ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 1149–1154

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Contrôle optimal/Équations aux dérivées partielles

Un théorème de représentation des solutions de viscosité d'une équation d'Hamilton–Jacobi–Bellman ergodique dégénérée sur le tore ☆

Marianne Akian, Benoît David [1], Stéphane Gaubert

INRIA Saclay – Île-de-France et CMAP, École polytechnique, route de Saclay, 91128 Palaiseau cedex, France

Reçu le 18 juillet 2007 ; accepté après révision le 23 septembre 2008

Disponible sur Internet le 14 octobre 2008

Présenté par Pierre-Louis Lions

Résumé

Nous nous intéressons à une équation d'Hamilton–Jacobi–Bellman ergodique provenant d'un problème de contrôle stochastique comprenant un nombre fini k de points en lesquels la dynamique s'annule et le lagrangien est minimal. Sous une condition de stabilisabilité, on établit que les solutions de l'équation ergodique sont uniquement déterminées par leurs valeurs en ces points et que l'ensemble des solutions est isométrique au sens de la norme sup à un ensemble convexe fermé non vide dont la dimension est majorée par k. ***Pour citer cet article : M. Akian et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

A representation theorem for the viscosity solutions of a degenerate ergodic Hamilton–Jacobi–Bellman equation on the torus. We consider an ergodic Hamilton–Jacobi–Bellman equation coming from a stochastic control problem in which there are exactly k points where the dynamics vanishes and the Lagrangian is minimal. Under a stabilizability assumption, we state that the solutions of the ergodic equation are uniquely determined by their value on these k points, and that the set of solutions is sup-norm isometric to a non-empty closed convex set whose dimension is less or equal to k. ***To cite this article: M. Akian et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abridged English version

We are interested in a degenerate stochastic control model on the torus $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. More precisely, we consider a stochastic process $\mathbf{x}_t$ valued in $\mathbb{T}^n$ satisfying the stochastic dynamics (1) where $(\mathbf{b}_t)$ is a p-dimensional Brownian motion, $\mathbf{u} := (\mathbf{u}_t)_{t\geqslant 0}$ (the control) is a stochastic process valued in a metric compact set U and adapted to the filtration of $(\mathbf{b}_t)$, and $g : \mathbb{T}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ and $\sigma : \mathbb{T}^n \times U \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ are two functions, the properties of which will be specified later on.

☆ Ce travail a été partiellement soutenu par le projet RFBR-CNRS numéro 05-01-02807.
Adresses e-mail : Marianne.Akian@inria.fr (M. Akian), benoit.david.1983@gmail.com (B. David), Stephane.Gaubert@inria.fr (S. Gaubert).
[1] Ce travail a été réalisé lors du début de thèse de l'auteur à l'INRIA Rocquencourt et l'Université Paris 6.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.09.020

We consider the stochastic control problem with horizon T which consists in minimizing over all the controls $\mathbf{u}$ the quantity (2) where $\mathbf{x}_t$ is the solution of the stochastic differential equation (1) with initial condition $\mathbf{x}_0 = x$; L is the Lagrangian and ϕ is a final cost. We denote by $S^T\phi(x)$ the value of this optimization problem.

It is a well-known fact that the family of operators $\{S^t\}_{t\geqslant 0}$ satisfies the semigroup property. We shall call it the (non linear) evolution semigroup associated to the control problem.

We say that λ is an additive eigenvalue of the evolution semigroup if there exists a continuous function ϕ such that for all $t \geqslant 0$, $S^t\phi = \lambda t + \phi$. The function ϕ is called an additive eigenvector of the evolution semigroup associated to λ, and we denote by $\mathcal{E}_\lambda$ the set of eigenvectors associated to λ. We know that the semi-group has at most one eigenvalue λ and that the eigenvectors are exactly the viscosity solutions of the ergodic Hamilton–Jacobi–Bellman equation (3) where H is the Hamiltonian of the problem defined by (4).

Under uniform ellipticity assumptions, the eigenvector is known to be unique up to an additive constant. Results of this kind have been shown in various settings by A. Bensoussan [8], M. Arisawa and P.-L. Lions [5], M. Akian, A. Sulem and M. Taksar [3], and G. Barles and F. Da Lio [6].

The deterministic case (in which $\sigma \equiv 0$) belongs to the weak KAM theory developed by A. Fathi and A. Siconolfi (see [11–13]). In this setting, an eigenvector is uniquely determined by its restriction to a certain set (the projected Aubry set). See also [5,4,16,10,2,14,7] for related results.

It is natural to ask whether the results of weak KAM theory can be extended to the stochastic case. We show that the answer is positive in the simplest degenerate case in which there is only a finite number of "singular points" $x_1, \dots, x_k$.

We make the following assumptions:

(A1) L is $\mathcal{C}^2$ on $\mathbb{T}^n \times U$.
(A2) g and σ are Lipschitz continuous on $\mathbb{T}^n \times U$.
(A3) L takes non-negative values.
(A4) There exists $k \geqslant 1$ distinct points of $\mathbb{T}^n$ denoted by $x_1, x_2, \dots, x_k$ such that:
  (a) $\forall i = 1, \dots, k, \exists u_i \in U$ such that $g(x_i, u_i) = 0$, $L(x_i, u_i) = 0$ and $\sigma(x_i, u_i) = 0$.
  (b) $\forall x \in \mathbb{T}^n \setminus \{x_1, \dots, x_k\}, \forall u \in U$, at least one of the following properties holds:
    (i) $L(x, u) > 0$
    (ii) $\sigma(x, u)\sigma(x, u)^T$ is a positive definite matrix.
(A5) For all i in $\{1, \dots, k\}$, there exists $u^{(i)} : \mathbb{T}^n \to U$ Lipschitz continuous satisfying $u^{(i)}(x_i) = u_i$, and a continuous function $W^{(i)} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ which vanishes on x_i and is positive elsewhere, and which is a viscosity solution of (5) on $\mathbb{T}^n$.

Assumptions (A3)–(A5) imply that $W^{(i)}$ is a Lyapunov function for the dynamical system obtained by applying the feedback control $u^{(i)}$. Thus, the point x_i is stabilized in probability by the control $u^{(i)}$ (see [9]).

Under these assumptions the eigenvalue of the semigroup is 0. Moreover, the following results show that the set $\{x_1, \dots, x_k\}$ plays a role analogous to the (projected) Aubry set. They are inspired by analogous results obtained for discrete stochastic control problems by M. Akian and S. Gaubert [1].

Theorem 1 *(Maximum principle). Let v be a viscosity subsolution of* (3) *and w a viscosity supersolution of* (3)*, both with $\lambda = 0$. Under Assumptions* (A1)–(A4)*, $v - w$ attains its maximum on the subset* $\{x_1, \dots, x_k\}$.

Corollary 1. *Under assumptions* (A1)–(A4)*, an eigenvector is uniquely determined by its values on the set* $\{x_1, \dots, x_k\}$.

A similar result was obtained in the deterministic case by E. Rouy and A. Tourin [17], and V.N. Kolokoltsov and V.P. Maslov [15].

Theorem 2. *Under assumptions* (A1)–(A5)*, $\mathcal{E}_0$ is sup-norm isometric to a non-empty convex set of* $\mathbb{R}^k$.

Furthermore, we describe this convex set in the French version of the present Note.

1. Introduction

Nous nous intéressons à un modèle de contrôle stochastique dégénéré sur le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Plus précisément, nous considérons un processus $\mathbf{x}_t$ à valeurs dans $\mathbb{T}^n$ régi par l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}\mathbf{x}_t = g(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)\,\mathrm{d}\mathbf{b}_t \tag{1}$$

où $(\mathbf{b}_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement Brownien de dimension p (p étant un entier donné), $\mathbf{u} := (\mathbf{u}_t)_{t\geqslant 0}$ (le contrôle) est un processus à valeurs dans un espace d'action métrique compact U et adapté à la filtration de $(\mathbf{b}_t)_{t\geqslant 0}$, $g : \mathbb{T}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma : \mathbb{T}^n \times U \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont deux fonctions dont on précisera les propriétés en temps voulu. Nous considérons alors le problème de contrôle stochastique en horizon T qui consiste à minimiser sur tous les contrôles $\mathbf{u}$ un coût de la forme

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T L(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)\,\mathrm{d}s + \phi(\mathbf{x}_T)\right], \tag{2}$$

$\mathbf{x}_t$ étant la solution de (1) avec la condition initiale $\mathbf{x}_0 = x$, $L : \mathbb{T}^n \times U \to \mathbb{R}$ étant le *Lagrangien* du problème, et $\phi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ étant le coût final. On note $S^T\phi(x)$ la valeur de ce problème de contrôle lorsque l'état initial est x. Il est classiquement établi que $\{S^t\}_{t\geqslant 0}$ vérifie la propriété de semi-groupe. Nous l'appellerons *semi-groupe d'évolution* (non linéaire) associé au problème de contrôle.

On dit alors que λ est une valeur propre additive du semi-groupe $\{S^t\}_{t\geqslant 0}$ s'il existe une fonction continue ϕ telle que, pour tout $t \geqslant 0$, $S^t\phi = \lambda t + \phi$. La fonction ϕ est appelée fonction propre additive associée à la valeur propre λ, et on note $\mathcal{E}_\lambda$ l'ensemble des fonctions propres associées à λ. Le semi-groupe $\{S^t\}_{t\geqslant 0}$ étant formé d'opérateurs contractant au sens large pour la norme sup sur un domaine compact, on sait que, si elle existe, la valeur propre λ est unique et que, pour toute fonction continue ψ, elle est limite uniforme de $S^T\psi/T$ lorsque T tend vers l'infini. En outre, les fonctions propres sont exactement les solutions de viscosité de l'équation d'Hamilton–Jacobi–Bellman ergodique

$$\lambda - H\big(x, D\phi(x), D^2\phi(x)\big) = 0, \quad x \in \mathbb{T}^n, \tag{3}$$

où l'*hamiltonien* H s'écrit

$$H(x, p, A) = \min_{u\in U}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\big(\sigma(x,u)\sigma(x,u)^T A\big) + \big\langle p, g(x,u)\big\rangle + L(x,u)\right). \tag{4}$$

Les problèmes d'existence et d'unicité de la valeur propre et du vecteur propre (à constante additive près) de $\{S^t\}_{t\geqslant 0}$ sont donc équivalents ici à ceux des solutions λ et v de (3). Ces derniers problèmes ont été étudiés dans divers contextes, en connection ou non avec le problème de la convergence de v^T/T vers λ lorsque v^T est solution de viscosité de l'équation parabolique associée, le qualificatif d'ergodicité étant parfois indifféremment attribué à l'une de ces propriétés (voir par exemple [5] et [4]).

En particulier, dans le cas stochastique ($\sigma \not\equiv 0$) des résultats d'unicité du vecteur propre ont été établis dans certains cas particuliers. D'abord, A. Bensoussan [8, section 6 du chapitre II] a montré lorsque le bruit σ est l'identité et l'espace d'état est un tore ou un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ (avec des conditions de Neumann au bord) que l'équation d'Hamilton–Jacobi–Bellman ergodique (3) admettait une unique solution faible v dans l'espace $W^{2,p}$. Des résultats d'unicité similaires ont ensuite été obtenus dans le cadre des solutions de viscosité continues. Dans [5, Th. II.2], M. Arisawa et P.-L. Lions traitent le cas d'équations d'Hamilton–Jacobi–Bellman ergodiques sur le tore, sous une condition d'uniforme ellipticité (c'est-à-dire lorsqu'il existe $\nu > 0$ tel que $\sigma(x,u)\sigma(x,u)^T \geqslant \nu I_n$). Dans [3], M. Akian, A. Sulem et M. Taksar traitent le cas d'une inéquation variationnelle ergodique associée à un problème d'optimisation du gain moyen en temps long d'un portefeuille. Dans [6], G. Barles et F. Da Lio considèrent des équations d'Hamilton–Jacobi–Bellman ergodiques uniformément elliptiques avec condition de Neumann au bord sur un ouvert borné. Outre ces résultats d'unicité du vecteur propre, des résultats de convergence de la moyenne en temps ou d'homogénéisation ont été obtenus par M. Arisawa et P.-L. Lions dans [5] et par O. Alvarez et M. Bardi dans [4].

Dans le cas déterministe ($\sigma \equiv 0$), des résultats d'existence et d'unicité de la valeur propre ainsi que des résultats de convergence de la moyenne en temps ou d'homogénéisation ont d'abord été obtenus par P.-L. Lions, G. Papanicolaou and S.R.S. Varadhan dans [16], puis par M. Arisawa et P.-L. Lions dans [5]. Mais des résultats plus généraux sur les vecteurs propres ont été montrés par A. Fathi (voir [12,11]) et par A. Fathi, A. Siconolfi [13] dans le cadre de la théorie KAM faible. Dans cette théorie, l'espace d'états est une variété compacte M, et on se donne un Lagrangien $L : TM \to \mathbb{R}$ régulier, convexe et coercif sur les fibres. Sous ces hypothèses, on a l'existence et l'unicité de la valeur propre. En outre, un vecteur propre est uniquement déterminé par sa restriction à un certain ensemble (ensemble d'Aubry projeté). La généralisation de ces derniers résultats au cas d'un espace d'états non compact a été étudiée, dans des cadres différents, par Contreras dans [10], par M. Akian, S. Gaubert et C. Walsh dans [2] et par H. Ishii et H. Mitake dans [14]. De plus, des résultats de convergence dans ce cadre ont été obtenus par G. Barles et J.-M. Roquejoffre dans [7].

On cherche ici une caractérisation des vecteurs propres de $\{S^t\}_{t\geqslant 0}$, ou des solutions de l'équation aux dérivées partielles du second ordre (3), qui soit de même nature que celle de la théorie KAM faible, et qui traite de cas dégénérés où l'unicité n'est pas assurée. Nous considérons pour cela le type le plus simple de dégénérescence, comprenant un nombre fini de points "singuliers" $x_1, \dots, x_k$, et nous établissons qu'un vecteur propre est défini de manière unique par sa restriction à l'ensemble $\{x_1, \dots, x_k\}$, qui joue ainsi un rôle analogue à l'ensemble d'Aubry projeté.

Plus précisément, nous utiliserons les hypothèses suivantes :

(H1) L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{T}^n \times U$.
(H2) g et σ sont continues sur $\mathbb{T}^n \times U$ et lipschitziennes.
(H3) L est à valeurs positives ou nulles.
(H4) Il existe $k \geqslant 1$ points distincts de $\mathbb{T}^n$ notés $x_1, x_2, \dots, x_k$ tels que :
  (a) $\forall i = 1, \dots, k, \exists u_i \in U$ tel que $g(x_i, u_i) = 0$, $L(x_i, u_i) = 0$ et $\sigma(x_i, u_i) = 0$.
  (b) $\forall x \in \mathbb{T}^n \setminus \{x_1, \dots, x_k\}, \forall u \in U$, au moins l'une des propriétés suivantes est vérifiée :
    (i) $L(x, u) > 0$
    (ii) $\sigma(x, u)\sigma(x, u)^T$ est une matrice symétrique définie positive.
(H5) Pour tout i dans $\{1, \dots, k\}$, il existe une application $u^{(i)} : \mathbb{T}^n \to U$ lipschitzienne vérifiant $u^{(i)}(x_i) = u_i$, et une fonction continue $W^{(i)} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ nulle en x_i et strictement positive ailleurs qui soit solution de viscosité sur $\mathbb{T}^n$ de :

$$-\left(\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\sigma\left(x, u^{(i)}(x)\right)\sigma\left(x, u^{(i)}(x)\right)^T D^2 W^{(i)}(x)\right) + \left\langle g\left(x, u^{(i)}(x)\right), \nabla W^{(i)}(x)\right\rangle + L\left(x, u^{(i)}(x)\right)\right) \geqslant 0. \quad (5)$$

Les hypothèses (H3) et (H4) assurent que la seule valeur propre additive possible du semi-groupe S^t est 0, et que les trajectoires optimales finissent presque sûrement dans l'union de $\{x_1, \dots, x_k\}$ et d'un domaine où le bruit est non dégnéré. De plus, les hypothèses (H3)–(H5) assurent que la fonction $W^{(i)}$ est une fonction de Lyapunov pour le système dynamique obtenu en applicant le contrôle feedback $u^{(i)}$. Ainsi, le point x_i est stabilisable en probabilité par le contrôle $u^{(i)}$ (voir [9, Théorème 13]).

2. Résultat d'unicité pour l'équation d'Hamilton–Jacobi–Bellman ergodique

Le shéma directeur des résultats qui suivent et de leur preuves est inspiré de résultats analogues obtenus par M. Akian et S. Gaubert [1] dans le cas du contrôle stochastique à temps discret et espace d'états fini.

Théorème 2.1 *(Principe du maximum). Soient v une sous-solution de viscosité de* (3) *et w une sur-solution de viscosité de* (3)*, pour $\lambda = 0$. Alors, sous les hypothèses* (H1)–(H4)*, le maximum de $v - w$ est atteint en l'un des points $x_1, \dots, x_k$.*

Dans [1], la preuve de ce type de résultat reposait sur la propriété que tout sous point fixe d'une matrice de Markov est constant sur ses classes finales et y atteint son maximum. Dans le cas présent, guidés par la propriété que les classes finales d'un processus $\mathbf{x}_t$ associé à un contrôle optimal sont les singletons $\{x_i\}$, on construit, pour tout fermé de $\mathbb{T}^n \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$, une sous-solution stricte classique de (3). Le reste de la preuve repose sur la concavité de H et les techniques classiques d'unicité de solutions de viscosité.

Corollaire 2.2 *(Théorème de comparaison). Soient v une sous-solution de* (3) *et w une sur-solution de* (3)*, pour $\lambda = 0$, telles que $v(x_i) = w(x_i)$ pour tout i. Alors, sous les hypothèses* (H1)–(H4)*, $v \leqslant w$.*

Corollaire 2.3 *(Résultat d'unicité). Soient $v_1, v_2, \ldots, v_k$, k nombres réels. Alors, sous les hypothèses* (H1)–(H4)*, il existe au plus une solution v de l'équation* (3) *telle que, pour $i = 1, \ldots, k$, $v(x_i) = v_i$.*

Dans le cas particulier du contrôle déterministe, des résultats d'unicité similaires ont été obtenus par E. Rouy et A. Tourin [17], et par V.N. Kolokoltsov et V.P. Maslov [15].

Corollaire 2.4. *Sous les hypothèses* (H1)–(H4)*, l'application $\Upsilon : \mathbb{R}^{\mathbb{T}^n} \to \mathbb{R}^k$, $v \mapsto (v(x_1), \ldots, v(x_k))$ est une isométrie au sens de la norme sup de $\mathcal{E}_0$ dans son image $\mathcal{E}^c$, qui est un fermé invariant par toutes les translations $(v_1, \ldots, v_k) \mapsto (\mu + v_1, \ldots, \mu + v_k)$ $(\mu \in \mathbb{R})$.*

3. Existence et représentation des vecteurs propres

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses* (H1)–(H5)*, l'ensemble $\mathcal{E}^c = \Upsilon(\mathcal{E}_0)$ est un convexe non vide.*

La preuve repose sur la concavité de H, laquelle implique que l'ensemble des sous-solutions de (3) pour $\lambda = 0$ est convexe. Il suffit alors de montrer que pour toute sous-solution v de (3) pour $\lambda = 0$, il existe une solution de cette même équation coïncidant avec v sur $\{x_1, \ldots, x_k\}$. On sait que $S^t v$ est croissante par rapport à t et converge donc lorsque t tend vers l'infini. Si la convergence était uniforme, on pourrait conclure, comme dans [1], que la limite est une solution. On remplace ici cet argument par la méthode de Perron, l'hypothèse (H5) assurant l'existence de sur-solutions, et (H3) que 0 est sous-solution.

Si x est un élément de $\mathbb{T}^n$, on note $\mathcal{U}(x)$ l'ensemble des contrôles $\mathbf{u}$ tels que la solution $\mathbf{x}_t$ de l'équation différentielle stochastique (1) associée au contrôle $\mathbf{u}$ et de condition initiale $\mathbf{x}_0 = x$ converge avec probabilité 1 vers l'un des éléments de $\{x_1, \ldots, x_k\}$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(\lim_{t\to\infty} d(\mathbf{x}_t, \{x_1, \ldots, x_k\}) = 0) = 1$. Étant donnés x dans $\mathbb{T}^n$, $\mathbf{u}$ dans $\mathcal{U}(x)$, i dans $\{1, \ldots, k\}$, et $\mathbf{x}_t$ comme ci-dessus, on pose $p_i^{\mathbf{u}}(x) = \mathbb{P}(\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}_t = x_i)$.

Théorème 3.2 *(Description du convexe $\mathcal{E}^c$). Sous les hypothèses* (H1)–(H5) *et la condition $\mathcal{U}(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in \mathbb{T}^n$, l'ensemble $\mathcal{E}^c = \Upsilon(\mathcal{E}_0)$ est exactement l'ensemble des k-uplets $(v_1, \ldots, v_k)$ tels que, pour tout i dans $\{1, \ldots, k\}$, on ait :*

$$v_i \leqslant \inf_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}(x_i)} \left\{ \mathbb{E}\left[\int_0^\infty L(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)\, \mathrm{d}s \right] + \sum_{j=1}^k p_j^{\mathbf{u}}(x_i) v_j \right\}. \tag{6}$$

Remarquons que la condition $\mathcal{U}(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in \mathbb{T}^n$ est vérifiée par exemple s'il existe $u : \mathbb{T}^n \to U$ lipschitzienne et deux fonctions continues $V, W : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}_+$, strictement positives en dehors de $\{x_1, \ldots, x_k\}$, telles que $\inf V = \inf W = 0$ et que W soit solution de viscosité de

$$-\left(\frac{1}{2} \operatorname{tr}\bigl(\sigma\bigl(x, u(x)\bigr)\sigma^T\bigl(x, u(x)\bigr) D^2 W(x)\bigr) + \bigl\langle g\bigl(x, u(x)\bigr), DW(x)\bigr\rangle + V(x) \right) \leqslant 0. \tag{7}$$

Il suffit en effet d'appliquer le Théorème 18 de [9] et la remarque qui le précède. On peut prendre ici $W := W^{(i)}$, $u := u^{(i)}$ et $V(x) = L(x, u^{(i)}(x))$ si $L(x, u^{(i)}(x)) > 0$ pour tout x n'appartenant pas à $\{x_1, \ldots, x_k\}$.

La description du convexe fermé $\mathcal{E}^c$ donnée par le Théorème 3.2 ne permet pas d'assurer que sa dimension soit égale à k. L'exemple suivant est tel que $k = 2$ et la dimension de $\mathcal{E}^c$ est bien égale à $k = 2$.

Considérons le problème de contrôle stochastique $(1, 2)$ sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ avec comme espace d'actions $U = [-1, 1]$ et où : $L(x, u) = \frac{\sin^2(2\pi x)}{4\pi^2}$, $g(x, u) = u$, $\sigma(x, u) = \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}$. Les hypothèses (H1)–(H4) sont immédiatement vérifiées avec $k = 2$, $u_1 = u_2 = 0$, $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{1}{2}$ (ou plutôt leurs images dans $\mathbb{T}$). L'hypothèse (H5) est également vérifiée avec $u^{(1)}(x) = -\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)$, $u^{(2)}(x) = \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)$, $W^{(1)}(x) = (d(x, x_1))^2$ et $W^{(2)}(x) = (d(x, x_2))^2$, où d désigne la distance naturelle sur $\mathbb{T}$. La condition $\mathcal{U}(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in \mathbb{T}$ est bien vérifiée car les fonctions $u := u^{(1)}$, $W := W^{(1)}$ et $V := L(x, u(x))$ satisfont à la condition (7). Enfin, en étudiant qualitativement l'équation d'Hamilton–Jacobi–Bellman ergodique, on montre que le convexe $\mathcal{E}^c$ est bien de dimension 2.

Références

[1] M. Akian, S. Gaubert, Spectral theorem for convex monotone homogeneous maps, and ergodic control, Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications 52 (2) (2003) 637–679.
[2] M. Akian, S. Gaubert, C. Walsh, How to find horizon-independent optimal strategies leading off to infinity: a max-plus approach, in: Proc. of the 45th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'06), San Diego, 2006.
[3] M. Akian, A. Sulem, M. Taksar, Dynamic optimization of long-term growth rate for a portfolio with transaction costs and logarithmic utility, Math. Finance 11 (2) (2001) 153–188.
[4] O. Alvarez, M. Bardi, Singular perturbations of nonlinear degenerate parabolic PDEs: a general convergence result, Arch. Ration. Mech. Anal. 170 (1) (2003) 17–61.
[5] M. Arisawa, P.-L. Lions, On ergodic stochastic control, Comm. Partial Differential Equations 23 (11–12) (1998) 2187–2217.
[6] G. Barles, F. Da Lio, On the boundary ergodic problem for fully nonlinear equations in bounded domains with general nonlinear Neumann boundary conditions, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 22 (5) (2005) 521–541.
[7] G. Barles, J.-M. Roquejoffre, Ergodic type problems and large time behaviour of unbounded solutions of Hamilton–Jacobi equations, Comm. Partial Differential Equations 31 (7–9) (2006) 1209–1225.
[8] A. Bensoussan, Perturbation Methods in Optimal Control, Wiley/Gauthier-Villars Series in Modern Applied Mathematics, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1988. Translated from the French by C. Tomson.
[9] A. Cesaroni, Lyapunov stabilizability of controlled diffusions via a superoptimality principle for viscosity solutions, Appl. Math. Optim. 53 (1) (2006) 1–29.
[10] G. Contreras, Action potential and weak KAM solutions, Calc. Var. Partial Differential Equations 13 (4) (2001) 427–458.
[11] A. Fathi, Weak KAM Theorem in Lagrangian Dynamics, Cambridge University Press, in press.
[12] A. Fathi, Théorème KAM faible et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 324 (9) (1997) 1043–1046.
[13] A. Fathi, A. Siconolfi, PDE aspects of Aubry–Mather theory for quasiconvex Hamiltonians, Calc. Var. Partial Differential Equations 22 (2) (2005) 185–228.
[14] H. Ishii, H. Mitake, Representation formulas for solutions of Hamilton–Jacobi equations with convex Hamiltonians, Indiana Univ. Math. J. 56 (5) (2007) 2159–2183.
[15] V.N. Kolokoltsov, V.P. Maslov, Idempotent Analysis and its Applications, Mathematics and its Applications, vol. 401, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.
[16] P.-L. Lions, G. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan, Homogenization of Hamilton–Jacobi equations, 1987. Unpublished manuscript.
[17] E. Rouy, A. Tourin, A viscosity solutions approach to shape-from-shading, SIAM J. Numer. Anal. 29 (3) (1992) 867–884.