Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 1283–1288

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Systèmes dynamiques/Géométrie analytique

Rang et courbure de Blaschke des tissus holomorphes réguliers de codimension un ☆,☆☆

Vincent Cavalier, Daniel Lehmann

CNRS UMR 5030, Laboratoire I3M, Université de Montpellier II, case 051, 34095 Montpellier cedex 5, France

Reçu le 4 juin 2008 ; accepté après révision le 13 octobre 2008

Disponible sur Internet le 5 novembre 2008

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

A tout d-tissu de codimension un sur une variété holomorphe M de dimension n, $(d > n)$, nous associons un sous-ensemble analytique S de M, qui – génériquement – a une dimension au plus égale à $n-1$: on dit alors que le tissu est *régulier*.

Notant $c(n,h)$ la dimension de l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré h à n variables, nous montrons que le rang d'un tissu régulier a une borne supérieure $\pi'(n,d)$ égale à 0 pour $d < c(n,2)$, et à $\sum_{h=1}^{k_0}(d - c(n,h))$ pour $d \geqslant c(n,2)$, k_0 désignant l'entier tel que $c(n,k_0) \leqslant d < c(n,k_0+1)$. Cette borne est optimale pour les tissus réguliers. Elle est strictement inférieure à la borne $\pi(n,d)$ de Chern–Castelnuovo pour $n \geqslant 3$.

En outre, si d est précisément égal à $c(n,k_0)$, nous définissons une connexion holomorphe sur un certain fibré vectoriel holomorphe $\mathcal{E}$ de rang $\pi'(n,d)$ au dessus de $M \setminus S$, tel que l'espace vectoriel des germes de relation abélienne du tissu en un point de $M \setminus S$ soit isomorphe à l'espace vectoriel des germes, en ce point, de sections holomorphes de $\mathcal{E}$ ayant une dérivée covariante nulle : la courbure de cette connexion, qui généralise la courbure de Blaschke–Dubourdieu–Pantazi–Hénaut, est alors l'obstruction à ce que le rang du tissu atteigne la valeur $\pi'(n,d)$. [Pour $n = 2$, S est toujours vide de sorte que tout tissu est régulier, $\pi'(2,d)$ est égal à $\pi(2,d)$, et tout d peut s'écrire sous la forme $c(2,k_0)$: nous retrouvons les résultats de Pantazi (1938) et de Hénaut (2004).]

Pour citer cet article : V. Cavalier, D. Lehmann, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).

Abstract

Rank and curvature of Blaschke for regular holomorphic webs of codimension one.[1] To any d-web of codimension one on a holomorphic n-dimensional manifold M $(d > n)$, we associate an analytic subset S of M. We call *regular* the webs for which S has at most dimension $n-1$. This condition is generically satisfied.

Denoting by $c(n,h)$ the dimension of the vector space of homogeneous polynomials of degree h in n variables, we prove that the rank of a regular web has an upper-bound $\pi'(n,d)$ equal to 0 for $d < c(n,2)$, and to $\sum_{h=1}^{k_0}(d - c(n,h))$ for $d \geqslant c(n,2)$, k_0 denoting the integer such that $c(n,k_0) \leqslant d < c(n,k_0+1)$. This bound $\pi'(n,d)$ is optimal for regular webs. For $n \geqslant 3$, it is strictly smaller than the bound $\pi(n,d)$ of Chern–Castelnuovo.

☆ Cet article est un résumé de [V. Cavalier, D. Lehmann, Regular holomorphic webs of codimension one, arXiv: math/0703596v1 [math. DS], 20/03/2007, [1]], sans démonstration.

☆☆ Nous avons récemment modifié la terminologie, et appelons désormais "ordinaires" les tissus dits "réguliers" dans cette note.

Adresses e-mail : cavalier@darboux.math.univ-montp2.fr (V. Cavalier), lehmann@darboux.math.univ-montp2.fr (D. Lehmann).

[1] We changed recently the terminology, and call now "ordinary" instead of "regular" the webs which are studied in this note.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.10.011

Moreover, if d is precisely equal to $c(n, k_0)$, we define a holomorphic connection on some vector bundle $\mathcal{E}$ of rank $\pi'(n, d)$ above $M \setminus S$, such that the vector space of germs of Abelian relation of the web at a point of $M \setminus S$ is isomorphic to the vector space of germs at that point of holomorphic sections of $\mathcal{E}$ with vanishing covariant derivative: the curvature of this connection, which generalizes the curvature of Blaschke–Dubourdieu–Panzani–Hénaut, is then the obstruction for the rank of the web to reach the value $\pi'(n, d)$. [When $n = 2$, S is always empty so that any web is regular, $\pi'(2, d) = \pi(2, d)$, any d may be written $c(2, k_0)$: we recover the results given in Pantazi (1938) and Hénaut (2004).]

To cite this article: V. Cavalier, D. Lehmann, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).

Abridged English version

A holomorphic d-web W of codimension one on a n-dimensional holomorphic manifold M being given ($d > n$), we denote by M_0 the open set in M where the web is locally defined by d holomorphic foliations $\mathcal{F}_i$ of codimension one, all non-singular and with tangent spaces to the leaves distinct at any point. We shall say that the web is in *strong general position* if *any* subset of n leaves among the d leaves through a point of M_0 are in general position. If we assume only that *there exists* a subset of n leaves among the d leaves through a point of M_0 which are in general position (but not necessarily any n of them), we shall say that the web is in *weak general position*.

The rank of the web at a point m of M_0 is the dimension of the vector space of germs of Abelian relations at that point. If the web is in strong general position, Hénaut proved [5] that the rank at a point does not depend on this point. When we require only the web to be in weak general position we shall call "rank of the web" the maximum of the rank at each point of M_0. [Notice that, in this case, the rank at a point is an upper-semicontinuous function of the point.]

When the web is in strong general position, its rank is always upper-bounded, after Chern [2], by the number $\pi(n, d)$ of Castelnuovo (the maximum of the arithmetical genus of an irreducible non-degenerate algebraic curve of degree d in the n-dimensional complex projective space $\mathbb{P}_n$). Moreover, the rank of an algebraic d-web in $\mathbb{P}_n$ (i.e. the web whose leaves are the hyperplanes belonging to some algebraic curve Γ of degree d in the dual projective space $\mathbb{P}'_n$) is equal to the arithmetical genus of Γ: this is, after duality, a theorem coming back to Abel [3]. Therefore, the bound $\pi(n, d)$ is optimal for webs in strong general position.

When $n = 2$, the obstruction for the web to have maximal rank $\pi(2, d) = (d-1)(d-2)/2$ is the Blaschke–Hénaut curvature, which has been defined by Blaschke–Dubourdieu [10] for $d = 3$, and generalized independently by Pantazi [6] and Hénaut [4] for any $d \geqslant 3$.

In this Note, we define, for any d-web which is in weak general position, an analytical subset S of M_0 which has generically dimension at most $n - 1$: in this case, the web will be said "*regular*".

Let $c(n, h)$ be the dimension of the vector space of homogeneous polynomials of degree h in n variables, and denote by k_0 the integer ($\geqslant 1$) such that $c(n, k_0) \leqslant d < c(n, k_0 + 1)$. Set

$$\pi'(n, d) = \begin{cases} 0 & \text{when } d < c(n, 2),\ (k_0 = 1), \\ \sum_{h=1}^{k_0} (d - c(n, h)) & \text{when } d \geqslant c(n, 2),\ (k_0 \geqslant 2). \end{cases}$$

The main results of this Note are then the two following:

Theorem 1. *The rank of any regular d-web on some n-dimensional manifold M_0 is at most equal to $\pi'(n, d)$. This bound is optimal.*

Theorem 2. *If $d = c(n, k_0)$, and if the d-web is regular, there exists a holomorphic vector bundle $\mathcal{E}$ of rank $\pi'(n, d)$ over $M_0 \setminus S$ and a holomorphic connection ∇ on $\mathcal{E}$, such that the vector space of germs of Abelian relations at a point of $M_0 \setminus S$ is isomorphic to the vector space of germs of sections of $\mathcal{E}$ which have a vanishing covariant derivative: the curvature of this connection is then the obstruction for the rank of the web to reach the value $\pi'(n, d)$.*

For $n = 2$, it happens:

- that S is always empty, so that all webs are regular,
- that the upper-bounds $\pi(2, d)$ and $\pi'(2, d)$ coincide,
- that any d, $d \geqslant 3$, may be written $d = c(2, k_0)$, with $k_0 = d - 1$.
- Thus, we recover the results given locally in [6,4].

For $n \geqslant 3$, S may be non-empty, $\pi'(n,d)$ is strictly smaller than $\pi(n,d)$, and not any d may be written $c(n,h)$. We give significative examples of the various possible situations. We prove in particular that all regular parallel d-webs (i.e. webs defined in $\mathbb{C}^n$ by the data of d pencils of parallel hyperplanes) have rank $\pi'(n,d)$ (hence the optimality of this bound).

1. Fibré de Blaschke et opérateur différentiel pour les relations abéliennes

Soit M une variété holomorphe de dimension n, et $\tilde{M}$ la variété des éléments de contact de M, c'est-à-dire l'espace total du fibré $\pi : \mathbb{P}(T^*M) \to M$, projectivisé du fibré cotangent complexe T^*M. Rappelons qu'un d-tissu sur M ($d > n$) est défini par la donnée d'un sous-ensemble analytique W de $\tilde{M}$, de dimension n tel que :

- la restriction à la partie lisse W' de W de la forme de contact canonique de $\tilde{M}$ est intégrable et induit par conséquent un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ de codimension un,
- l'ouvert W_0 des points de W' en lesquels la restriction π_W de π à W' a une différentielle bijective est un revêtement à d feuillets de son image M_0 dans M.

Localement, sur un ouvert U de M_0 au dessus duquel le revêtement $\pi_W : W_0 \to M_0$ est trivial, le tissu est défini par d feuilletages de codimension un qui sont les projections $\mathcal{F}_i$ ($1 \leqslant i \leqslant d$) par π_W des restrictions de $\tilde{\mathcal{F}}$ aux d feuillets de $\pi_W^{-1}(U)$. On supposera dans la suite que le tissu est au moins en *position générale faible*, ce qui veut dire qu'il existe, au voisinage de chaque point de U, au moins une sous-famille de n feuilletages $\mathcal{F}_i$, parmi les d, qui soient en position générale.[2]

Pour tout fibré vectoriel complexe holomorphe E de rang r au dessus de W_0, notons π_*E le fibré vectoriel holomorphe de rang $d \times r$ au dessus de M_0, dont la fibre en un point $m \in M_0$ est définie par

$$(\pi_*E)_m = \bigoplus_{\tilde{m} \in (\pi_W)^{-1}(m)} E_{\tilde{m}}.$$

Le faisceau des germes de sections holomorphes de π_*E est l'image directe du faisceau des germes de sections holomorphes de E par π_W. Par exemple, un élément ω of $\pi_*(T^*\tilde{\mathcal{F}})$ en m est une famille (ω_i) de formes ω_i en m ($1 \leqslant i \leqslant d$), telle que le noyau de ω_i contienne l'espace tangent T_i au feuilletage local $\mathcal{F}_i$ (et lui est par conséquent égal si $\omega_i \neq 0$).

Soit $\mathrm{Tr} : \pi_*(T^*\tilde{\mathcal{F}}) \to T^*M_0$ le morphisme de fibrés vectoriels holomorphes défini par

$$\mathrm{Tr}\,\omega = \sum_{i=1}^{d} \omega_i.$$

Puisque le tissu est en position générale faible, le morphisme Tr est de rang constant n. On appellera *fibré de Blaschke* le fibré vectoriel holomorphe $A = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr} : \pi_*(T^*\tilde{\mathcal{F}}) \to T^*M_0)$, de rang $d - n$ au dessus de M_0.

On définit de façon analogue le fibré vectoriel holomorphe B de rang $(d-1)n(n-1)/2$ au dessus de M_0, égal au noyau du morphisme $\mathrm{Tr} : \pi_*(\bigwedge^2 T^*W_0) \to \bigwedge^2 T^*M_0$ donné par $\mathrm{Tr}\,\varpi = \sum_{i=1}^{d} \varpi_i$.

On appelle *relation abelienne* du tissu toute section holomorphe u de A, solution de l'équation $\mathcal{D}u = 0$, l'application $\mathcal{D}$ désignant l'opérateur différentiel du premier ordre $(\omega_i) \mapsto (d\omega_i)$ de A dans B. [Localement, cette définition est équivalente à la définition usuelle : ayant choisi une intégrale première F_i pour chaque feuilletage local $\mathcal{F}_i$, une relation abélienne s'identifie à une famille (g_i) de fonctions holomorphes d'une variable, telle que $\sum_{i=1}^{d} g_i(F_i)\,dF_i = 0$]. L'espace vectoriel des germes de relation abélienne en un point $m \in M_0$ s'appelle le *rang du tissu en m*. Si le tissu est en position générale forte, Hénaut a démontré [5] que le rang en un point ne dépend pas de ce point. Si nous supposons seulement le tissu en position générale faible (le rang en un point est alors une fonction semi-continue supérieurement de ce point), on appellera *rang du tissu* le maximum du rang en les différents points de M_0 [le rang en un point est une fonction semi-continue supérieurement du point].

[2] S'il en est ainsi de toute sous-famille de n feuilletages parmi les d, on dira que le tissu est en *position générale forte*.

L'opérateur différentiel $\mathcal{D}$ peut encore être vu comme un morphisme $D : J^1 A \to B$. Plus généralement, on notera $D_k : J^{k+1} A \to J^k B$ le k-ième prolongement de D, dont le noyau R_k est l'espace des relations abeliennes formelles à l'ordre $k+1$. On posera : $R_{-1} = A$, $J^{-1} B = 0$.

2. L'ensemble analytique S et la régularité

Notons $c(n,h)$ la dimension de l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré h à n variables, et k_0 l'entier tel que $c(n,k_0) \leqslant d < c(n,k_0+1)$.

(a) Pour $n < d < c(n,2)$, on définit S comme le sous-ensemble des éléments $m \in M_0$ tels que l'espace vectoriel $(R_0)_m = (\pi_0)^{-1}(A_m)$ soit de dimension au moins 1.
(b) Cas $d \geqslant c(n,2)$: Soit η_i une 1-forme intégrable définissant localement le feuilletage $\mathcal{F}_i$. Pour tout entier $h \geqslant 1$, soit $(\eta_i)^h$ la h-ième puissance symétrique de η_i dans l'espace $S^h(T^* M_0)$ des polynômes homogènes de degré h sur le fibré tangent complexe TM_0. Pour tout $m \in M_0$, soit $r_h(m)$ la dimension du sous-espace $L_h(m)$ engendré dans $S^h(T^*_m M_0)$ par les $(\eta_i)^h(m)$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$ (qui ne dépend pas du choix des η_i).

Lemme. *L'inégalité $r_h(m) \leqslant \min(d, c(n,h))$ est toujours vérifiée,*[3] *$r_1 = n$, et $r_h = d$ pour $h > k_0$.*

Soit S_h l'ensemble des points $m \in M_0$ tels que $r_h(m) < \min(d, c(n,h))$, et $S = \bigcup_{h=2}^{k_0} S_h$. Dans les deux cas (a) et (b) l'ensemble analytique S a *génériquement*[4] une dimension au plus égale à $n-1$. De tels tissus, toujours supposés en position générale faible, seront dits *réguliers*.

3. Énoncé des résultats principaux

On sait, d'aprés Chern [2], que le rang d'un tissu en position générale forte est toujours majoré par le nombre $\pi(n,d)$ de Castelnuovo (le genre arithmétique maximum d'une courbe algébrique irréductible non dégénérée de degré d dans l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_n$). Cette majoration est optimale, puisque le rang d'un tissu algébrique (dont les feuilles sont les hyperplans appartenant à une courbe algébrique irréductible non dégénérée Γ dans l'espace dual $\mathbb{P}'_n$ des hyperplans de $\mathbb{P}_n$) est de rang égal au genre arithmétique de Γ : c'est, après dualité, un théorème d'Abel [3].

Définissons le nombre

$$\pi'(n,d) = \begin{cases} 0 & \text{pour } d < c(n,2),\ (k_0 = 1), \\ \sum_{h=1}^{k_0} (d - c(n,h)) & \text{pour } d \geqslant c(n,2),\ (k_0 \geqslant 2). \end{cases}$$

Lemme. *Pour $n \geqslant 3$, $\pi'(n,d) < \pi(n,d)$; et $\pi'(2,d) = \pi(2,d)$.*

Théorème 1. *Le rang de tout d-tissu régulier sur une variété n-dimensionelle M_0 est au plus égal à $\pi'(n,d)$. Cette majoration est optimale.*

Le principe de la démonstration généralise l'approche de [6] et [4]. Il consiste à observer que les éléments de R_{h-2} au dessus d'un élément donné de R_{h-3} sont solution d'un système linéaire de $c(n,h)$ équations à d inconnues, et que ce système est de rang maximum en dehors de S_h.

Théorème 2. *Si $d = c(n,k_0)$, et si le d-tissu est régulier, la restriction $\mathcal{E}$ de R_{k_0-3} à $M_0 \setminus S$ possède une structure naturelle de fibré vectoriel holomorphe de rang $\pi'(n,d)$ au dessus de $M_0 \setminus S$. Il existe sur $\mathcal{E}$ une connexion holomorphe naturelle ∇ telle que l'application $u \mapsto j^{k_0-2}u$ identifie l'espace vectoriel des germes de relations abeliennes u en un point de $M_0 \setminus S$ à l'espace des germes en ce point de sections de $\mathcal{E}$ à dérivée covariante nulle $\nabla(j^{k_0-2}u) = 0$. La courbure de cette connexion est donc l'obstruction à ce que le rang du tissu atteigne la valeur $\pi'(n,d)$.*

[3] On a aussi l'inégalité $h(n-1) - 1 \leqslant r_h(m)$ dans le cas de la position générale forte (cf. [9]).

[4] Il est facile de donner un sens précis à ce mot, S se définissant localement par l'annulation de certains déterminants, qui n'ont en général aucune raison d'être identiquement nuls.

Le principe de la démonstration consiste à appliquer à D_{k_0-2}, le lemme suivant, qui résulte de la théorie de Spencer [8], et qui a été utilisé par Hénaut dans [4] sous une forme équivalente : soient E and F deux fibrés vectoriels holomorphes de base V et supposons que le noyau R d'un opérateur différentiel $D : J^pE \to F$ soit un fibré vectoriel holomorphe au dessus de V : le fibré J^1R est alors un sous-fibré vectoriel de $J^1(J^pE)$, de même que $J^{p+1}E$, et le noyau R' du prolongement $\tilde{D} : J^{p+1}E \to J^1F$ de D est égal à l'intersection $J^1R \cap J^{p+1}E$ dans $J^1(J^pE)$.

Lemme. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes* :

(i) *La projection $R' \to R$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes.*
(ii) *Il existe une connexion holomorphe ∇ sur $R \to V$ telle que l'application $u \mapsto j^pu$ soit un isomorphisme de l'espace des solutions u de l'équation $\mathcal{D}u = 0$ sur l'espace des sections de R à dérivée covariante nulle.*

Une telle connexion ∇ est en outre unique et définie comme étant la scission $\alpha : R \to J^1R$ de la projection $J^1R \to R$ égale à la composition de l'inclusion $R' \hookrightarrow J^1R$ avec l'isomorphisme inverse $R \to R'$.

4. Exemples

A) *Le cas $n = 2$* : L'ensemble S est alors toujours vide. Tout tissu est donc régulier. Comme, en outre, $\pi'(2, d) = \pi(2, d)$ et $d = c(2, d-1)$, nous retrouvons les résultats de Pantazi–Hénaut [6,4].

B) *Un exemple des différentes situations possibles pour $n = 3$, $d = 6$ $(= c(3, 2))$* : Notons x, y, z les coordonnées sur $\mathbb{C}^3$. Soient a, b, c, e, h cinq nombres complexes distincts, tous non nuls, et soit ψ une fonction holomorphe de y. Soit W le 6-tissu de codimension 1 sur $\mathbb{C}^3$ défini par les 1-formes $\eta_i = \mathrm{d}z - p_i\,\mathrm{d}x - q_i\,\mathrm{d}y$, $1 \leqslant i \leqslant 6$, où $(p_1, q_1) = (0, 0)$, $(p_2, q_2) = (a, a^2)$, $(p_3, q_3) = (b, b^2)$, $(p_4, q_4) = (c, c^2)$, $(p_5, q_5) = (e, e^2)$ and $(p_6, q_6) = (h, \psi)$.

L'ensemble S est alors la surface d'équation $\psi(y) = h^2$ en général, l'ensemble vide lorsque ψ est une constante différente de h^2, et tout $\mathbb{C}^3$ lorsque $\psi \equiv h^2$. Le tissu est régulier dans les deux premiers cas, et pas dans le troisième.

Dans le cas régulier, le rang est toujours au moins égal à 2. Il atteint la valeur maximum $\pi'(3, 6) = 3$ lorsque la courbure est nulle, ce qui s'écrit $(\frac{\psi'}{h^2-\psi})' \equiv 0$: il existe alors deux constantes scalaires C $(\neq 0)$ et D, telles que $\psi(y) = h^2 + C\mathrm{e}^{Dy}$. Dans le cas non-régulier $\psi \equiv h^2$, les six points (p_i, q_i) appartiennent à une même conique propre (cf. l'exemple suivant). Le rang est alors $\pi(3, 6) = 4$.

C) *Tissus parallèles* : On appelle ainsi les d-tissus dans $\mathbb{C}^n$ définis par la donnée de d pinceaux d'hyperplans parallèles. Notons l_i le $n-2$ sous-espace projectif de l'hyperplan à l'infini $\mathbb{P}_{n-1}$ de $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}_n$ par lequel passent tous les hyperplans d'un même pinceau : l_i peut encore être vu comme un point du dual $\mathbb{P}'_{n-1}$ de $\mathbb{P}_{n-1}$.

Proposition. *Le rang d'un tissu parallèle est toujours au moins égal à $\pi'(n, d)$. Le tissu est régulier et son rang égal à $\pi'(n, d)$ ssi la propriété suivante est vérifiée : pour tout h, $(1 \leqslant h \leqslant k_0)$, il existe $c(n, h)$ points parmi les d points l_i qui n'appartiennent pas à une même hypersurface algébrique (irréductible ou non) de degré h dans $\mathbb{P}'_{n-1}$.*

Rappelons qu'une hypersurface algebrique de degré h dans $\mathbb{P}'_{n-1}$ est définie en général par la donnée $c(n, h) - 1$ de ses points : génériquement, un tissu parallèle est régulier.

D) *Un exemple de tissu régulier de rang maximum pour $n = 3$, $d = 15$* [7] : Dans $\mathbb{C}^3$ muni des coordonnées x, y, z, Pereira et Pirio ont exhibé 26 relations abéliennes linéairement indépendantes sur le 15-tissu défini par les intégrales premières $u_1 = x$, $u_2 = y$, $u_3 = z$, $u_4 = \frac{z}{z-y}$, $u_5 = \frac{z}{z-x}$, $u_6 = \frac{y}{y-x}$, $u_7 = \frac{1-z}{y-z}$, $u_8 = \frac{1-z}{z-x}$, $u_9 = \frac{1-y}{y-x}$, $u_{10} = \frac{x-y}{z-y}$, $u_{11} = \frac{z(1-y)}{z-y}$, $u_{12} = \frac{z(1-x)}{z-x}$, $u_{13} = \frac{y(1-x)}{y-x}$, $u_{14} = \frac{z(x-y)}{x(z-y)}$, $u_{15} = \frac{(1-z)(y-x)}{(1-x)(y-z)}$.

Puisque $26 = \pi'(3, 15)$, il suffit de montrer que ce tissu est régulier, ce qu'on vérifie avec Mapple, pour en déduire que son rang est exactement 26. On pourrait aussi vérifier la nullité de la courbure.

Références

[1] V. Cavalier, D. Lehmann, Regular holomorphic webs of codimension one, arXiv: math/0703596v1 [math. DS], 20/03/2007.
[2] S.S. Chern, Abzählungen für Gewebe, Abh. Hamburg 11 (1936) 163–170.
[3] S.S. Chern, P.A. Griffiths, Abels theorems and webs, Jahr. Deutsch Math. Ver. 80 (1978) 13–110, and 83 (1981) 78–83.

[4] A. Hénaut, On planar web geometry through abelian relations and connections, Ann. of Math. 159 (2004) 425–445.
[5] A. Hénaut, Systèmes différentiels, nombre de Castelnuovo, et rang des tissus de $\mathbb{C}^n$, Publ. RIMS, Kyoto University 31 (4) (1995) 703–720.
[6] A. Pantazi, Sur la détermination du rang d'un tissu plan, C. R. A. Sc. Roumanie 2 (1938) 108–111.
[7] J.V. Pereira, L. Pirio, conversation privée.
[8] D.C. Spencer, Selecta, 3, World Sci. Publishing Co, Philadelphia, 1985.
[9] J.M. Trépreau, Algébrisation des tissus de codimension 1, la généralisation d'un théorème de Bol, Inspired by S.S. Chern, in: P. Griffiths (Ed.), in: Nankai Tracts in Mathematics, vol. 11, World Scientific and Imperial College Press, 2006.
[10] W. Blaschke, J. Dubourdieu, Invarianten von Kurvengeweben, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 6 (1) (1928) 198–215.