Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 321–325
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Statistique/Probabilités

Sur l'identification d'un processus de branchement surcritique

Kaïs Hamza [a], Faïza Maâouia [b]

[a] *School of Mathematical Sciences, Monash University, 3800 Victoria, Australia*
[b] *Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Tunis, Tunis, Tunisie*

Reçu le 29 juillet 2007 ; accepté après révision le 12 janvier 2009

Disponible sur Internet le 20 février 2009

Présenté par Paul Deheuvels

Résumé

On unifie, dans une même famille, les estimateurs usuels de la moyenne et de la variance associés à la loi de reproduction d'un processus de branchement monotype et surcritique. On précise la vitesse de convergence presque-sûre, ainsi que la normalité asymptotique pour chacun de ces estimateurs. On sélectionne, dans cette famille, les « meilleurs » estimateurs de la moyenne, de la variance et du couple (moyenne, variance). L'indépendance asymptotique des erreurs d'estimation est aussi établie. ***Pour citer cet article : K. Hamza, F. Maâouia, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

On the identification of a supercritical branching process. We unify, under a one parameter family, the most common estimators of the mean and the variance of the offspring distribution for a supercritical one-type branching process. We give the rate for the almost-sure convergence, and the asymptotic normality for each one of these estimators. We select, within this family, the "best" estimators for the mean, the variance, and the pair (mean, variance). The asymptotic independence for the standardized estimation errors is also established. ***To cite this article: K. Hamza, F. Maâouia, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abridged English version

Let $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a *supercritical one-type branching process*, starting from $X_0 = c \geqslant 1$. We assume that the offspring law ν satisfies the moment assumption

$\mathbf{A}(\delta)$: ν has a mean $a > 1$, a variance $\sigma^2 > 0$, and a finite moment of order 2δ, $\delta \in (1, 2]$.

We unify here the most common estimators of the mean and the variance of the offspring law ν under a one parameter family. We select also the "best" estimators for the mean, the variance, and the pair (mean,variance).

Our results are given on the set of non-extinction $\mathsf{E} = \{\lim X_n = \infty\} = \bigcap_n \{X_n > 0\}$.

Adresses e-mail : Kais.Hamza@sci.monash.edu.au (K. Hamza), Faiza.Maaouia@fst.rnu.tn (F. Maâouia).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.01.007

We introduce first the following families of r.v.'s $\{(Q_{\alpha,n})_n;\ \alpha\in[-1,\infty)\}$, $\{(T_{\alpha,n})_n;\ \alpha\in[-\frac{1}{2},\infty]\}$, $\{(d_{\alpha,n})_n;\ \alpha\in[-1,\infty]\}$ and $\{(D_{\alpha,n})_n;\ \alpha\in[-1,\infty]\}$

$$\begin{cases} 1.\ Q_{\alpha,n}=\sum_{k=0}^{n}X_k^{\alpha+1}, \quad \forall\alpha\in[-1,\infty); \\ 2.\ T_{\infty,n}=X_n; \quad T_{\alpha,n}=Q_{2\alpha,n}^{-1}Q_{\alpha,n}^2, \quad \forall\alpha\in[-\frac{1}{2},\infty),\ \forall n. \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} 1.\ d_{\infty,n}=1; \quad D_{\infty,n}=n; \\ 2.\ d_{\alpha,n}=(Q_{\alpha,n}+Q_{\alpha,n-1})^{-1}(Q_{\alpha,n}-Q_{\alpha,n-1}); \quad D_{\alpha,n}=\sum_{k=1}^{n}d_{\alpha,k}, \quad \forall\alpha\in[-1,\infty),\ \forall n. \end{cases} \tag{2}$$

To estimate the mean a and the variance σ^2, we consider the families of r.v.'s $\{(A_{\alpha,n})_n;\ \alpha\in[-1,\infty]\}$ and $\{(\Sigma_{\alpha,n}(a))_n,\ \alpha\in[-1/2,\infty]\}$ defined by:

$$\begin{cases} 1.\ A_{\infty,n}=X_{n-1}^{-1}X_n; \\ \quad A_{\alpha,n}=Q_{\alpha,n-1}^{-1}\sum_{k=1}^{n}X_{k-1}^{\alpha}X_k=Q_{\alpha,n-1}^{-1}\sum_{k=1}^{n}X_{k-1}^{\alpha+1}A_{\infty,k}, \quad \forall\alpha\in[-1,\infty); \\ 2.\ \Sigma_{\alpha,n}(a)=D_{2\alpha,n}^{-1}\sum_{k=1}^{n}d_{2\alpha,k}T_{\alpha,k-1}(A_{\alpha,k}-a)^2, \quad \forall\alpha\in[-\frac{1}{2},\infty],\ \forall n. \end{cases} \tag{3}$$

To estimate the pair (mean, variance), we consider the family of r.v.'s $\{(A_{\alpha,n},\Sigma_{\beta,n}(A_{0,n}))_n;\ (\alpha,\beta)\in[-\frac{1}{2},\infty]^2\setminus\{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}\}$.

1. Under $\mathbf{A}(\delta)$, we prove the following properties:

(a) The estimators $\{(A_{\alpha,n})_n;\ \alpha\in[-1,\infty]\}$ are strongly consistent on E (see (16)).
(b) The estimators $\{(A_{\alpha,n})_n;\ \alpha\in[-1/2,\infty]\}$ are asymptotically normal,

$$\sqrt{T_{\alpha,n-1}}(A_{\alpha,n}-a)\xrightarrow{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,\sigma^2) \quad \text{(conditional on } \mathsf{E}). \tag{4}$$

(c) The "best" estimator of the mean (within this family) is $A_{0,n}$, thanks to the inequality

$$\lim_n \mathbb{E}\big(X_{n-1}(A_{0,n}-a)^2\mid\mathsf{E}\big)\leqslant\lim_n\mathbb{E}\big(X_{n-1}(A_{\alpha,n}-a)^2\mid\mathsf{E}\big), \quad \forall\alpha\in[-1/2,+\infty]. \tag{5}$$

2. Under $\mathbf{A}(2)$, we have the following properties:

(a) The estimators $\{(\Sigma_{\alpha,n}(A_{0,n}))_n,\ \alpha\in[-1/2,\infty]\}$ are strongly consistent on E.

More precisely,

$$\sup_{m\geqslant n}(\ln\ln D_{2\alpha,m})^{-1/2}D_{2\alpha,m}^{1/2}\big|\Sigma_{\alpha,m}(A_{0,n})-\sigma^2\big|\xrightarrow{\text{a.s.}}2\sigma^2. \tag{6}$$

(b) The estimators $\{(\Sigma_{\alpha,n}(A_{0,n}))_n;\ \alpha\in[-1/2,\infty]\}$ are asymptotically normal,

$$D_{2\alpha,n}^{1/2}\big(\Sigma_{\alpha,n}(A_{0,n})-\sigma^2\big)\xrightarrow{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,2\sigma^4) \quad \text{(conditional on } \mathsf{E}). \tag{7}$$

(c) The "best" estimator of the variance (in this family) is $\Sigma_{\infty,n}(A_{0,n})$, thanks to the inequality

$$\lim_n\ n\mathbb{E}\big(\big(\Sigma_{\infty,n}(A_{0,n})-\sigma^2\big)^2\mid\mathsf{E}\big)\leqslant\lim_n n\mathbb{E}\big(\big(\Sigma_{\alpha,n}(A_{0,n})-\sigma^2\big)^2\mid\mathsf{E}\big), \quad \forall\alpha\in[-1/2,+\infty]. \tag{8}$$

3. Under $\mathbf{A}(2)$, and if $(\alpha,\beta)\in[-1/2,+\infty]^2\setminus\{(-1/2,-1/2)\}$ we establish, that conditional on E, the estimation errors are asymptotically normal,

$$\big(T_{\alpha,n-1}^{1/2}(A_{\alpha,n}-a),D_{2\beta,n}^{1/2}\big(\Sigma_{\beta,n}(A_{0,n})-\sigma^2\big)\big)\xrightarrow{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,\sigma^2)\otimes\mathcal{N}(0,2\sigma^4). \tag{9}$$

1. Introduction

Soit $X=(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un *processus de branchement monotype et surcritique*, issu de $X_0=c\geqslant 1$. On suppose que la loi de reproduction ν vérifie l'hypothèse de moments

$\mathbf{A}(\delta)$: ν admet une moyenne $a > 1$, une variance $\sigma^2 > 0$ et un moment fini d'ordre 2δ, $\delta \in (1, 2]$.

L'inférence statistique à propos des paramètres a et σ^2 est un problème classique déjà soulevé par plusieurs auteurs. Pour des estimations ponctuelles de a et de σ^2, on peut voir [1,3–5,7–10] et [13]. Pour une estimation globale du couple (a, σ^2), sur l'ensemble de non extinction

$$\mathsf{E} = \{\lim X_n = \infty\} = \bigcap_n \{X_n > 0\}, \tag{10}$$

on peut voir [11]. Parmi les estimateurs les plus usuels du paramètre a, on peut citer

$$\begin{cases} \text{(i) l'Estimateur Empirique de Lotka–Nagaev (EE)} : \check{a}_n = 1_{\{X_{n-1}>0\}} X_{n-1}^{-1} X_n, \\ \text{(ii) l'Estimateur du Maximum de Vraisemblance (EMV)} : \hat{a}_n = (\sum_{k=1}^n X_{k-1})^{-1} \sum_{k=1}^n X_k, \\ \text{(iii) l'Estimateur des Moindres Carrés (EMC)} : \tilde{a}_n = (\sum_{k=1}^n X_{k-1}^2)^{-1} \sum_{k=1}^n X_{k-1} X_k. \end{cases} \tag{11}$$

Il est intéressant de remarquer que les estimateurs EMV ($\alpha = 0$) et EMC ($\alpha = 1$) peuvent être regroupés dans la famille de v. a., $\{(A_{\alpha,n})_{n \geqslant 1};\ \alpha \in [-1, \infty)\}$, définie par

$$A_{\alpha,n} = \left(\sum_{k=1}^n 1_{\{X_{k-1}>0\}} X_{k-1}^{\alpha+1}\right)^{-1} \sum_{k=1}^n 1_{\{X_{k-1}>0\}} X_{k-1}^{\alpha} X_k, \quad \forall \alpha \in [-1, \infty),\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{12}$$

Deux questions naturelles peuvent-être posées. A savoir, peut-on élargir cette famille à $\alpha = \infty$ pour y inclure EE et peut-on en déduire une famille d'estimateurs de la variance ?

Dans la Section 2, on construira une famille d'estimateurs de la moyenne contenant les estimateurs classiques EE, EMV et EMC. Cette famille permettra, en particulier, l'estimation globale du couple (a, σ^2) avec des erreurs d'estimation asymptotiquement indépendantes.

Comme dans [11], nos résultats seront prouvés grâce à des contiguïtés avec des martingales de carrés intégrales, de dimension $d \geqslant 1$, pour lesquelles les théorèmes limites classiques sont applicables (cf. [6,12]).

2. Une famille d'estimateurs du couple (moyenne, variance)

Tous nos résultats sont donnés sur l'ensemble de non extinction E.

2.1. Estimation de la moyenne

Dans le but d'estimer la moyenne a, on considère les familles de v. a. $\{(Q_{\alpha,n})_n;\ \alpha \in [-1, \infty)\}$, $\{(T_{\alpha,n})_n;\ \alpha \in [-\frac{1}{2}, \infty]\}$ et $\{(A_{\alpha,n})_n;\ \alpha \in [-1, \infty]\}$ définies par :

$$\begin{cases} 1.\ Q_{\alpha,n} = \sum_{k=0}^n X_k^{\alpha+1}, \quad \forall \alpha \in [-1, \infty); \\ 2.\ T_{\infty,n} = X_n; \quad T_{\alpha,n} = Q_{2\alpha,n}^{-1} Q_{\alpha,n}^2, \quad \forall \alpha \in [-\frac{1}{2}, \infty),\ \forall n \in \mathbb{N}; \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} 1.\ A_{\infty,n} = X_{n-1}^{-1} X_n; \\ 2.\ A_{\alpha,n} = Q_{\alpha,n-1}^{-1} \sum_{k=1}^n X_{k-1}^{\alpha} X_k = Q_{\alpha,n-1}^{-1} \sum_{k=1}^n X_{k-1}^{\alpha+1} A_{\infty,k}, \quad \forall \alpha \in [-1, \infty),\ \forall n. \end{cases} \tag{14}$$

Ces familles vérifient les propriétés asymptotiques suivantes.

Proposition 2.1. *Presque-sûrement sur l'ensemble* E *on a,*

$$\begin{cases} 1.\ \lim_{\alpha \to \infty} \lim_{n \to \infty} T_{\infty,n}^{-1} T_{\alpha,n} = 1\ ; \\ 2.\ \lim_{\alpha \to \infty} \lim_{n \to \infty} A_{\infty,n}^{-1} A_{\alpha,n} = 1. \end{cases} \tag{15}$$

Théorème 2.2. *Sous l'hypothèse* $\mathbf{A}(\delta)$, $\forall \alpha \in [-1, +\infty]$, *les* $(A_{\alpha,n})_n$ *sont des estimateurs de* a, *fortement consistants sur l'ensemble* E. *Plus précisément, presque-sûrement sur* E, *on a*

	$\alpha = -1$	$\alpha \in (-1, -1/2)$	$\alpha = -1/2$	$\alpha \in (-1/2, +\infty]$
$A_{\alpha,n} - a =$	$O(n^{-1})$	$O(a^{-n(\alpha+1)})$	$O(a^{-n/2}\sqrt{n \ln \ln n})$	$O(a^{-n/2}\sqrt{\ln n})$

(16)

Théorème 2.3. *Sous l'hypothèse* $\mathbf{A}(\delta)$*,* $\forall\alpha \in [-1/2, +\infty]$*, les estimateurs* $(A_{\alpha,n})_n$ *sont asymptotiquement normaux. Plus précisément, conditionnellement à* E*, on a*

$$\sqrt{T_{\alpha,n-1}}(A_{\alpha,n} - a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0, \sigma^2\big). \tag{17}$$

Corollaire 2.4. *Sous* $\mathbf{A}(\delta)$*,* $A_{0,n}$ *est le plus efficace dans la famille* $(A_{\alpha,n})_{\alpha\in[-\frac{1}{2},+\infty]}$*, vu que, pour tout* $\alpha \in [-\frac{1}{2}, +\infty]$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a*

$$\begin{cases} 1.\ T_{\alpha,n} \leqslant T_{0,n}; \\ 2.\ T_{\alpha,n} = T_{0,n}, \quad \textit{si et seulement si} \quad \alpha = 0. \end{cases} \tag{18}$$

2.2. Estimation de la variance

Dans le but d'estimer la variance σ^2, on considère les familles de poids $\{(d_{\alpha,n})_{n\geqslant 0},\ \alpha \in [-1, \infty]\}$ et $\{(D_{\alpha,n})_{n\geqslant 0},\ \alpha \in [-1, \infty]\}$ définis par :

$$\begin{cases} 1.\ \text{si } \alpha \in [-1, \infty), \quad d_{\alpha,n} = (Q_{\alpha,n} + Q_{\alpha,n-1})^{-1}(Q_{\alpha,n} - Q_{\alpha,n-1}) \text{ et } D_{\alpha,n} = \sum_{k=1}^{n} d_{\alpha,k}; \\ 2.\ \text{si } \alpha = \infty, \quad d_{\infty,n} = 1 \quad \text{et} \quad D_{\infty,n} = n, \quad \forall n. \end{cases} \tag{19}$$

Comme dans [2] et [11], l'outil essentiel pour estimer la variance est la Loi Forte Quadratique (LFQ), satisfaite par les v. a. $\{(\sqrt{T_{\alpha,n-1}}(A_{\alpha,n} - a))_n;\ \alpha \in [-\frac{1}{2}, \infty]\}$, et le Théorème de la Limite Centrale (TLC) associé.

Théorème 2.5. *Sous l'hypothèse* $\mathbf{A}(\delta)$*,* $\forall\alpha \in [-1/2, +\infty]$*, les estimateurs* $(A_{\alpha,n})_n$ *vérifient presque-sûrement sur* E*, la propriété LFQ suivante* :

$$\Sigma_{\alpha,n}(a) = D_{2\alpha,n}^{-1} \sum_{k=1}^{n} d_{2\alpha,k} T_{\alpha,k-1}(A_{\alpha,k} - a)^2 \xrightarrow{\text{p.s.}} \sigma^2. \tag{20}$$

Si on remplace dans cette LFQ le paramètre a par son « meilleur » estimateur $A_{0,n}$, on obtient une famille d'estimateurs de la variance σ^2.

Corollaire 2.6. *Sous l'hypothèse* $\mathbf{A}(\delta)$ *et presque-sûrement sur* E*, on a*

$$\begin{cases} 1.\ \textit{pour tout } \alpha \in [-1/2, \infty], \quad \Sigma_{\alpha,n}(A_{0,n}) = D_{2\alpha,n}^{-1} \sum_{k=1}^{n} d_{2\alpha,k} T_{\alpha,k-1}(A_{\alpha,k} - A_{0,n})^2 \xrightarrow{\text{p.s.}} \sigma^2; \\ 2.\ \textit{si } \alpha = -1/2, \quad \hat{\Sigma}_{\alpha,n} = (\ln n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} T_{\alpha,k-1}(A_{\alpha,k} - A_{0,n})^2 \xrightarrow{\text{p.s.}} \sigma^2; \\ 3.\ \textit{si } \alpha \in (-1/2, \infty], \quad \hat{\Sigma}_{\alpha,n} = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} T_{\alpha,k-1}(A_{\alpha,k} - A_{0,n})^2 \xrightarrow{\text{p.s.}} \sigma^2. \end{cases} \tag{21}$$

Théorème 2.7. *Sous l'hypothèse* $\mathbf{A}(2)$ *et conditionnellement à* E*, on a pour* $\alpha \in [-1/2, \infty]$*,*

$$\begin{cases} 1.\ D_{2\alpha,n}^{1/2}(\Sigma_{\alpha,n}(A_{0,n}) - \sigma^2) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 2\sigma^4); \\ 2.\ \sup_{m\geqslant n}(\ln\ln D_{2\alpha,m})^{-1/2} D_{2\alpha,m}^{1/2} |\Sigma_{\alpha,m}(A_{0,n}) - \sigma^2| \xrightarrow{\text{p.s.}} 2\sigma^2. \end{cases} \tag{22}$$

Corollaire 2.8. *Sous* $\mathbf{A}(2)$*,* $\hat{\Sigma}_{\infty,n}$ *est le plus efficace dans la famille* $(\hat{\Sigma}_{\alpha,n})_{\alpha\in[-1/2,\infty]}$*, vu que,*

$$D_{\alpha,n} < D_{\infty,n}, \quad \forall\alpha \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \textit{ et } \forall n \in \mathbb{N}. \tag{23}$$

2.3. Estimation du couple (moyenne, variance)

Dans le but d'estimer le couple (a, σ^2), on considère les familles d'estimateurs $\{(A_{\alpha,n})_n\}_\alpha$ et $\{(\hat{\Sigma}_{\beta,n})_n\}_\beta$. Sous l'hypothèse $\mathbf{A}(2)$, on obtient les résultats suivants :

Théorème 2.9. *Conditionnellement à* E*, on a* $\forall(\alpha,\beta)\in[-\frac{1}{2},+\infty]^2\backslash\{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}$

$$\begin{cases} 1.\ (\sqrt{T_{\alpha,n-1}}(A_{\alpha,n}-a),\sqrt{D_{2\beta,n}}(\Sigma_{\beta,n}(a)-\sigma^2)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2)\otimes\mathcal{N}(0,2\sigma^4), \\ 2.\ \sigma^{-2}T_{\alpha,n-1}(A_{\alpha,n}-a)^2+2^{-1}D_{2\beta,n}(\sigma^{-2}\Sigma_{\beta,n}(a)-1)^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2(2). \end{cases} \tag{24}$$

Remarques 2.10.

1. Lorsque $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$, l'indépendance asymptotique n'a pas lieu. L'étude de ce cas particulier fait l'objet d'un autre travail.
2. Vus les Corollaires 2.4 et 2.8, on retient que $(A_{0,n},\hat{\Sigma}_{\infty,n})$ estime le « mieux » le couple (a,σ^2).

Corollaire 2.11. *Sous l'hypothèse* $\mathbf{A}(2)$*, et conditionnellement à* E*, on a*

$$\begin{cases} 1.\ (\sqrt{S_{n-1}}(A_{0,n}-a),\sqrt{n}(\hat{\Sigma}_{\infty,n}-\sigma^2)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2)\otimes\mathcal{N}(0,2\sigma^4), \quad \textit{avec } S_n=\sum_{k=0}^n X_k; \\ 2.\ \hat{\Sigma}_{\infty,n}^{-1}\,S_{n-1}(A_{0,n}-a)^2+2^{-1}n(\sigma^{-2}\hat{\Sigma}_{\infty,n}-1)^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2(2). \end{cases} \tag{25}$$

Remerciements

Cette recherche a été subventionnée par le « Australian Research Council ».

Références

[1] K.B. Athreya, P.E. Ney, Branching processes, Springer, Berlin, 1972.
[2] F. Chaâbane, F. Maâouia, Théorèmes limites avec poids pour les martingales vectorielles, ESAIM Probab. Statist. 4 (2000) 137–189.
[3] D. Dacunha-Castelle, M. Duflo, Probabilités et statistiques, tome 2, Masson, 1983.
[4] J.P. Dion, Estimation of the mean and the initial probabilities of a branching process, J. Appl. Probab. 11 (1974) 687–694.
[5] J.P. Dion, Estimation of the variance of a branching processes, Ann. Statist. 3 (1975) 1183–1187.
[6] M. Duflo, Random Iterated Models, Springer-Verlag, 1997.
[7] R. Guttorp, Statistical Inference for Branching Processes, Random Iterated Models, John Wiley, New York, 1991.
[8] P. Hall, C.C. Heyde, Martingale Limit Theory and its Applications, Academic Press, 1981.
[9] C.C. Heyde, On estimating the variance of the offspring distribution in a simple branching process, Adv. Appl. Probab. 6 (1974) 421–433.
[10] C.C. Heyde, Quasi-Likelihood and its Application. A General Approach to Optimal Parameter Estimation, Springer, 1997.
[11] F. Maâouia, A. Touati, Identification of multitype branching processes, Ann. Statist. 33 (6) (2005) 2655–2694.
[12] A. Touati, Two theorems on convergence in distribution for stochastic integrals and statistical applications, Theory Probab. Appl. 38 (1) (1993) 95–117.
[13] C.Z. Wei, Asymptotic properties of least-squares estimates in stochastic regression models, Ann. Statist. 13 (4) (1985) 1498–1508.