une fonction sous-harmonique dans $\mathbb{C} \setminus \sigma$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma$, $u(\lambda) \leqslant C \max\{||\lambda| - 1|^{-1}, \operatorname{dist}(\lambda, \sigma)^{-1}\}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma$, tel que $|\lambda| \geqslant 1/2$, $u(\lambda) \leqslant 447C \operatorname{dist}(\lambda, \sigma)^{-1}$. Une version aussi générale pour des estimations unilatérales ($|\lambda| \geqslant 1$), n'est pas vraie (exemple : $u(\lambda) = \|R(\lambda, M_\theta)\|$, où M_θ est l'opérateur modèle sur $K_\theta = H^2 \Theta \theta H^2$, $\theta = \exp(\frac{z+1}{z-1})$, voir [4]), mais notre résultat montre qu'elle est correcte pour des résolvantes de matrices de taille n (avec une constante dépendant de n).

Nous avons recours en premier lieu au lemme suivant, de type principe du maximum :

Lemme. *Soient* $C \geqslant 1$, $A > 0$ *tels que pour tout opérateur T agissant sur* $(\mathbb{C}^n, |\,.\,|)$ *et de spectre* $\sigma(T)$, *la condition suivante soit réalisée* :

$$\begin{cases} \sup_{k\geqslant 0} \|T^k\| \leqslant C \\ \sigma(T) \subset \mathbb{D} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \big[\forall \lambda_\star \textit{ tel que } |\lambda_\star| = 1, \operatorname{dist}\big(\lambda_\star, \sigma(T)\big)\big\|R(\lambda_\star, T)\big\| \leqslant A\big],$$

alors,

$$K_n(C) \leqslant A.$$

Preuve. Soit λ tel que $|\lambda| > 1$. λ peut alors s'écrire $\lambda = \rho\lambda_\star$ avec $\rho > 1$ et $|\lambda_\star| = 1$. On pose $T_\star = \frac{1}{\rho} T$. Dans ces conditions, $\sup_{k\geqslant 0} \|T_\star^k\| \leqslant C$ et $\sigma(T_\star) = \frac{1}{\rho}\sigma(T) \subset \mathbb{D}$. Par conséquent, on a $\operatorname{dist}(\lambda_\star, \sigma(T_\star))\|R(\lambda_\star, T_\star)\| \leqslant A$, ce que l'ont peut encore écrire $\rho \operatorname{dist}(\lambda_\star, \sigma(T_\star))\|\rho^{-1} R(\lambda_\star, T_\star)\| \leqslant A$. Il suffit maintenant de remarquer que $\rho \operatorname{dist}(\lambda_\star, \sigma(T_\star)) = \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T))$ et $\rho^{-1} R(\lambda_\star, T_\star) = R(\lambda, T)$. □

Preuve du Théorème. Soient T une matrice de taille n vérifiant la condition (C_1) et $\sigma = \sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ son spectre (les λ_j étant comptés avec leur multiplicité). On défini le produit de Blaschke $B = \prod_{k=1}^n b_{\lambda_i}$, où pour tout $i = 1 \ldots n$, $b_{\lambda_i} = \frac{\lambda_i - z}{1 - \bar{\lambda}_i z}$. Tout d'abord,

$$\big\|R(\lambda, T)\big\| \leqslant C \left\| \frac{1}{\lambda - z} \right\|_{W/BW}$$

(voir [3], Théorème 3.24, p. 31), où W est l'algèbre de Wiener des séries de Taylor absolument convergentes, $W = \{f = \sum_{k\geqslant 0} \hat{f}(k) z^k \colon \|f\|_W = \sum_{k\geqslant 0} |\hat{f}(k)| < \infty\}$ et

$$\left\| \frac{1}{\lambda - z} \right\|_{W/BW} = \inf\left\{ \|f\|_W \colon f(\lambda_j) = \frac{1}{\lambda - \lambda_j},\ j = 1 \ldots n \right\}.$$

On suppose dans un premier temps que $|\lambda| > 1$. Soit P_B la projection orthogonale de l'espace de Hardy H^2 sur $K_B = H^2 \Theta BH^2$. La fonction $f = P_B(\frac{1}{\lambda} k_{1/\bar{\lambda}})$ verifie bien $f - \frac{1}{\lambda - z} \in BW, \forall j = 1 \dots n$. En particulier, on a

$$\left\| \frac{1}{\lambda - z} \right\|_{W/BW} \leqslant \left\| \frac{1}{\lambda} P_B k_{1/\bar{\lambda}} \right\|_W .$$

Mais on sait que

$$P_B k_{1/\bar{\lambda}} = \sum_{k=1}^{n} (k_{1/\bar{\lambda}}, e_k)_{H^2} e_k$$

où la famille $(e_k)_{k=1}^n$ (appelée base de Malmquist relative à σ, voir [5], p. 117) définie par,

$$e_1 = \left(1 - |\lambda_1|^2\right)^{\frac{1}{2}} f_1, \qquad e_k = \left(1 - |\lambda_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^{k-1} b_{\lambda_j} \right), \qquad f_k = \left(f_k / \|f_k\|_2\right) \prod_{j=1}^{k-1} b_{\lambda_j}, \quad k \geqslant 2,$$

où $f_k(z) = \frac{1}{1 - \overline{\lambda_k} z}$. Du coup,

$$P_B k_{1/\bar{\lambda}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{e_k(1/\bar{\lambda})} e_k .$$

Nous allons maintenant appliquer l'inégalité de Hardy $\|f\|_W \leqslant \pi \|f'\|_{H^1} + |f(0)|$ (voir N. Nikolski [4], p. 370, 8.7.4(c)) à $P_B k_{1/\bar{\lambda}}$ en profitant du fait remarquable que pour $k = 2 \dots n$

$$e'_k = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{b'_{\lambda_i}}{b_{\lambda_i}} e_k + \overline{\lambda_k} \frac{1}{(1 - \overline{\lambda_k} z)} e_k .$$

On trouve alors

$$(P_B k_{1/\bar{\lambda}})' = (k_{1/\bar{\lambda}}, e_1)_{H^2} \frac{\bar{\lambda}_1}{(1 - \overline{\lambda_1} z)} e_1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{b'_{\lambda_i}}{b_{\lambda_i}} \sum_{k=i+1}^{n-1} (k_{1/\bar{\lambda}}, e_k)_{H^2} e_k + \sum_{k=2}^{n} (k_{1/\bar{\lambda}}, e_k)_{H^2} \overline{\lambda_k} \frac{1}{(1 - \overline{\lambda_k} z)} e_k .$$

Comme $k_{1/\bar{\lambda}}$ est le noyau reproduisant de H^2 associé au point $1/\bar{\lambda} \in \mathbb{D}$, on trouve $(e_k, k_{1/\bar{\lambda}})_{H^2} = e_k(1/\bar{\lambda})$, et donc

$$(P_B k_{1/\bar{\lambda}})' = \overline{e_1(1/\bar{\lambda})} \frac{\bar{\lambda}_1}{(1 - \overline{\lambda_1} z)} e_1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{b'_{\lambda_i}}{b_{\lambda_i}} \sum_{k=i+1}^{n-1} \overline{e_k(1/\bar{\lambda})} e_k + \sum_{k=2}^{n} \overline{e_k(1/\bar{\lambda})}\, \overline{\lambda_k} \frac{1}{(1 - \overline{\lambda_k} z)} e_k .$$

Maintenant,

$$\left\| e_1(1/\bar{\lambda}) \frac{\lambda_1}{(1 - \overline{\lambda_1} z)} e_1 \right\|_{H^1} \leqslant \left| e_1(1/\bar{\lambda}) \right| \left\| \frac{\lambda_1}{(1 - \overline{\lambda_1} z)} \right\|_{H^2} \|e_1\|_{H^2} \leqslant |\lambda| \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma)}$$

en utilisant à la fois l'inégalité de Cauchy–Schwarz et le fait que e_1 est de norme 1 dans H^2. Par la même raison (la famille $(e_k)_{k=1}^n$ est orthonormale dans H^2), on trouve

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=2}^{n} \overline{\lambda_k}\, \overline{e_k(1/\bar{\lambda})} \frac{1}{(1 - \overline{\lambda_k} z)} e_k \right\|_{H^1} &\leqslant \sum_{k=2}^{n} \left| e_k(1/\bar{\lambda}) \right| \left\| \lambda_k \frac{1}{(1 - \overline{\lambda_k} z)} \right\|_{H^2} \|e_k\|_{H^2} \\ &\leqslant \sum_{k=2}^{n} \left| \frac{(1 - |\lambda_k|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \overline{\lambda_k}/\bar{\lambda}} \right| \frac{1}{\sqrt{1 - |\lambda_k|^2}} \leqslant |\lambda| \frac{(n-1)}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma)} . \end{aligned}$$

Finalement,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b'_{\lambda_i}}{b_{\lambda_i}} \sum_{k=i+1}^{n} \overline{e_k(1/\bar{\lambda})} e_k \right\|_{H^1} \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \left\| \frac{b'_{\lambda_i}}{b_{\lambda_i}} \right\|_{L^2} \left(\sum_{k=i+1}^{n} \left| e_k(1/\bar{\lambda}) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Comme en outre on a $b'_{\lambda_i}/b_{\lambda_i} = 1/(\lambda_i - z) + \overline{\lambda_i}/(1-\overline{\lambda_i}z)$, on en déduit que $\|b'_{\lambda_i}/b_{\lambda_i}\|_{L^2} \leqslant 2/\sqrt{1-|\lambda_i|^2}$, et que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b'_{\lambda_i}}{b_{\lambda_i}}\sum_{k=i+1}^{n}\overline{e_k(1/\bar{\lambda})e_k}\right\|_{H^1} \leqslant 2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{(1-|\lambda_i|^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\sum_{k=i+1}^{n}\left|\frac{(1-|\lambda_k|^2)}{(1-\overline{\lambda_k}/\bar{\lambda})^2}\right|\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Maintenant, sans perte de généralité on peut supposer que la suite $(|\lambda_i|)_{i=1}^n$ est croissante (quitte à réordonner la séquence σ). Dans ce cas, pour $k \geqslant i+1 > i$ on a $1-|\lambda_k|^2 \leqslant 1-|\lambda_i|^2$ ce qui donne

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b'_{\lambda_i}}{b_{\lambda_i}}\sum_{k=i+1}^{n}\overline{e_k(1/\bar{\lambda})e_k}\right\|_{H^1} &\leqslant 2\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{k=i+1}^{n}\left|\frac{1}{(1-\overline{\lambda_k}/\bar{\lambda})^2}\right|\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant 2\frac{|\lambda|}{\operatorname{dist}(\lambda,\sigma)}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{k=i+1}^{n}1\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{4}{3}|\lambda|\frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda,\sigma)}\left(n^{\frac{3}{2}}-1\right),\end{aligned}$$

puisque $\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{j} \leqslant \int_1^n \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$. Finalement,

$$\begin{aligned}\left\|\left(\frac{1}{\lambda}P_B k_{1/\bar{\lambda}}\right)'\right\|_{H^1} &\leqslant \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda,\sigma)} + \frac{(n-1)}{\operatorname{dist}(\lambda,\sigma)} + \frac{4}{3}\frac{n^{\frac{3}{2}}-1}{\operatorname{dist}(\lambda,\sigma)} \\ &= \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda,\sigma)}\left(-\frac{4}{3}+n+\frac{4}{3}n^{\frac{3}{2}}\right) \leqslant \frac{5}{3}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{\operatorname{dist}(\lambda,\sigma)},\end{aligned}$$

la dernière inégalité reposant sur le fait que pour tout $x \geqslant 0$, $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + \frac{4}{3} \geqslant 0$. Ceci donne

$$\left\|\frac{1}{\lambda}P_B k_{1/\bar{\lambda}}\right\|_W \leqslant \frac{5}{3}\pi\frac{n^{\frac{3}{2}}}{\operatorname{dist}(\lambda,\sigma)} + \left|\frac{1}{\lambda}\right|\sum_{k=1}^{n}\left|e_k(1/\bar{\lambda})\right|\left|e_k(0)\right| \leqslant \frac{5}{3}\pi\frac{n^{\frac{3}{2}}}{\operatorname{dist}(\lambda,\sigma)} + 2n.$$

En particulier, (ii) est démontré. Pour résumer, on a pour $n \geqslant 1$,

$$\left\|R(\lambda,T)\right\| \leqslant C\left(5\pi/3 + \frac{2}{\sqrt{n}}\operatorname{dist}(\lambda,\sigma)\right)\frac{n^{\frac{3}{2}}}{\operatorname{dist}(\lambda,\sigma)}.$$

Faisons maintenant tendre radialement λ vers sa projection $\lambda_\star$ sur le tore $\mathbb{T}$ et remarquons qu'alors (puisque $\operatorname{dist}(\lambda_\star,\sigma) \leqslant 2$),

$$\left\|R(\lambda_\star,T)\right\| \leqslant C\left(5\pi/3 + 2\sqrt{2}\right)\frac{n^{\frac{3}{2}}}{\operatorname{dist}(\lambda_\star,\sigma)}.$$

Il reste alors à appliquer le lemme avec $A = (5\pi/3 + 2\sqrt{2})n^{\frac{3}{2}}$ pour achever la preuve de (i). □

Remerciements

Je tiens à remercier infiniment le Professeur Nikolai Nikolski pour ses conseils ô combien précieux.

Références

[1] E.B. Davies, B. Simon, Eigenvalue estimates for non-normal matrices and the zeros of random orthogonal polynomials on the unit circle, J. Approx. Theory 141 (2) (2006) 189–213.

[2] Y. Domar, On the existence of a largest subharmonic minorant of a given function, Ark. Mat. 3 (1958) 429–440.

[3] N. Nikolski, Condition numbers of large matrices and analytic capacities, St. Petersburg Math. J. 17 (2006) 641–682.

[4] N. Nikolski, Operators, Function, and Systems: An Easy Reading, vol. 1, AMS, Providence, 2002.

[5] N. Nikolski, Treatise on the Shift Operator, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[6] N. Nikolski, S.A. Khrushchev, Function model and some problems in the spectral theory of functions, Trudy Mat. Inst. Steklov. 176 (1987) 97–210 (in Russian). English transl.: Proc. Steklov Inst. Math. 3 (1988) 101–214.