Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 299–303
Comptes Rendus Mathematique

Probabilités

Propriétés probabilistes des processus *GARCH* périodiques

Abdelouahab Bibi [a], Abdelhakim Aknouche [b]

[a] *Département de mathématiques, Université Mentouri, 25000 Constantine, Algeria*
[b] *Faculté de Mathématiques, USTHB, Alger, Algeria*

Reçu le 30 avril 2008 ; accepté après révision le 4 décembre 2008

Disponible sur Internet le 14 février 2009

Présenté par Paul Deheuvels

Résumé

Cette Note porte sur la structure probabiliste des solutions d'une équation aux différences stochastiques de type *GARCH* dont les paramètres sont périodiques dans le temps. Nous proposons des conditions nécessaires et suffisantes assurant l'existence de solutions stationnaires, géométriquement ergodiques (au sens périodique) et ayant des moments d'ordre supérieur finis. ***Pour citer cet article : A. Bibi, A. Aknouche, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Probabilistic properties of periodic *GARCH* processes. This Note examines the probabilistic structure of a *GARCH*-type stochastic difference equation with periodically time-varying parameters. We propose necessary and sufficient conditions ensuring the existence of stationary solutions, geometrically ergodic (in the periodic sense) and having finite higher-order moments. ***To cite this article: A. Bibi, A. Aknouche, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abridged English version

Periodic *GARCH* (*PGARCH*) processes introduced by Bollerslev and Ghysels [5] have proved useful and appropriate for modeling many time series encountered in practice, which are characterized by a stochastic conditional variance with periodic dynamics (see Aknouche and Bibi [1] and the references therein). As for the standard *GARCH* model, the *PGARCH* process may be seen as a non-Gaussian white noise but whose conditional variance follows a linear periodic *ARMA* (*PARMA*) dynamics in terms of the squared process, implying a periodic structure for the underlying process itself. In contrast with *PARMA* models which may be written as an equivalent vector *ARMA* form (Tiao and Grupe, [13]), there is no direct correspondence between the *PGARCH* model and the multivariate *GARCH* one. In fact, any *PGARCH* process can be written as only a weak multivariate *GARCH* model meaning that the study of the *PGARCH* may not be trivially deduced from the existing multivariate *GARCH* theory and thus it constitutes a useful and interesting task.

Adresses e-mail : a.bibi@umc.edu.dz (A. Bibi), aknouche_ab@yahoo.com (A. Aknouche).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.01.008

Various statistical properties have been established for *PGARCH* models (see [1] and the references therein). However, some probabilistic properties necessary for the inference such as strict and second-order periodic stationarity, existence of higher order moments and β-mixing remain unexplored. In this note we study such properties of a periodic *GARCH* process defined by (1).

The model (1) is first written as a stochastic recurrence equation (2) with *independent and periodically distributed* coefficients (*i.p.d.*), which in turn may be cast in a stochastic recurrence equation (3) with independent and identically distributed (*i.i.d.*) coefficients. Then, in Section 2, we give a necessary and sufficient condition for the *PGARCH* equation (2) to possess a non-anticipative strictly periodically stationary (*s.p.s.*) solution in terms of the Lyapunov exponent for *i.p.d.* matrices (see Théorème 2.1). A necessary condition for strict periodic stationarity is also given by Corollaire 2.1 which reduces to Bougerol and Picard's [7] condition for the non-periodic *GARCH* process. As a direct consequence, it is shown (see Théorème 2.2) that the moment of some positive order of the periodic stationary solution is finite. This property may be exploited in order to establish strong consistency and asymptotic normality of the quasi-maximum likelihood estimator for a *PGARCH* without any moment requirement (cf. Aknouche and Bibi [1]). Section 2 gives necessary and sufficient conditions for the existence of non-anticipative solutions with finite second-order moment (see Théorème 3.1) and finite higher-order moments (cf. Théorème 3.2). In Section 4, sufficient conditions (cf. Théorème 4.1) for the stochastic recurrence equation (3) to possess a geometrically ergodic solution are proposed. Theses conditions do not include any moment requirements.

1. Introduction

Les modèles *GARCH* périodiques (*PGARCH*) introduits par Bollerslev et Ghysels [5] ont été largement étudiés cette dernière décennie grâce à leur capacité à représenter adéquatement certaines séries financières exhibant une périodicité dans la variabilité instantanée (voir Aknouche et Bibi [1] pour une bibliographie récente). Un processus $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ est dit admettre une représentation *GARCH* périodique d'ordres p et q et de période $S\geqslant 1$, s'il est solution de l'équation aux différences stochastiques suivante :

$$y_t=\sqrt{h_t}\eta_t \quad \text{et} \quad h_t=\omega_t+\sum_{i=1}^{q}\alpha_{t,i}y_{t-i}^2+\sum_{j=1}^{p}\beta_{t,j}h_{t-j}, \quad t\in\mathbb{Z}, \tag{1}$$

où $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (*i.i.d.*) définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, telle que $E(\eta_t)=0$, $E(\eta_t^2)=1$ et η_t est indépendante de y_{t-j} pour tout $j>0$. Les paramètres ω_t, $\alpha_{t,i}$, and $\beta_{t,j}$ sont périodiques en t de période S tels que $\omega_t>0$, $\alpha_{t,i}\geqslant 0$ et $\beta_{t,j}\geqslant 0$ pour tout $i=1,\ldots,q$, $j=1,\ldots,p$ et $t\in\mathbb{Z}$. Diverses propriétés statistiques ont été élaborées pour ces modèles mais, en revanche, certaines propriétés probabilistes nécessaires pour l'inférence statistique, notamment la stationnarité périodique, la structure d'autocovariance, l'existence des moments finis et la propriété de β-mélange restent encore inexplorées. Pourtant contrairement au cas linéaire (cf. Tiao et Grupe [13]) où un modèle *ARMA* périodique (*PARMA*) peut être représenté par un modèle *ARMA* vectoriel (*VARMA*), il n'existe cependant pas de relation directe entre un *PGARCH* et un *GARCH* multivarié. En fait, un processus *PGARCH* peut se ramener seulement à un *GARCH* vectoriel faible (Bollerslev et Ghysels, [5]). Ainsi, les propriétés probabilistes d'un *PGARCH* ne découlent pas trivialement à partir de la théorie *GARCH* multivariée disponible et donc l'étude probabiliste des modèles *PGARCH* constitue un sujet d'examen. Dans cette Note, nous proposons des conditions assurant la stationnarité périodique (stricte et au second ordre), l'existence des moments, et l'ergodicité géométrique d'un processus *PGARCH*. En posant $Y_t=(y_t^2,\ldots,y_{t-q+1}^2,h_t,\ldots,h_{t-p+1})'$, alors le processus $(y_t^2,h_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ admet la représentation autorégressive généralisée suivante :

$$Y_t=A_tY_{t-1}+B_t, \quad t\in\mathbb{Z}, \tag{2}$$

où les coefficients (A_t,B_t), indépendants et périodiquement distribués (*i.p.d.*), sont donnés par $B_t=(\omega_t\eta_t^2,0'_{(q-1)\times 1},\omega_t,0'_{(p-1)\times 1})'$ et

$$A_t=\begin{pmatrix}\alpha_{t,1}\eta_t^2 & \alpha_{t,2}\eta_t^2 \ \ldots \ \alpha_{t,q-1}\eta_t^2 & \alpha_{t,q}\eta_t^2 & \beta_{t,1}\eta_t^2 & \beta_{t,2}\eta_t^2 \ \ldots \ \beta_{t,p-1}\eta_t^2 & \beta_{t,p}\eta_t^2\\ I_{(q-1)\times(q-1)} & 0_{(q-1)\times 1} & \multicolumn{2}{c}{0_{(q-1)\times p}} & \\ \alpha_{t,1} & \alpha_{t,2} \ \ldots \ \alpha_{t,q-1} & \alpha_{t,q} & \beta_{t,1} & \beta_{t,2} \ \ldots \ \beta_{t,p-1} & \beta_{t,p}\\ \multicolumn{2}{c}{0_{(p-1)\times q}} & & I_{(p-1)\times(p-1)} & 0_{(p-1)\times 1}\end{pmatrix},$$

($0_{m\times n}$ désigne la matrice nulle d'ordre $m\times n$).

Rappelons ici qu'un processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est dit périodiquement *strictement stationnaire* (*p.s.s.*) de période $S \geqslant 1$ (e.g. Boyles et Gardner, [9]) si les deux vecteurs $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n})'$ et $(Y_{t_1+Sh}, Y_{t_2+Sh}, \ldots, Y_{t_n+Sh})'$ ont la même distribution pour tout $n \geqslant 1$ et $h, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{Z}$. Une propriété intimement liée à la stationnarité périodique est celle d'ergodicité périodique (cf. Boyles et Gardner, [9]). Soit T la transformation de décalage et $T^S = T \circ T \circ \cdots \circ T$, S-fois, un ensemble $C \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ est dit T^S-invariant si et seulement si pour toute suite $x = \{\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots\} \in C$, $T^S x \in C$. Un processus *p.s.s.* $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est dit *périodiquement ergodique* si $P(\{\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots\} \in C) = 0$ ou 1, pour tout Borélien CT^S-invariant de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. Un exemple important de processus *p.s.s.* et périodiquement ergodique est celui de suites de v.a. *i.p.d.* Une version périodique analogue pour les processus *p.s.s.* du théorème ergodique des processus stationnaires s'énonce comme suit : Si $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est *p.s.s.* et périodiquement ergodique et si f est une fonction mesurable de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $E\{f(\ldots, Y_{t-1}, Y_t, Y_{t+1}, \ldots)\} < \infty$ pour tout t, alors $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} f(\ldots, Y_{v+S(t-1)}, Y_{v+St}, Y_{v+S(t+1)}, \ldots) \to E\{f(\ldots, Y_{v-S}, Y_v, Y_{v+S}, \ldots)\}$ presque sûrement (*p.s.*) lorsque $n \to \infty$ pour tout $v \in \{1, \ldots, S\}$. Par ailleurs, il est bien connu que la théorie des processus périodiquement stationnaires peut être ramenée à celle des processus stationnaires au moyen d'une transformation appropriée (cf. Tiao et Grupe, [13]). Plus précisément le processus $(\underline{Y}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $\underline{Y}_n = (Y'_{1+nS}, Y'_{2+nS}, \ldots, Y'_{S+nS})'$, admet une représentation autorégressive généralisée

$$\underline{Y}_n = \underline{A}_n \underline{Y}_{n-1} + \underline{B}_n, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

où $(\underline{A}_n, \underline{B}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite *i.i.d.* dont les termes sont définis par blocs comme suit $(\underline{A}_n)_{i,j} = \{\prod_{v=0}^{i-1} A_{nS+i-v}\}\mathbb{I}_{\{j=S\}}$ et $(\underline{B}_n)_{i,1} = \sum_{k=1}^{i}\{\prod_{v=0}^{i-k-1} A_{i-v+nS}\}B_{k+nS}$, $i, j = 1, \ldots, S$. Ainsi une solution de (2) est *p.s.s.* et périodiquement ergodique si et seulement si la solution correspondante de (3) est strictement stationnaire et ergodique. Dans la suite on s'intéressera à l'une ou à l'autre équation en fonction de sa simplicité inhérente.

2. Stationnarité périodique stricte

Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle et posons $\log^+ x = \max\{0, \log x\}$ pour tout $x > 0$. Comme $E\{\eta_t^2\} = 1 < \infty$, alors il est clair que $E(\log^+ \|\underline{A}_0\|)$ et $E(\log^+ \|\underline{B}_0\|)$ sont finies. Par conséquent une condition nécessaire et suffisante (cf. Bougerol et Picard [6]) pour que le modèle (3) possède une unique solution strictement stationnaire, non-anticipative et ergodique est que l'exposant de Lyapunov $\gamma(\underline{A}) := \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n} E\{(\log \|\underline{A}_n \underline{A}_{n-1} \cdots \underline{A}_1\|)\}$ associé à la suite de matrice *i.i.d.* $\underline{A} = (\underline{A}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est strictement négatif. D'autre part, on vérifie aisément que $\prod_{j=0}^{n} \underline{A}_{n-j} = \underline{A}_n P_{n-1}$ où P_n est une matrice définie par blocs dont le (i, j)-ème bloc est donné par $(P_n)_{i,j} := \{\prod_{i=1}^{n}\prod_{v=0}^{S-1} A_{S-v+S(n+1-i)}\}\mathbb{I}_{\{i=s,j=s\}}$. Comme l'exposant de Lyapunov est indépendant de la norme retenue, en choisissant une norme multiplicative, il s'ensuit que $\gamma(\underline{A}) \leqslant \gamma^S(A) = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n} E\{\log \|A_{nS} A_{nS-1} \cdots A_1\|\}$. D'où

Théorème 2.1. *(Stationnarité périodique stricte.) Le modèle* (2) *admet une solution non-anticipative et p.s.s. donnée par*

$$Y_t = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} A_{t-j} B_{t-k} + B_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

si et seulement si $\gamma^S(A) < 0$ où la série (4) *converge p.s. pour tout $t \in \mathbb{Z}$. De plus le processus solution est unique et périodiquement ergodique.*

Remarque 2.1. Dans le cas d'un processus $PGARCH(1, 1)$, la condition $\gamma^S(A) < 0$ s'écrit simplement $\sum_{v=1}^{S} E\{\log(\alpha_v + \beta_v \eta_0^2)\} < 0$, ce qui montre que la condition $E\{\log(\alpha_v + \beta_v \eta_0^2)\} > 0$ (équivalente dans le cadre $GARCH(1, 1)$ à l'existence d'un régime explosif) est compatible avec la stationnarité stricte et ergodique.

Maintenant nous donnons une condition nécessaire pour la stationnarité périodique stricte qui se réduit dans le cas *GARCH* (non périodique, $S = 1$) au Corollary 2.3 de Bougerol et Picard [7].

Corollaire 2.1. *Si le modèle PGARCH défini par* (2) *admet une solution p.s.s. alors $\rho(\prod_{v=0}^{S-1} \beta_{S-v}) < 1$, où β_t est la sous-matrice de A_t définie par $\beta_t = [\beta_{t,j}\mathbb{I}_{\{i=1\}} + \mathbb{I}_{\{i=j+1\}}]_{i,j=1,\ldots,p}$.*

Preuve. Voir Aknouche et Bibi [1]. □

Une conséquence importante de la stationnarité périodique stricte est l'existence d'un moment d'ordre positif pour le processus solution de (1). Un résultat similaire dans le cas *GARCH* a été montré par Nelson [12] ($GARCH(1,1)$) et Berkes et al. ([3], Lemma 2.3) pour le cas $GARCH(p,q)$.

Théorème 2.2. *Si $\gamma^S(A) < 0$ alors il existe $1 \geqslant \delta > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que* (1) : $E(\|A_{n_0 S}A_{n_0 S-1}\cdots A_1\|^\delta) < 1$ *et pour tout t, $E(h_t^\delta) < \infty$ et $E(y_t^{2\delta}) < \infty$.*

Preuve. Voir Aknouche et Bibi [1]. □

3. Conditions d'existence des moments

Le résultat suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) admette une solution *p.s.s.* ayant un moment d'ordre deux fini.

Théorème 3.1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (2) *admette une solution périodiquement stationnaire au second ordre donnée par* (4) *est que*

$$\rho\left(\prod_{v=0}^{S-1} E(A_{S-v})\right) < 1. \tag{5}$$

La série (4) *converge alors p.s. en moyenne d'ordre* 1. *De plus, la solution est unique, p.s.s. et périodiquement ergodique.*

La condition (5) entraîne $\gamma^S(A) < 0$ (voir Bougerol et Picard, [7]). Examinons maintenant le problème de l'existence des moments d'ordres supérieurs.

Théorème 3.2. *Supposons que $E(\eta_t^{2m}) < \infty$, une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (2) *admette une solution donnée par* (4) *est que $\rho(\prod_{v=0}^{S-1} E(A_{S-v}^{\otimes m})) < 1$ où la série* (4) *converge en moyenne d'ordre m. De plus, la solution est unique, p.s.s. et périodiquement ergodique.*

Preuve. Cf. Bibi et Aknouche [4]. □

4. Ergodicité géométrique et β-mélange

Le dernier résultat de cette Note concerne l'ergodicité géométrique et la propriété de β-mélange du processus $(\underline{Y}_t)$ définie par (3). Faisons les hypothèses suivantes :

H1 : La loi de η_1 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue μ, de densité strictement positive.
H2 : $\gamma^{(S)}(A) < 0$.

Des hypothèses similaires ne faisant appel à aucune condition sur les moments ont été considérées par Francq et Zakoïan [11].

Théorème 4.1. *Sous* **H1–H2** *la solution de* (3) *est géométriquement ergodique et est donc β-mélangeante.*

Preuve. La μ-irréductibilité et l'appériodicité de la chaîne $(\underline{Y}_t)$ découle directement de la condition **H1** (cf. [10]). Sous **H2**, il existe $t > 0$ et $\delta > 0$ tels que $E\{\|\underline{Y}_t\|^\delta\} < \infty$ et où

$$\|\underline{Y}_t\|^\delta \leqslant \sum_{k=0}^{t-1}\left\|\left\{\prod_{i=0}^{k-1}\underline{A}_{t-i}\right\}\underline{B}_{t-k}\right\|^\delta + \left\|\left\{\prod_{i=0}^{t-1}\underline{A}_{t-i}\right\}\right\|^\delta \|\underline{Y}_0\|^\delta.$$

Soit la fonction de Lyapunov $g(Y) := \|Y\|^\delta + 1$ et le compact $K = \{Y \in \mathbb{R}^{p+q}\colon\ \lambda g(Y) \leqslant \alpha g(Y) + 1 - b\}$ où $b = \sum_{k=0}^{\infty} E\|\{\prod_{i=0}^{k-1}\underline{A}_{t-i}\}\underline{B}_{t-k}\|^\delta$, $\alpha = E\{\|\{\prod_{i=0}^{t-1}\underline{A}_{t-i}\}\|^\delta\}$ et où $\lambda = \alpha + (1-\alpha)/2$. Puisque $\alpha < 1$, on a $\lambda < 1$ et on a donc montré que la chaîne $(\underline{Y}_t)$ vérifie la condition de dérive $E\{g(\underline{Y}_t)|\underline{Y}_0 = Y\} \leqslant \lambda g(Y) + b\mathbb{I}_K(Y)$. D'où le résultat (cf. [10], Theorem 1). $\square$

Remarque 4.1. Nous parlerons des propriétés d'ergodicité géométrique et périodique de la solution Y_t de (2) si la chaîne de Markov associée $\underline{Y}_t$ solution de (3) possède ces mêmes propriétés.

Remarque 4.2. La condition **H1** peut être allégée comme c'est le cas dans Boussama [8] en supposant que la loi de η_1 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et sa densité est strictement positive sur un voisinage de zéro.

Remarque 4.3. Bauwens et al. [2] ont établie l'ergodicité géométrique d'un modèle *GARCH* à changement de régime Markovien avec probabilités de transition variantes en fonction du passé du processus mais qui tendent à se stabiliser. Cependant, leur modèle diffère du présent cas dans lequel la chaîne de Markov définie dans (2) est à noyaux de transition périodique en fonction du temps.

Remerciements

Les auteurs sont profondément reconnaissants à deux rapporteurs anonymes pour leur examen minutieux et leurs remarques et suggestions fructueuses qui ont nettement amélioré la qualité de la Note.

Références

[1] A. Aknouche, A. Bibi, Quasi-maximum likelihood estimation of periodic GARCH and periodic ARMA-GARCH processes, J. Time Ser. Anal. 30 (1) (2009) 19–46.
[2] L. Bauwens, A. Preminger, J. Rombouts, Theory and inference for Markov switching GARCH model, CORE DP 2007/55, 2007.
[3] I. Berkes, L. Horvath, P. Kokoskza, GARCH processes: Structure and estimation, Bernoulli 9 (2003) 201–227.
[4] A. Bibi, A. Aknouche, On periodic GARCH processes: Stationarity, existence of moments and geometric ergodicity, Math. Methods Statist. 17 (4) (2008) 305–316.
[5] T. Bollerslev, E. Ghysels, Periodic autoregressive conditional heteroskedasticity, J. Business Economic Statist. 14 (1996) 139–151.
[6] P. Bougerol, N. Picard, Strict stationarity of generalized autoregressive processes, Ann. Probab. 20 (1992) 1714–1730.
[7] P. Bougerol, N. Picard, Stationarity of GARCH processes and some nonnegative time series, J. Econometrics 52 (1992) 115–127.
[8] F. Boussama, Ergodicité, estimation et mélange dans les modèles GARCH, Thèse, Paris 7, 1998.
[9] R.A. Boyles, W.A. Gardner, Cycloergodic properties of discrete-parameter nonstationary stochastic processes, IEEE Trans. Inform. Theory 29 (1983) 105–114.
[10] P.D. Feigin, R.L. Tweedie, Random coefficient autoregressive processes: a Markov chain analysis of stationarity and finiteness of moments, J. Time Ser. Anal. 6 (1985) 1–14.
[11] C. Francq, J.M. Zakoïan, Mixing properties of a general class of GARCH(1, 1) models without moment assumptions on the observed process, Econometric Theory 22 (2006) 815–834.
[12] D.B. Nelson, Stationarity and persistence in the GARCH(1, 1) model, Econometric Theory 6 (1990) 318–334.
[13] G.C. Tiao, M.R. Grupe, Hidden periodic autoregressive-moving average models in time series data, Biometrica 67 (1980) 365–373.