Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 623–626
Comptes Rendus Mathematique

Équations aux dérivées partielles

Nouveaux résultats pour les équations de la neutronique

Mohamed Boulanouar

LMCM-RMI, 22 rue des canadiens, 86000 Poitiers, France

Reçu le 11 août 2008 ; accepté après révision le 10 mars 2009

Disponible sur Internet le 28 avril 2009

Présenté par Jean-Michel Bony

Résumé

Cette Note est consacrée aux nouveaux résultats pour les équations de la neutronique. ***Pour citer cet article : M. Boulanouar, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

New results for neutronic equations. This Note deals with new results for neutronic equations. ***To cite this article: M. Boulanouar, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

1. Introduction

Nous supposons $X \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de frontière ∂X de classe C^1 et $\mathrm{d}\mu$ une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^n$ de support V. Nous désignons par $n(x)$ le vecteur unitaire de la normale extérieure à X en $x \in \partial X$. Nous posons $\Gamma = \partial X \times V$, $\Gamma_0 = \{(x,v) \in \Gamma,\ v \cdot n(x) = 0\}$ et $\Gamma_\pm = \{(x,v) \in \Gamma,\ \pm v \cdot n(x) > 0\}$ avec l'hypothèse $\mathrm{d}\gamma\, \mathrm{d}\mu(\Gamma_0) = 0$ où $\mathrm{d}\gamma$ est la mesure de surface sur ∂X. Nous introduisons le temps de passage $t(x,v) = \inf\{t,\ x - tv \notin X\}$ si $(x,v) \in X \times V$ et $\tau(x,v) = \inf\{t,\ x - tv \notin X\}$ si $(x,v) \in \Gamma_+$. Soit enfin la corde $\theta(x,v) = t(x,v) + t(x,-v)$. Dans ce contexte, nous considérons l'opérateur de transport

$$T_K\varphi(x,v) = -v \cdot \nabla_x \varphi(x,v), \tag{1}$$

$$\gamma_-\varphi = K(\gamma_+\varphi) \tag{2}$$

où, $(x,v) \in \Omega$ et K est un opérateur linéaire défini sur les espaces de traces. Des études complètes concernant le cas $\|K\| < 1$ ont été faites dans [1,6,7] où l'on a montré l'existence d'un semi-goupe de contractions. Le cas $\|K\| \geqslant 1$ présente d'énormes difficultés. En effet, du point de vue physique, l'une de ces difficultés est directement liée à l'absence totale du contrôle du flux croissant des particules rentrantes par Γ_+.

Dans cette Note, nous étudions le cas $\|K\| \geqslant 1$. Nous montrons alors que l'opérateur (1)–(2) engendre un semi-groupe fortement continu. Mais avant cela, nous donnons un sens à (2). Enfin, pour les démonstrations des résultats annoncés dans cette Note, nous renvoyons le lecteur à [3].

Adresse e-mail : boulanouar@free.fr.

1631-073X/$ – see front matter © 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2009.03.025

2. Théorème de génération

Nous considérons le cadre fonctionnel $L^p(\Omega)$ $(p \geqslant 1)$ muni de la norme

$$\|\varphi\|_p = \left[\int_\Omega \left|\varphi(x,v)\right|^p \mathrm{d}x\,\mathrm{d}\mu(v)\right]^{\frac{1}{p}} \tag{3}$$

où, $\Omega \overset{def}{=} X \times V$ et nous introduisons

$$\widetilde{W}^p(\Omega) = \left\{\varphi \in L^p(\Omega),\ v\cdot\nabla_x\varphi \in L^p(\Omega)\right\},$$
$$\|\varphi\|_{\widetilde{W}^p(\Omega)} = \left[\|\varphi\|_p^p + \|v\cdot\nabla_x\varphi\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Pour donner un sens aux applications de traces $\gamma_\pm : \varphi \to \varphi\,|_{\Gamma_\pm}$, et donc aux conditions aux limites (2), nous introduisons alors les espaces de traces $L^p(\Gamma_\pm)$ et $L^p(\Gamma_\pm, \mathrm{d}\tilde{\xi}_\pm)$ $(p \geqslant 1)$ munis de leur norme

$$\|\varphi\|_{L^p(\Gamma_\pm)} = \left[\int_{\Gamma_\pm} \left|\varphi(x,v)\right|^p \mathrm{d}\xi\right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \|\varphi\|_{L^p(\Gamma_\pm,\mathrm{d}\tilde{\xi}_\pm)} = \left[\int_{\Gamma_\pm} \left|\varphi(x,v)\right|^p \mathrm{d}\tilde{\xi}_\pm\right]^{\frac{1}{p}}$$

où, $\mathrm{d}\xi = |v\cdot n(x)|\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\mu(v)$ et $\mathrm{d}\tilde{\xi}_\pm = \min\{\tau(x,\pm v), C\}\,\mathrm{d}\xi$ avec $C > 0$ une constante fixée. Dans ce contexte, il est bien connu que les applications de traces $\gamma_\pm : \widetilde{W}^p(\Omega) \to L^p(\Gamma_\pm, \mathrm{d}\tilde{\xi}_\pm)$ sont continues et surjectives avec un relèvement continu (voir [4,5]). A notre connaissance, cet unique résultat ne convient pas toujours pour les applications. En effet, soit $\varphi \in \widetilde{W}^1(\Omega)$. La formule de Green, quand elle est applicable, entraîne

$$\int_\Omega v\cdot\nabla_x|\varphi|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\mu(v) = \int_{\Gamma_+} \left|\gamma_+\varphi(x,v)\right|\mathrm{d}\xi - \int_{\Gamma_-} \left|\gamma_-\varphi(x,v)\right|\mathrm{d}\xi.$$

Visiblement, les espaces $L^1(\Gamma_\pm)$ sont naturels pour les traces de $\varphi \in \widetilde{W}^1(\Omega)$ que les résultats de [4,5] n'offrent malheureusement pas car $\mathrm{d}\xi \neq \mathrm{d}\tilde{\xi}$. Cela explique pourquoi, dans la littérature [1,6,7], l'opérateur de transport (1) muni des conditions aux limites (2) se voit lui conférer toujours le domaine

$$D(T_K) = \left\{\varphi \in \widetilde{W}^p(\Omega), \gamma_\pm\varphi \in L^p(\Gamma_\pm),\ \gamma_-\varphi = K\gamma_+\varphi\right\}$$

où $\gamma_\pm\varphi$ doivent obligatoirement appartenir à $L^p(\Gamma_\pm)$. Nous concluons que $\widetilde{W}^p(\Omega)$ n'est pas convenable pour assurer $\gamma_\pm\varphi \in L^p(\Gamma_\pm)$. Soit alors l'espace

$$W^p(\Omega) = \left\{\varphi \in L^p(\Omega), v\cdot\nabla_x\varphi \in L^p(\Omega), \theta^{-\frac{1}{p}}\varphi \in L^p(\Omega)\right\},$$
$$\|\varphi\|_{W^p(\Omega)} = \left[(p-1)\|\varphi\|_p^p + \|v\cdot\nabla_x\varphi\|_p^p + \left\|\theta^{-\frac{1}{p}}\varphi\right\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

pour lequel nous avons le nouveau théorème suivant

Théorème 2.1. *(Voir [2].) Les applications $\gamma_\pm : W^p(\Omega) \to L^p(\Gamma_\pm)$ sont continues et surjectives avec un relèvement continu.*

Ainsi l'opérateur (1) peut être défini sur le domaine

$$D(T_K) = \left\{\varphi \in W^p(\Omega),\ \gamma_-\varphi = K\gamma_+\varphi\right\}. \tag{4}$$

A l'occasion, nous retrouvons aussi [4,5] comme suit

Corollaire 2.1. *(Voir [4,5].) Les applications $\gamma_\pm : \widetilde{W}^p(\Omega) \to L^p(\Gamma_\pm, \mathrm{d}\tilde{\xi}_\pm)$ sont continues et surjectives avec un relèvement continu.*

Maintenant, nous considérons $X_\omega^p \overset{def}{=} L^p(\Omega, h_\omega)$, $(\omega \geqslant 0,\ p \geqslant 1)$ avec

$$\|\varphi\|_{\omega,p} = \left[\int_\Omega \left|\varphi(x,v)\right|^p h_\omega^p(x,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\mu(v)\right]^{\frac{1}{p}} \tag{5}$$

où, $h_\omega(x,v) = e^{-\omega t(x,-v)}$. Notons que $X_0^p = L^p(\Omega)$ et si $\omega > 0$, (3) et (5) ne sont pas équivalentes sur $L^p(\Omega)$ puisque l'on a seulement $\|\varphi\|_p \leqslant \|\varphi\|_{\omega,p}$. Soit

$$W_\omega^p(\Omega) = \left\{\varphi \in X_\omega^p,\ v\cdot\nabla_x\varphi \in X_\omega^p,\ \theta^{-\frac{1}{p}}\varphi \in X_\omega^p\right\},$$
$$\|\varphi\|_{W_\omega^p(\Omega)} = \left[(p-1)\|\varphi\|_{\omega,p}^p + \|v\cdot\nabla_x\varphi\|_{\omega,p}^p + \left\|\theta^{-\frac{1}{p}}\varphi\right\|_{\omega,p}^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$(\omega \geqslant 0,\ p \geqslant 1)$. Dans ce contexte, le Théorème 2.1 implique

Lemme 2.1. *Soit $p \geqslant 1$ et $\omega \geqslant 0$. L'application $\gamma_+ : W_\omega^p(\Omega) \to L^p(\Gamma_+)$ est continue et surjective avec un relèvement continu.*

Ce lemme nous permet de définir l'opérateur (1) sur le domaine

$$D(T_K) = \left\{\varphi \in W_\omega^p(\Omega),\ \gamma_-\varphi = K\gamma_+\varphi\right\}. \tag{6}$$

Définition 2.2. Un opérateur linéaire K de $L^p(\Gamma_+)$ dans $L^p(\Gamma_-)$ est *admissible* si (K est borné et $\|K\| < 1$) ou (K est compact et $\|K\| \geqslant 1$).

Un opérateur compact est toujours admissible alors qu'un opérateur borné ne l'est pas systématiquement. Nous montrons que pour tout opérateur admissible K, il existerait une constante $\omega_K \geqslant 0$ tel qu'on ait $]\omega_K, \infty[\subset \rho(T_K)$. Maintenant, nous énonçons le résultat principal de cette Note comme suit

Théorème 2.3. *Soit K un opérateur admissible. L'opérateur* (1)–(6) *engendre, sur X_ω^p $(\omega \geqslant \omega_K,\ p \geqslant 1)$, un C_0-semi-groupe $(U_K(t))_{t\geqslant 0}$ vérifiant*

$$\left\|U_K(t)\right\|_{\mathcal{L}(X_\omega^p)} \leqslant e^{\omega t}, \quad t \geqslant 0.$$

Corollaire 2.2. *(Voir [1,6,7].) Soit K un opérateur borné et $\|K\| < 1$. L'opérateur* (1)–(4) *engendre, sur $L^p(\Omega)$, un C_0-semi-groupe $(U_K(t))_{t\geqslant 0}$ de contractions.*

Corollaire 2.3. *Soit K un opérateur compact avec $\|K\| \geqslant 1$. Si, l'on a*

$$T_0 \overset{def}{=} \sup_{(x,v)\in\Omega} t(x,-v) < \infty$$

alors, l'opérateur (1)–(4) *engendre, sur $L^p(\Omega)$ $(p \geqslant 1)$, un C_0-semi-groupe $(U_K(t))_{t\geqslant 0}$ vérifiant*

$$\left\|U_K(t)\right\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} \leqslant e^{\omega_K(T_0+t)}, \quad t \geqslant 0.$$

Remerciements

Ce projet est entièrement financé par LMCM-RMI.

Références

[1] R. Beals, V. Protopopescu, Abstract time dependent transport equations, J. Math. Anal. Appl. 121 (1987) 370–405.
[2] M. Boulanouar, New trace theorems for neutronic function spaces, préprint.
[3] M. Boulanouar, New results in abstract time dependent transport equations, préprint.

[4] M. Cessenat, Théorèmes de trace L^p pour des espaces de fonctions de la neutronique, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 299 (1984) 831–834.
[5] M. Cessenat, Théorèmes de trace pour des espaces de fonctions de la neutronique, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 300 (1985) 89–92.
[6] W. Greenberg, C.V.M. van der Mee, V. Protopopescu, Boundary Value Problem in Abstract Kinetic Theory, Birkhäuser, Basel, 1987.
[7] J. Voigt, Functional analytic treatment of the initial boundary value problem for collisionless gases, Habilitationsschrift, Universität München, 1981.