Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 283–287
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

Géométrie algébrique

Nombres de Betti des fibres de Springer de type A

Lucas Fresse

Department of Mathematics, the Weizmann Institute of Science, 76100 Rehovot, Israel

Reçu le 9 novembre 2008 ; accepté le 20 janvier 2009

Disponible sur Internet le 11 février 2009

Présenté par Michel Duflo

Résumé

Soit u un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie. La fibre de Springer au-dessus de u, notée $\mathcal{B}_u$, est la variété des drapeaux complets stables par u. On détermine les nombres de Betti de $\mathcal{B}_u$. Dans ce but, on construit une décomposition cellulaire de $\mathcal{B}_u$. La codimension des cellules est similaire à une longueur de Coxeter, donc notre décomposition cellulaire est adaptée au calcul des nombres de Betti. ***Pour citer cet article : L. Fresse, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Betti numbers of Springer fibers in type *A*. Let u be a nilpotent endomorphism of a finite dimensional vector space. The Springer fiber over u, denoted by $\mathcal{B}_u$, is the variety of complete flags stable by u. We determine the Betti numbers of $\mathcal{B}_u$. To do this, we construct a cell decomposition of $\mathcal{B}_u$. The codimension of the cells is similar to a Coxeter length, this makes our cell decomposition well suited for the calculation of Betti numbers. ***To cite this article: L. Fresse, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abridged English version

Let V be a n-dimensional $\mathbb{C}$-vector space and let $u : V \to V$ be a nilpotent endomorphism. Let $\mathcal{B}$ be the variety of complete flags on V and let $\mathcal{B}_u$ be the subset of u-stable flags, i.e. flags $(V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}$ with $u(V_i) \subset V_i$ for any i. The variety $\mathcal{B}$ is projective and $\mathcal{B}_u$ is a closed subvariety of $\mathcal{B}$. The variety $\mathcal{B}_u$ is called a *Springer fiber* since it can be seen as the fiber over u of the Springer resolution of singularity of the nilpotent cone of $\mathrm{End}(V)$ (see [2]). Our purpose is to compute the Betti numbers $\dim_{\mathbb{Q}} H^m(\mathcal{B}_u, \mathbb{Q})$.

To do this, we construct a cell decomposition of $\mathcal{B}_u$. A finite partition of an algebraic variety X is said to be an α-partition if the subsets in the partition can be indexed $X_1, \dots, X_k$ so that $X_1 \cup \dots \cup X_l$ is closed for any $l \leqslant k$. An α-partition is a *cell decomposition* if each subset in the partition is isomorphic as variety to an affine space. If X is projective and has a cell decomposition, then the cohomology of X vanishes in odd degrees and $\dim_{\mathbb{Q}} H^{2m}(X, \mathbb{Q})$ is equal to the number of m-dimensional cells in the decomposition. If $u = 0$ the variety $\mathcal{B}_u = \mathcal{B}$ has a cell decomposition into Schubert cells $S(\sigma)$ parameterized by the elements of the symmetric group $\sigma \in S_n$, and the codimension of $S(\sigma)$

Adresse e-mail : lucas.fresse@weizmann.ac.il.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.01.014

is the inversion number of σ. For u general, we construct a cell decomposition of $\mathcal{B}_u$ parameterized by a set of row-standard tableaux, such that the codimension of cells can also be interpreted as an inversion number.

Let $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r$ be the lengths of the Jordan blocks of u and let $Y(u)$ be the Young diagram of rows of lengths $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. If $\mu_1, \ldots, \mu_s$ are the lengths of the columns of $Y(u)$, recall from [1, §II.5.5] that $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}_u = \sum_{q=1}^{s} \mu_q(\mu_q - 1)/2$.

A standard tableau of shape $Y(u)$ is a numbering of the boxes of $Y(u)$ by $1, \ldots, n$ such that numbers in the rows increase to the right and numbers in the columns increase to the bottom.

We call *row-standard tableau of shape* $Y(u)$ a numbering by $1, \ldots, n$ of the boxes of $Y(u)$ such that numbers in the rows increase to the right. Let τ be a row-standard tableau. If we put in increasing order the entries in each column of τ, then we get a new tableau which is standard. Let us write it $\mathrm{st}(\tau)$.

We call *inversion* a pair (i, j) of numbers $i < j$ in the same column of τ and such that one of the following conditions is satisfied:

– i or j has no box on its right and i is below j,
– i, j have respective entries i', j' on their right, and $i' > j'$.

For example $\tau = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 4 & 8 \\ \hline 3 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}$ has four inversions: the pairs $(1, 2)$, $(4, 6)$, $(5, 6)$, $(7, 8)$.

Let $n_{\mathrm{inv}}(\tau)$ be the number of inversions of τ. We see that $n_{\mathrm{inv}}(\tau) = 0$ if and only if τ is a standard tableau. For $u = 0$ the diagram $Y(u)$ has only one column and then τ is equivalent to a permutation ($\sigma \in S_n$ corresponds to the tableau numbered by $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ from top to bottom) and $n_{\mathrm{inv}}(\tau)$ is the usual inversion number for permutations.

Our main result is the following:

Theorem. *Let $d = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}_u$. The variety $\mathcal{B}_u$ has a cell decomposition $\mathcal{B}_u = \bigcup_\tau C(\tau)$ parameterized by the row-standard tableaux of shape $Y(u)$, such that* $\dim_{\mathbb{C}} C(\tau) = d - n_{\mathrm{inv}}(\tau)$.

Thus we deduce:

Corollary. *For any $m \geqslant 0$, we have $H^{2m+1}(\mathcal{B}_u, \mathbb{Q}) = 0$, and* $\dim_{\mathbb{Q}} H^{2m}(\mathcal{B}_u, \mathbb{Q})$ *is the number of row-standard tableaux τ of shape $Y(u)$ such that $n_{\mathrm{inv}}(\tau) = d - m$.*

This allows us to obtain an explicit formula for Betti numbers (see the relation (2) of Section 3.1 below).

Our construction of cells relies on a construction by Spaltenstein [1] of an α-partition of $\mathcal{B}_u$ into subsets parameterized by standard tableaux. Let T be standard. For $i = 0, \ldots, n$ the shape of the subtableau $T[1, \ldots, i]$ of entries $1, \ldots, i$ is a Young diagram Y_i^T with i boxes. Let $(V_0, \ldots, V_n) \in \mathcal{B}_u$ be a u-stable flag. For $i = 0, \ldots, n$ the restriction $u_{|V_i} : V_i \to V_i$ is nilpotent and its Jordan form is represented by a Young diagram $Y(u_{|V_i})$ with i boxes. Define

$$\mathcal{B}_u^T = \left\{(V_0, \ldots, V_n) \in \mathcal{B}_u \colon\ Y(u_{|V_i}) = Y_i^T\ \forall i = 0, \ldots, n\right\}.$$

By [1, §II.5.4–5] the subsets $\mathcal{B}_u^T$ form an α-partition of $\mathcal{B}_u$, and each $\mathcal{B}_u^T$ is irreducible and such that $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}_u^T = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}_u$. (In particular $\mathcal{B}_u$ is equidimensional and the irreducible components of $\mathcal{B}_u$ are the subsets $K^T = \overline{\mathcal{B}_u^T}$.)

For each T, we construct a cell decomposition $\mathcal{B}_u^T = \bigcup_\tau C(\tau)$ parameterized by row-standard tableaux with $\mathrm{st}(\tau) = T$, and such that the codimension of $C(\tau)$ in $\mathcal{B}_u^T$ is equal to $n_{\mathrm{inv}}(\tau)$.

Finally, by collecting together the cell decompositions of the $\mathcal{B}_u^T$'s for T running over the set of standard tableaux of shape $Y(u)$, we get a cell decomposition $\mathcal{B}_u = \bigcup_\tau C(\tau)$ satisfying the properties of the theorem.

1. Introduction

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension $n \geqslant 0$ et soit $u : V \to V$ un endomorphisme nilpotent. On note par $\mathcal{B}$ la variété algébrique projective formée par les drapeaux complets de V. L'ensemble des drapeaux $(V_0, \ldots, V_n) \in \mathcal{B}$ tels que $u(V_i) \subset V_i$ pour tout i, que l'on note $\mathcal{B}_u$, forme une sous-variété projective de $\mathcal{B}$. La variété $\mathcal{B}_u$ est appelée *fibre de Springer* car elle peut être vue comme la fibre au dessus de u de la résolution des singularités du cône nilpotent de $\mathrm{End}(V)$, introduite par Springer [2]. Le but de cette Note est de proposer un calcul des nombres de Betti $\dim_{\mathbb{Q}} H^m(\mathcal{B}_u, \mathbb{Q})$.

Pour cela on construit une décomposition cellulaire de $\mathcal{B}_u$ adaptée au calcul des nombres de Betti. Il est connu que $\mathcal{B}_u$ admet des décompositions cellulaires (cf. [1]). Si $u = 0$ alors $\mathcal{B}_u = \mathcal{B}$ admet une décomposition en cellules de Schubert $S(\sigma)$ paramétrées par les éléments du groupe symétrique $\sigma \in S_n$ et la codimension de $S(\sigma)$ est le nombre d'inversions de σ. Pour u général, on construit une décomposition cellulaire de $\mathcal{B}_u$ paramétrée par un ensemble de tableaux lignes-standards, dont la codimension des cellules s'interprète aussi comme un nombre d'inversions.

2. Tableaux lignes-standards et nombre d'inversions

2.1. *Définitions*

Soient $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r$ les longueurs des blocs de Jordan de u et soit $Y(u)$ le diagramme de Young de lignes de longueurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Un tableau standard de forme $Y(u)$ est une numérotation des cases de $Y(u)$ de 1 à n dont les numéros sont croissants de gauche à droite dans les lignes et de haut en bas dans les colonnes.

On appelle *tableau lignes-standard de forme* $Y(u)$ une numérotation des cases de $Y(u)$ de 1 à n dont les numéros sont croissants de gauche à droite dans les lignes. Soit τ un tableau lignes-standard. Si on remet dans l'ordre croissant les numéros dans chaque colonne de τ, alors on voit que le tableau obtenu est standard. On le note $\mathrm{st}(\tau)$.

Soit τ un tableau lignes-standard. On appelle *inversion* un couple (i, j) de numéros $i < j$ dans une même colonne de τ et tel qu'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- i ou j n'a pas de numéro à sa droite et i est situé en dessous de j,
- i, j ont des numéros voisins à droite respectifs i', j', et $i' > j'$.

Par exemple $\tau = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&8\\\hline 3&6&7\\\hline 1&5\\\cline{1-2}\end{array}$ a quatre inversions : les couples $(1, 2)$, $(4, 6)$, $(5, 6)$, $(7, 8)$.

On note $n_{\mathrm{inv}}(\tau)$ le nombre d'inversions de τ. On voit que $n_{\mathrm{inv}}(\tau) = 0$ si et seulement si τ est un tableau standard. Pour $u = 0$ le diagramme $Y(u)$ a une colonne, alors τ équivaut à la donnée d'une permutation ($\sigma \in S_n$ correspond au tableau numéroté par $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ de haut en bas) et $n_{\mathrm{inv}}(\tau)$ coïncide avec le nombre d'inversions usuel.

2.2. *Nombre d'inversions vu comme une longueur de Coxeter généralisée*

On interprète $n_{\mathrm{inv}}(\tau)$ comme un nombre minimal d'opérations élémentaires pour transformer τ en le tableau standard $\mathrm{st}(\tau)$. Pour $i = 1, \ldots, n$, on note D_i l'ensemble des tableaux lignes-standards τ satisfaisant les trois propriétés suivantes :

- i n'est pas dans la première ligne de τ. On note alors j le numéro voisin au-dessus de i.
- Si i a un numéro voisin à droite i', alors $j < i'$. Si j a un numéro voisin à droite j', alors $i < j'$.
- Pour tout k dans la même colonne que i, j et tel que $\mathrm{Min}(i, j) < k < \mathrm{Max}(i, j)$, exactement un des deux couples $(\mathrm{Min}(i, j), k)$ et $(k, \mathrm{Max}(i, j))$ est une inversion.

Soit $\tau \in D_i$. Soient $i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_q = i$ les numéros jusqu'à i dans la ligne contenant i, et soient $j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_q = j$ les numéros jusqu'à j dans la ligne contenant j. Alors on définit $\delta_i(\tau)$ comme le tableau obtenu en échangeant i_k et j_k pour tout $k = 1, \ldots, q$. Le tableau $\delta_i(\tau)$ reste lignes-standard. Observons que $\delta_i(\tau) \in D_j$ et que l'on a $\tau = \delta_j \delta_i(\tau)$.

Lemme 2.1.

(a) *Soit $\tau \in D_i$ et soit j le numéro voisin au-dessus de i. Alors on a $n_{\mathrm{inv}}(\delta_i(\tau)) = n_{\mathrm{inv}}(\tau) - 1$ si $(\mathrm{Min}(i, j), \mathrm{Max}(i, j))$ est une inversion de τ, ou bien $n_{\mathrm{inv}}(\delta_i(\tau)) = n_{\mathrm{inv}}(\tau) + 1$ sinon.*

(b) *Supposons $\tau \neq \mathrm{st}(\tau)$. Soit j le numéro maximal qui n'a pas la même place dans τ et $\mathrm{st}(\tau)$. Alors j a un numéro voisin de dessous i, tel que $i < j$, et on a $\tau \in D_i$ et $n_{\mathrm{inv}}(\delta_i(\tau)) = n_{\mathrm{inv}}(\tau) - 1$.*

La proposition suivante provient du lemme et se démontre par récurrence sur le nombre d'inversions.

Proposition 2.2. *Soit τ un tableau lignes-standard, alors il existe une suite de numéros $i_1, \ldots, i_m$ telle que* $\mathrm{st}(\tau) = \delta_{i_1} \cdots \delta_{i_m}(\tau)$. *Le nombre d'inversion $n_{\mathrm{inv}(\tau)}$ est la longueur minimale d'une telle suite.*

Exemple. La suite $\tau = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&8\\\hline 3&6&7\\\hline 1&5\\\cline{1-2}\end{array} \overset{\delta_7}{\mapsto} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&6&7\\\hline 2&4&8\\\hline 1&5\\\cline{1-2}\end{array} \overset{\delta_4}{\mapsto} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&7\\\hline 3&6&8\\\hline 1&5\\\cline{1-2}\end{array} \overset{\delta_5}{\mapsto} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&7\\\hline 1&5&8\\\hline 3&6\\\cline{1-2}\end{array} \overset{\delta_1}{\mapsto} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&4&7\\\hline 2&5&8\\\hline 3&6\\\cline{1-2}\end{array} = \mathrm{st}(\tau)$ est minimale. On trouve $n_{\mathrm{inv}}(\tau) = 4$ comme précédemment.

On construit un graphe dont les sommets sont les tableaux lignes-standards et avec une arête joignant τ et τ' s'il existe i tel que $\tau' = \delta_i(\tau)$. Deux tableaux τ et τ' sont dans la même composante connexe du graphe si et seulement si on a $\mathrm{st}(\tau) = \mathrm{st}(\tau')$. D'après la Proposition 2.2, le nombre d'inversions $n_{\mathrm{inv}}(\tau)$ est la longueur entre τ et $\mathrm{st}(\tau)$ dans le graphe.

La proposition suivante permet de décrire la distribution du nombre d'inversions.

Proposition 2.3. *Soit T un tableau standard. On note q_i le numéro de la colonne contenant i et p_i le nombre de lignes de longueur q_i dans le sous-tableau $T[1, \ldots, i]$ d'entrées $1, \ldots, i$.*

(a) *Soient $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ des entiers tels que $0 \leqslant \kappa_i \leqslant p_i - 1$, alors $(\delta_n)^{\kappa_n} \cdots (\delta_1)^{\kappa_1}(T)$ est bien défini.*
(b) *Tout tableau lignes-standard τ tel que* $\mathrm{st}(\tau) = T$ *s'écrit de manière unique sous cette forme. De plus $n_{\mathrm{inv}}(\tau) = \kappa_1 + \cdots + \kappa_n$.*

On note $b_m^T = \#\{\tau\colon\ \mathrm{st}(\tau) = T,\ n_{\mathrm{inv}}(\tau) = m\}$. De la Proposition 2.3, on déduit la formule

$$\sum_{m \geqslant 0} b_m^T x^m = \prod_{i=1}^{n} [p_i]_x \tag{1}$$

où $[p]_x = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}$ et p_i est le nombre de l'énoncé de la proposition.

3. Une décomposition cellulaire de $\mathcal{B}_u$ en codimension égale au nombre d'inversions

Soit X une variété algébrique complexe. On appelle *α-partition* une partition finie de X dont les sous-ensembles peuvent être numérotés $X_1, \ldots, X_k$ de telle sorte que $X_1 \cup \cdots \cup X_l$ est fermé pour tout $l \leqslant k$. On appelle *décomposition cellulaire* une α-partition telle que chaque X_l est isomorphe comme variété à un espace affine. Si X est projective et admet une décomposition cellulaire $X = X_1 \cup \cdots \cup X_k$, alors on a

$$H^{2m+1}(X, \mathbb{Q}) = 0 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{Q}} H^{2m}(X, \mathbb{Q}) = \#\{l\colon\ \dim_{\mathbb{C}} X_l = m\} \quad \forall m \geqslant 0.$$

3.1. Énoncé du résultat principal

Rappelons que la variété $\mathcal{B}_u$ a dimension $d := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}_u = \sum_{q=1}^{s} \frac{\mu_q(\mu_q - 1)}{2}$, où $\mu_1, \ldots, \mu_s$ sont les longueurs des colonnes de $Y(u)$ (cf. [1, §II.5.5]). Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 3.1. *La variété $\mathcal{B}_u$ admet une décomposition cellulaire $\mathcal{B}_u = \bigcup_\tau C(\tau)$ paramétrée par les tableaux lignes-standards de forme $Y(u)$, telle que* $\dim_{\mathbb{C}} C(\tau) = d - n_{\mathrm{inv}}(\tau)$.

Les principales étapes de la démonstration du Théorème 3.1 sont présentées dans la Section 3.2. Comme conséquence du Théorème 3.1, on a :

Corollaire 3.2. *Pour $m \geqslant 0$, on a $H^{2m+1}(\mathcal{B}_u, \mathbb{Q}) = 0$, et* $\dim_{\mathbb{Q}} H^{2m}(\mathcal{B}_u, \mathbb{Q})$ *est égal au nombre de tableaux lignes-standards τ de forme $Y(u)$ tels que $n_{\mathrm{inv}}(\tau) = d - m$.*

On obtient la formule suivante pour les nombres de Betti.

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^{2m}(\mathcal{B}_u, \mathbb{Q}) = \sum_T b^T_{d-m} \quad \forall m \geqslant 0, \tag{2}$$

où T parcourt l'ensemble des tableaux standards de forme $Y(u)$, et b^T_{d-m} est donné par la formule (1).

3.2. Construction des cellules

Rappelons tout d'abord une construction due à Spaltenstein [1]. Soit T un tableau standard. La forme du sous-tableau $T[1,\dots,i]$ d'entrées $1,\dots,i$ est un diagramme de Young à i cases noté Y_i^T. Pour tout drapeau $(V_0,\dots,V_n) \in \mathcal{B}_u$, la restriction $u_{|V_i} : V_i \to V_i$ est un endomorphisme nilpotent, dont la forme de Jordan est représentée par un diagramme de Young à i cases $Y(u_{|V_i})$. On définit

$$\mathcal{B}_u^T = \big\{(V_0,\dots,V_n) \in \mathcal{B}_u \colon\ Y(u_{|V_i}) = Y_i^T\ \forall i = 0,\dots,n\big\}.$$

D'après [1, §II.5.4], les ensembles $\mathcal{B}_u^T$, pour T standard, forment une α-partition de $\mathcal{B}_u$. D'après [1, §II.5.5], chaque $\mathcal{B}_u^T$ est irréductible et $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}_u^T = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}_u$. (En particulier $\mathcal{B}_u$ est équidimensionnelle et ses composantes irréductibles sont les ensembles $K^T = \overline{\mathcal{B}_u^T}$.) Le Théorème 3.1 découle du théorème suivant, où l'on construit une décomposition cellulaire de chaque $\mathcal{B}_u^T$.

Théorème 3.3. *Pour tout T, la sous-variété $\mathcal{B}_u^T$ admet une décomposition cellulaire $\mathcal{B}_u^T = \bigcup_\tau C(\tau)$ paramétrée par les tableaux lignes-standards tels que* $\mathrm{st}(\tau) = T$*, telle que* $\dim_{\mathbb{C}} C(\tau) = d - n_{\mathrm{inv}}(\tau)$.

Démonstration du Théorème 3.3 (esquisse). Soit $W = V/\operatorname{Im} u$. L'ensemble des hyperplans $H \subset V$ stables par u s'identifie à la variété $\mathcal{H}(W)$ des hyperplans de W. Soit $Z(u) \subset \mathrm{GL}(V)$ le centralisateur de $u + I$. On a un morphisme naturel de groupes algébriques $\varphi : Z(u) \to \mathrm{GL}(W)$. On montre que $P := \varphi(Z(u))$ est un sous-groupe parabolique de $\mathrm{GL}(W)$ et qu'il existe un morphisme de groupes algébriques $\psi : P \to Z(u)$ avec $\varphi\psi = \mathrm{id}_P$. On considère alors un sous-groupe de Borel $B \subset P$. Les B-orbites de $\mathcal{H}(W)$ forment une décomposition $\mathcal{H}(W) = \bigcup_{l=0}^m S(l)$ en cellules de Schubert (on note $m = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(W)$). La cellule $S(l)$ a codimension l. Pour chaque cellule $S(l)$ il y a un sous-groupe unipotent $U(l) \subset B$ qui agit de manière libre transitive, et un isomorphisme de variétés $U(l) \xrightarrow{\sim} S(l)$.

L'application $\Phi : \mathcal{B}_u^T \to \mathcal{H}(W)$, $(V_0,\dots,V_n) \mapsto V_{n-1}$ est $Z(u)$-équivariante. Soit q le numéro de la colonne de T qui contient n et soit p le nombre de lignes de T de longueur q. Alors $\Phi(\mathcal{B}_u^T)$ est l'ensemble des hyperplans $H \in \mathcal{H}(W)$ tels que $H \supset \ker u^{q-1}$, $H \not\supset \ker u^q$, qui forme une $Z(u)$-orbite, qui s'écrit comme réunion de B-orbites $\Phi(\mathcal{B}_u^T) = \bigcup_{l=0}^{p-1} S'(l)$ où $S'(l)$ a codimension l dans $\Phi(\mathcal{B}_u^T)$.

On montre le théorème par récurrence sur n. Soit le sous-tableau $T' = T[1,\dots,n-1]$. Pour $l = 0,\dots,p-1$ on choisit $H_l \in S'(l)$ et on note $u_l = u_{|H_l}$. L'application $\Psi_l : \mathcal{B}_{u_l}^{T'} \times U(l) \to \Phi^{-1}(S'(l))$, $(V_0,\dots,V_{n-1}),\ g \mapsto (gV_0,\dots,gV_{n-1},V)$ est un isomorphisme de variétés. Par récurrence $\mathcal{B}_{u_l}^{T'}$ a une décomposition en cellules $\mathcal{B}_{u_l}^{T'} = \bigcup_{\tau'} C_l(\tau')$ paramétrée par les tableaux lignes-standards tels que $\mathrm{st}(\tau') = T'$. Soit maintenant τ tel que $\mathrm{st}(\tau) = T$. D'après la Proposition 2.3 on a $\tau = (\delta_n)^l \tau'$ avec $0 \leqslant l \leqslant p-1$, et n a la même place dans τ' et T. Soit le sous-tableau $\tau'' = \tau'[1,\dots,n-1]$. Soit $C(\tau) = \Psi_l(C_l(\tau'') \times U(l))$. On obtient une décomposition en cellules $\mathcal{B}_u^T = \bigcup_\tau C(\tau)$, et $\operatorname{codim} C(\tau) = \operatorname{codim} C_l(\tau'') + \operatorname{codim} S'(l) = n_{\mathrm{inv}}(\tau') + l = n_{\mathrm{inv}}(\tau)$ d'après la Proposition 2.3.

Références

[1] N. Spaltenstein, Classes unipotentes et sous-groupes de Borel, Lecture Notes in Math., vol. 946, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1982.
[2] T.A. Springer, The unipotent variety of a semisimple group, in: Proc. Colloq. Alg. Geom., Tata Institute, Oxford Univ. Press, London, 1969, pp. 373–391.