

Analyse numérique/Équations aux dérivées partielles

Une méthode combinée d'éléments finis à deux grilles/bases réduites pour l'approximation des solutions d'une E.D.P. paramétrique

Rachida Chakir^a, Yvon Maday^{a,b}

^a UPMC Université Paris 06, UMR 7598, Laboratoire Jacques-Louis Lions, 75005 Paris, France

^b Division of Applied Mathematics, Brown University, 182 George Street, Providence, RI 02912, États-Unis

Reçu le 10 octobre 2008 ; accepté après révision le 11 février 2009

Disponible sur Internet le 17 mars 2009

Présenté par Olivier Pironneau

Résumé

Pour l'optimisation mathématique ou le callage de paramètres, le même problème modélisé par des équations aux dérivées partielles dépendant de paramètres doit être résolu de nombreuses fois. La méthode des bases réduites peut être très performante dans ce cadre et des progrès récents ont permis de la fiabiliser, d'étendre ses applications à des problèmes très non linéaires et d'augmenter le cadre de celle-ci. Dans un contexte industriel par contre, il n'est parfois pas possible de rentrer suffisamment dans le code (par exemple de type éléments finis utilisés pour calculer les éléments des bases réduites) pour intégrer tous les calculs « hors lignes » nécessaires à la mise en oeuvre performante de la méthode. Nous proposons ici une approche alternative qui combine un argument de sous-grille d'éléments finis et d'en accélérer la convergence grâce à des arguments de bases réduites. **Pour citer cet article :** R. Chakir, Y. Maday, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

A two-grid finite-element/reduced basis scheme for the approximation of the solution of parametric dependent P.D.E. In the frame of mathematical optimization procedures or parameter fitting the same problem, modeled with partial differential equations depending on a parameter has to be solved many times for different sets of parameters. The reduced basis method may be successful in this frame and recent progress have permitted to make the computations reliable thanks to *a posteriori* estimators and to extend the method to non linear problems thanks to the “magic points” interpolation. However, in an industrial context, it may not be possible to use the code (for example of finite element type that allows for evaluating the elements of the reduced basis) to perform all the “off-line” computations necessary for an efficient performance of the reduced basis method. We propose here an alternating approach based on a coarse grid finite element the convergence of which is accelerated through the reduced basis. **To cite this article:** R. Chakir, Y. Maday, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Let X be a closed subspace of the Sobolev space $H^1(\Omega)$ over a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ and a a bilinear form, continuous and coercive over X that depends additionally on a parameter $\mu \in \mathcal{D}$. In order to approximate the solutions to problem (1), one can classically refer to a finite element approach, involving a finite element space X_h , that leads to approximate solutions $u_h(\mu)$ satisfying (3) for \mathbb{P}_1 finite element approximations or, in the many-query and real-time contexts, to the reduced basis method based on a discrete space $X_h^N = \text{Span}\{u_h(\mu_i), i = 1, \dots, N\}$. One of the challenges is to determine the μ_i so that (5) is true for a small given $\varepsilon = \varepsilon(N) > 0$. Various recent contributions have permitted to extend the range of the reduced basis method, e.g. the *a posteriori* error estimates for validation and determination of the proper parameters μ_i 's [3], the “magic points”, for generalization to nonlinear problems [1]. The method takes advantage of the low (Kolmogorov) dimension of the set of all solutions $u(\mu)$ when $\mu \in \mathcal{D}$, leading to moderate N and leads to a stiffness matrix $a(u_h(\mu_i), u_h(\mu_j); \mu)$ of the Galerkin approach with a small size. Most of the times, all the expensive computations (evaluation of good approximations $u_h(\mu_i)$ through the accurate finite element method), pre-computations of partial matrices involved in the online construction of the stiffness matrix are done off-line which allows to have online computations that scales like powers of N and do not involve the dimension of the finite element space X_h .

In an industrial framework, the finite element code is often locked and some of the offline computations cannot be performed, hence the reduced basis method cannot be efficiently implemented. In such a frame, an alternative can be proposed. First of all, for a stable implementation of the reduced basis technique, it is mandatory to process the basis $u(\mu_i)$; we propose here to solve an eigenvalue problem: find $\xi \in X_h^N$ and $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $\forall v \in X_h^N, \int_{\Omega} \nabla \xi \nabla v = \lambda \int_{\Omega} \xi v$ that provides $L^2(\Omega)$ -orthonormal eigenvectors $\xi_{i,\text{BR}}$.

We remark that, in some sense, the standard reduced basis method allows to evaluate the optimal coefficients $\beta_i^h(\mu) = \int_{\Omega} u_h(\mu) \xi_{i,\text{BR}}$ of the best approximation of $u_h(\mu)$ in X_h^N . Our alternative method consists in proposing, as a cheap surrogate to $\beta_i^h(\mu)$ the $\beta_i^H(\mu) = \int_{\Omega} u_H(\mu) \xi_{i,\text{BR}}$, where $u_H(\mu)$, for $H \gg h$ and $X_H \subset X_h$ is less expensive to compute and then construct $u_N^{Hh}(\mu) = \sum_{i=1}^N \beta_i^H(\mu) \xi_{i,\text{BR}} \in X_h^N$.

Since, on the one hand $|\beta_i^h(\mu) - \beta_i^H(\mu)| \leq \|u_h(\mu) - u_H(\mu)\|_{0,\Omega}$ while on the other hand, standard estimates provide $\|u(\mu) - u_H(\mu)\|_{0,\Omega} \leq cH^2$ we get $\|u(\mu) - u_N^{Hh}(\mu)\|_X \leq \varepsilon + c_3h + c_4H^2$ that is equivalent to (5) for $h \sim H^2$ (for \mathbb{P}_1 approximations). The numerical simulations reported in Tables 1, 2 (for \mathbb{P}_1 approximations) and 3 (for \mathbb{P}_2 approximations) illustrate the interest of the approach on a problem with a corner singularity and another with a boundary layer.

1. Introduction

Soit X un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$. On considère le problème de trouver $u(\mu) \in X$ solution du problème variationnel suivant :

$$\forall v \in X, \quad a(u(\mu), v; \mu) = (f, v) \quad (1)$$

où a est une forme bilinéaire sur X , continue et coercive dépendant d'un (jeu de) paramètre(s) μ appartenant à un ensemble \mathcal{D} et f est une fonction donnée dans $L^2(\Omega)$ par exemple. On suppose que l'on veut connaître la solution $u(\mu)$ pour de nombreuses valeurs de μ .

La méthode des bases réduites repose sur la propriété, de nombreuses fois vérifiée, que l'ensemble des solutions $\mathcal{M}^\mu = \{u(\mu), \mu \in \mathcal{D}\}$ est de petite complexité, au sens où, par exemple l'épaisseur de Kolmogorov de \mathcal{M}^μ est petite (voir [2]). Il en résulte que, pour toute valeur de $\varepsilon > 0$, il existe un (petit) ensemble de paramètres $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ dans \mathcal{D} , où $N = N(\varepsilon)$, bien choisis, tels que,

$$\forall \mu, \quad \exists \{\alpha_i(\mu)\}_i, \quad \left\| u(\mu) - \sum_{i=1}^N \alpha_i(\mu) u(\mu_i) \right\|_X \leq \varepsilon. \quad (2)$$

La méthode des bases réduites consiste alors à proposer une approximation de Galerkin de (1) dans un espace X^N engendré par des solutions $u(\mu_i), i = 1, \dots, N(\varepsilon)$, et de profiter de la petite taille de $N(\varepsilon)$ pour obtenir une solution approchée de (1) avec peu de calculs.

Pour que la méthode présente un réel intérêt, les (ou des) paramètres pertinents μ_i doivent être identifiés, les solutions $u(\mu_i)$ correspondantes doivent être trouvées ou du moins une très bonne approximation doit être disponible et pour une nouvelle valeur de μ , la matrice de rigidité, $a(u(\mu_i), u(\mu_j); \mu)$ doit être formée. Indépendamment de la façon de répondre à ces points et de la pertinence de l'approche, on note que les deux premiers points ne dépendent pas du paramètre μ courant et peuvent donc être réalisés dans une étape préalable. Par contre, le troisième point en dépend et doit être effectué, à chaque nouvelle évaluation de μ ; il est donc fondamental qu'il puisse être fait avec une faible complexité.

Les recherches récentes ont permis de remplir ce programme de façon cohérente et d'étendre le spectre d'utilisation de la méthode des bases réduites, en particulier par la « méthode des points magiques » pour traiter des non linéarités [1] et la définition d'estimateurs d'erreur *a posteriori* pour fiabiliser les résultats [3] et rechercher les paramètres pertinents. La méthode actuelle des bases réduites nécessitant d'utiliser des modules indépendants intervenant dans la mise en œuvre de la méthode de discrétisation, certains calculs ne peuvent être réalisés dû à une utilisation en boîte noire du code de simulation dans le cas industriel.

Nous proposons ici une idée simple pour tirer néanmoins profit, même dans ce cadre défavorable, du concept sous-jacent de la méthode des bases réduites (c'est-à-dire à petite épaisseur de Kolmogorov) pour proposer une méthode d'accélération de la convergence.

2. Une méthode de bases réduites alternative

On suppose ainsi avoir un code de calcul de type éléments finis \mathbb{P}_1 basé sur un espace X_h capable de donner une bonne approximation des $u(\mu)$ dans un espace d'éléments finis X_h tel que

$$\forall \mu \in \mathcal{D}, \quad \|u(\mu) - u_h(\mu)\|_X \leq c_1 h. \quad (3)$$

On calcule alors, de façon préalable, les $u_h(\mu_i)$ avec un paramètre h suffisamment petit¹ pour assurer une bonne approximation des solutions $u(\mu_i)$. Ceci nous permet de construire l'espace $X_h^N = \text{Vect}\{u_h(\mu_1), \dots, u_h(\mu_N)\}$, dans un cadre de méthode de Galerkin pour construire la méthode des bases réduites : trouver $u_h^N(\mu) \in X_h^N$ tel que : $\forall v \in X_h^N, a(u_h^N(\mu), v; \mu) = (f, v)$. Le lemme de Cea conduit à une majoration du type $\|u(\mu) - u_h^N(\mu)\|_X \leq c \inf_{v \in X_h^N} \|u(\mu) - v\|_X$ et donc, en utilisant les hypothèses (2) et (3), on obtient :

$$\|u(\mu) - u_h^N(\mu)\|_X \leq \varepsilon + c_2 h. \quad (4)$$

Pour des raisons de stabilité, la méthode des bases réduites utilise classiquement une base alternative à celle des $u(\mu_i)$, déduite par un procédé d'orthogonalisation de Gram–Schmidt. On propose ici d'aller un peu plus loin et de remplacer le procédé de Gram–Schmidt par une recherche de solutions propres : trouver $\xi \in X_h^N$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\forall v \in X_h^N, \int_{\Omega} \nabla \xi \nabla v = \lambda \int_{\Omega} \xi v$. On obtient alors une suite croissante de valeurs propres $\lambda_{i, \text{BR}}$ et des fonctions propres orthogonales $\xi_{i, \text{BR}}$ que l'on choisit orthonormées dans $L^2(\Omega)$. On note que les fonctions $\xi_{i, \text{BR}}$ forment une nouvelle base de l'espace X_h^N .

Dans bien des codes industriels, on n'a pas accès à l'assemblage de la matrice de rigidité $a(u_h(\mu_i), u_h(\mu_j); \mu)$. Les techniques de décomposition affine (ou d'interpolation sur « points magiques ») ne peuvent donc pas être mises en place pour calculer très rapidement la matrice de rigidité pour chaque nouvelle valeur de μ . Une étape majeure de la mise en œuvre de la méthode des bases réduites ne peut donc plus être réalisée avec une complexité indépendante de h , ce qui enlève tout intérêt à l'approche. Pour y remédier, on remarque que l'objectif de la méthode de Galerkin de bases réduites est de calculer les coefficients intervenant dans la décomposition de $u_h^N(\mu)$ dans la base des $\xi_{i, \text{BR}}$, $u_h^N(\mu) = \sum_{i=1}^N \beta_i^{\text{BR}} \xi_{i, \text{BR}}$. Ceux-ci peuvent apparaître comme un succédané aux coefficients optimaux $\beta_i^h(\mu) = \int_{\Omega} u_h(\mu) \xi_{i, \text{BR}}$ de la meilleure approximation de $u_h(\mu)$ sur X_h^N dont le calcul serait trop coûteux. Notre méthode alternative consiste également à approcher ces coefficients. Le calcul de $u_H(\mu)$, pour $H \gg h$ et $X_H \subset X_h$, étant moins coûteux que celui de $u_h(\mu)$, on propose d'utiliser tout d'abord le code industriel avec le paramètre H et de remplacer les $\beta_i^h(\mu)$ par $\beta_i^H(\mu) = \int_{\Omega} u_H(\mu) \xi_{i, \text{BR}}$. On construit ainsi un élément $u_N^{Hh}(\mu) = \sum_{i=1}^N \beta_i^H(\mu) \xi_{i, \text{BR}}$ de X_h^N .

¹ Contrairement à la notation classique, nous prenons la liberté de noter par h un paramètre qui représente l'erreur d'approximation plutôt que la taille minimale des éléments finis utilisés, permettant de considérer sur le même plan les solutions régulières avec un maillage uniforme et les solutions avec une certaine singularité avec un maillage adapté.

On remarque tout d'abord que $|\beta_i^h(\mu) - \beta_i^H(\mu)| \leq \|u_h(\mu) - u_H(\mu)\|_{0,\Omega}$. Par ailleurs, le résultat suivant d'approximation L^2 de type Aubin Nitsche est classique : $\|u(\mu) - u_H(\mu)\|_{0,\Omega} \leq cH \|u(\mu) - u_h(\mu)\|_X \leq cH^2$. Utilisant l'orthogonalité de la base des $\xi_{i,\text{BR}}$ à la fois dans L^2 et H^1 , il est facile d'obtenir : $\|u(\mu) - u_N^{Hh}(\mu)\|_X \leq \varepsilon + c_3h + c_4H^2$ (où $c_4 = c_4(N)$) qui est asymptotiquement semblable à (4) dès lors que l'on choisit $h \sim H^2$.

3. Approximation d'ordre supérieur

Si l'on utilise une approximation \mathbb{P}_2 , il faut pousser un peu plus loin l'analyse numérique pour obtenir une optimalité de l'estimation d'erreur. Le même argument de Aubin Nitsche permet de conclure.² En effet, soit $\Phi_{i,\text{BR}}$, les fonctions duales des $\xi_{i,\text{BR}}$ telles que $\forall v_h \in X_h$, $a(v_h, \Phi_{i,\text{BR}}; \mu) = \int_{\Omega} v_h \xi_{i,\text{BR}}$. Alors $\beta_i^h(\mu) - \beta_i^H = \int_{\Omega} (u_h(\mu) - u_H(\mu)) \xi_{i,h} = a(u_h(\mu) - u_H(\mu), \Phi_{i,h}; \mu)$. Comme $X_H \subset X_h$, alors par définition de $u_h(\mu)$ et $u_H(\mu)$, on a que $\forall \chi_H \in X_H$, $a(u_h(\mu) - u_H(\mu), \chi_H; \mu) = 0$. On en déduit que, $\forall \chi_H \in X_H$, $\beta_i^h(\mu) - \beta_i^H = a(u_h(\mu) - u_H(\mu), \Phi_{i,h} - \chi_H; \mu)$, ce qui donne $|\beta_i^h(\mu) - \beta_i^H| \leq c \|u_h(\mu) - u_H(\mu)\|_X \|\Phi_{i,h} - \chi_H; \mu\|_X \leq cH^4$ et donc $\|u(\mu) - u_N^{Hh}(\mu)\|_X \leq \varepsilon + c_5h^2 + c_6H^4$ (où $c_6 = c_6(N)$), et la même conclusion d'optimalité a lieu dès lors que l'on choisit $h \sim H^2$.

4. Résultats numériques

Les problèmes que l'on étudie ici sont en dimension 2. À partir d'une triangulation \mathcal{T}_{H_0} , on construit les triangulations $\mathcal{T}_{H_n, 1 \leq n \leq 4}$ en découpant chaque triangle K appartenant à $\mathcal{T}_{H_{n-1}}$ en quatre triangles de même diamètre H_{n_K} tel que $H_{n_K} = \frac{H_{(n-1)K}}{2}$. Le sous-espace X_{H_n} obtenu est environ quatre fois plus grand que $X_{H_{n-1}}$ et vérifie $X_{H_0} \subset X_{H_n}$. On appelle $u_N^{hP}(\mu)$ la projection de $u_h(\mu)$ sur la base des $\xi_{i,\text{BR}}$ définie par $u_N^{hP}(\mu) = \sum_{i=1}^N \beta_i^h(\mu) \xi_{i,\text{BR}}$.

4.1. Exemple 1

On s'intéresse au problème suivant : Trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que $-\Delta u + u^3 = \sin(x) \sin(y)$ dans $\Omega = [0, 1]^2 \setminus ([\frac{1}{2}, 1]^2)$ (domaine en L), $\beta u + \frac{\partial u}{\partial n} = y(1-y)$ sur $\Gamma_F = \{(1, y), y \in [0, \frac{1}{2}]\}$ et $u = \eta xy(1-y)(1-x)$ sur $\Gamma_D = \partial\Omega \setminus \Gamma_F$.

Tableau 1

Erreur pour l'exemple 1 dans le cas où $X_h = \{v \in C^0(\overline{\Omega}), v|_T \in \mathbb{P}_1(T), T \in \mathcal{T}_{H_4}\}$.

		$\ u(\mu_{MH_i}) - u_N^{hH_i}(\mu_{MH_i})\ _{1,\Omega}$	$\ u(\mu_{Mh}) - u_h(\mu_{Mh})\ _{1,\Omega}$	$\ u(\mu_{Mh}) - u_N^{hP}(\mu_{Mh})\ _{1,\Omega}$	$\ u(\mu_{MH_i}) - u_{H_i}(\mu_{MH_i})\ _{1,\Omega}$
N = 5	\mathcal{T}_{H_0}	0,132447	0,0332219	0,191438	0,48848
	\mathcal{T}_{H_1}	0,159983	0,0332219	0,191438	0,282155
	\mathcal{T}_{H_2}	0,182003	0,0332219	0,191438	0,148391
	\mathcal{T}_{H_3}	0,189419	0,0332219	0,191438	0,0727888
N = 10	\mathcal{T}_{H_0}	0,353764	0,0332219	0,0361391	0,48848
	\mathcal{T}_{H_1}	0,0682768	0,0332219	0,0361391	0,282155
	\mathcal{T}_{H_2}	0,0381123	0,0332219	0,0361391	0,148391
	\mathcal{T}_{H_3}	0,035279	0,0332219	0,0361391	0,0727888
N = 15	\mathcal{T}_{H_0}	0,473683	0,0332219	0,0338436	0,48848
	\mathcal{T}_{H_1}	0,141902	0,0332219	0,0338436	0,282155
	\mathcal{T}_{H_2}	0,0389836	0,0332219	0,0338436	0,148391
	\mathcal{T}_{H_3}	0,033873	0,0332219	0,0338436	0,0727888
N = 20	\mathcal{T}_{H_0}	0,561913	0,0332219	0,0334947	0,48848
	\mathcal{T}_{H_1}	0,197724	0,0332219	0,0334947	0,282155
	\mathcal{T}_{H_2}	0,0483812	0,0332219	0,0334947	0,148391
	\mathcal{T}_{H_3}	0,0338948	0,0332219	0,0334947	0,0727888

² Noter que, si le domaine possède des singularités, le maillage est supposé adapté pour que l'ordre 2 en la paramètre h ou H soit obtenu.

Dans cet exemple, le jeu de paramètres que l'on fait varier est $\mu = (\beta, \eta) \in [1, 37] \times [1, 100]$. Soit

$$\mu_{MH_i} = \operatorname{argmax}_{\mu=(\beta,\eta)\in[1,37]\times[1,100]} \{ \|u(\mu) - u_N^{hH_i}(\mu)\|_{1,\Omega} \} \text{ et } \mu_{Mh} = \operatorname{argmax}_{\mu=(\beta,\eta)\in[1,37]\times[1,100]} \{ \|u(\mu) - u^h(\mu)\|_{1,\Omega} \}.$$

On note que, bien que — comme on s'y attend — l'approximation sur le maillage \mathcal{T}_{H_2} est environ 4 fois moins précis que sur le maillage \mathcal{T}_{H_4} , la solution $u_N^{hH_2}$ est aussi bonne que u_h sur tout l'ensemble des paramètres de \mathcal{D} , à condition que l'approximation en bases réduites soit suffisante (voir la cohérence entre la troisième colonne et la première du Tableau 1). On note aussi une dégradation (petite) de l'approximation quand on augmente N signifiant que la constante $c_4(N)$ est croissante.

4.2. Exemple 2

On s'intéresse au problème suivant : Trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que $(0.01)\Delta u + v \cdot \nabla u = 0$ dans $\Omega = [0, 1]^2$, $u = x^2$ sur $\Gamma_1 = \{(1, y), y \in [0, 1]\}$, $u = y^2$ sur $\Gamma_2 = \{(x, 1), x \in [0, 1]\}$ et $u = 0$ sur $\Gamma_3 = \partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$, où v est de la forme $v = (\cos \mu, \sin \mu)$. Dans cet exemple, le paramètre que l'on fait varier est l'angle $\mu \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Soit $\mu_{MH_i} =$

Tableau 2

Erreur pour l'exemple 2 avec $X_h = \{v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}), v|_T \in \mathbb{P}_1(T), T \in \mathcal{T}_{H_4}\}$.

		$\ u(\mu_{MH_i}) - u_N^{hH_i}(\mu_{MH_i})\ _{1,\Omega}$	$\ u(\mu_{Mh}) - u_h(\mu_{Mh})\ _{1,\Omega}$	$\ u(\mu_{Mh}) - u_N^{hP}(\mu_{Mh})\ _{1,\Omega}$	$\ u(\mu_{MH_i}) - u_{H_i}(\mu_{MH_i})\ _{1,\Omega}$
N = 5	\mathcal{T}_{H_0}	0,173382	0,0353317	0,0379907	0,53425
	\mathcal{T}_{H_1}	0,0896971	0,0353317	0,0379907	0,244995
	\mathcal{T}_{H_2}	0,070489	0,0353317	0,0379907	0,125035
	\mathcal{T}_{H_3}	0,0670544	0,0353317	0,0379907	0,0614516
N = 10	\mathcal{T}_{H_0}	0,244527	0,0353317	0,035331	0,53425
	\mathcal{T}_{H_1}	0,0912245	0,0353317	0,035331	0,305801
	\mathcal{T}_{H_2}	0,0418058	0,0353317	0,035331	0,159262
	\mathcal{T}_{H_3}	0,0356579	0,0353317	0,035331	0,0787356
N = 15	\mathcal{T}_{H_0}	0,305985	0,0353317	0,0353317	0,53425
	\mathcal{T}_{H_1}	0,0982834	0,0353317	0,0353317	0,305801
	\mathcal{T}_{H_2}	0,042326	0,0353317	0,0353317	0,159262
	\mathcal{T}_{H_3}	0,0356731	0,0353317	0,0353317	0,0787356
N = 20	\mathcal{T}_{H_0}	0,368871	0,0353317	0,035332	0,534354
	\mathcal{T}_{H_1}	0,134905	0,0353317	0,035332	0,305773
	\mathcal{T}_{H_2}	0,0459898	0,0353317	0,035332	0,159262
	\mathcal{T}_{H_3}	0,0358189	0,0353317	0,035332	0,0787356

Tableau 3

Erreur pour l'exemple 2 avec $X_h = \{v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}), v|_T \in \mathbb{P}_2(T), T \in \mathcal{T}_{H_3}\}$.

		$\ u(\mu_{MH_i}) - u_N^{hH_i}(\mu_{MH_i})\ _{1,\Omega}$	$\ u(\mu_{Mh}) - u_h(\mu_{Mh})\ _{1,\Omega}$	$\ u(\mu_{Mh}) - u_N^{hP}(\mu_{Mh})\ _{1,\Omega}$	$\ u(\mu_{MH_i}) - u_{H_i}(\mu_{MH_i})\ _{1,\Omega}$
N = 5	\mathcal{T}_{H_0}	0,0651131	0,00350909	0,0140652	0,11006
	\mathcal{T}_{H_1}	0,0607571	0,00350909	0,0140652	0,0328316
	\mathcal{T}_{H_2}	0,0605954	0,00350909	0,0140652	0,00870477
N = 10	\mathcal{T}_{H_0}	0,0415219	0,00350909	0,00351428	0,156635
	\mathcal{T}_{H_1}	0,00561083	0,00350909	0,00351428	0,0511913
	\mathcal{T}_{H_2}	0,00353512	0,00350909	0,00351428	0,0140547
N = 15	\mathcal{T}_{H_0}	0,0581509	0,00350909	0,00350909	0,157373
	\mathcal{T}_{H_1}	0,00785513	0,00350909	0,00350909	0,0510254
	\mathcal{T}_{H_2}	0,00354642	0,00350909	0,00350909	0,0140551
N = 20	\mathcal{T}_{H_0}	0,0646494	0,00350909	0,00350912	0,157609
	\mathcal{T}_{H_1}	0,00874521	0,00350909	0,00350912	0,0510254
	\mathcal{T}_{H_2}	0,0035722	0,00350909	0,00350912	0,0140551

$\operatorname{argmax}_{\mu \in [0, \frac{\pi}{2}]} \{ \|u(\mu) - u_N^{hH_i}(\mu)\|_{1,\Omega} \}$ et $\mu_{Mh} = \operatorname{argmax}_{\mu \in [0, \frac{\pi}{2}]} \{ \|u(\mu) - u^h(\mu)\|_{1,\Omega} \}$. Les mêmes conclusions que dans l'exemple précédent sont établies. La Tableau 2 illustre les résultats de l'approximation \mathbb{P}_1 tandis que le Tableau 3 illustre les résultats de l'approximation \mathbb{P}_2 .

Références

- [1] M.A. Grepl, Y. Maday, N.C. Nguyen, A.T. Patera, Efficient reduced-basis treatment of nonaffine and nonlinear partial differential equations, *Modélisation mathématique et analyse numérique* 41 (3) (2007) 575–605.
- [2] Y. Maday, Reduced basis method for the rapid and reliable solution of partial differential equations, in: *International Congress of Mathematicians*, vol. III, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, pp. 1255–1270.
- [3] C. Prud'homme, D.V. Rovas, K. Veroy, L. Machiels, Y. Maday, A.T. Patera, G. Turinici, Reliable real-time solution of parametrized partial differential equations: Reduced-basis output bound methods, *J. Fluids Engineering* 124 (2002) 70–80.