



Partial Differential Equations

Dynamique en grand temps pour une classe d'équations de type KPP en milieu périodique

Michaël Bages, Patrick Martinez, Jean-Michel Roquejoffre

Institut de mathématiques, Université de Toulouse et CNRS (UMR 5219), 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse, France

Reçu le 22 avril 2008 ; accepté après révision le 31 juillet 2008

Disponible sur Internet le 20 septembre 2008

Présenté par Pierre-Louis Lions

Résumé

Il est connu – Berestycki–Hamel (2002) – que les équations de réaction–diffusion de type KPP, posées dans des milieux périodiques, admettent des solutions ondes pulsatoires. Le résultat principal de cette Note est une description générale, en une dimension d'espace, de la façon dont le profil d'une solution issue d'une donnée initiale comprise entre deux ondes pulsatoires converge, en grand temps, vers le profil de l'onde. *Pour citer cet article : M. Bages et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Large-time dynamics for a class of KPP-type equations in periodic media. It is known – Berestycki–Hamel (2002) – that reaction–diffusion of the KPP type, posed in periodic media, has pulsating wave solutions. The main result of this Note is a rather general description, in one space dimension, of how the profile of a solution initially trapped between two translates of the pulsating wave, will approach the profile of the wave. *To cite this article : M. Bages et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

We are interested in the long-term dynamics of the following reaction–diffusion equation

$$u_t - u_{xx} = f(x, u) \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0), \quad u(t, -\infty) = 0, \quad u(t, +\infty) = 1, \tag{1}$$

where the nonlinearity term f is 1-periodic in x , and of KPP (Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov) type:

$$f(x, 0) = f(x, 1) = 0, \quad f(x, u) > 0 \quad \text{on }]0, 1[, \quad f''_u(x, \cdot) < 0 \quad \text{on } [0, 1].$$

When f does not depend on x , existence and stability of traveling waves, i.e. solutions of the form $\phi_c(x + ct)$, is an old problem dating back to [9]. The profile ϕ_c satisfies

$$-\phi''_c + c\phi'_c = f(\phi_c), \quad \phi_c(-\infty) = 0, \quad \phi_c(+\infty) = 1, \tag{2}$$

Adresses e-mail : bages@mip.ups-tlse.fr (M. Bages), patrick.martinez@math.univ-toulouse.fr (P. Martinez), jean-michel.roquejoffre@math.univ-toulouse.fr (J.-M. Roquejoffre).

and exists if and only if $c \geq c^* = 2\sqrt{f'(0)}$. There are many results about the large-time dynamics of (1): if $u(0, \cdot)$ decays sufficiently fast as $x \rightarrow -\infty$, the profile of the solution $u(t, x)$ of (1) will converge to that of the wave – [9,4,12] – with a shift that may be unbounded. If, for some $\delta > 0$, we have $u(0, x) = \phi_c(x)(1 + O(e^{\delta x}))$ as $x \rightarrow -\infty$, then $u(t, x - ct)$ converges to ϕ_c – the case $c = c_*$ being rather difficult, the optimal convergence rate being given by Gallay [5].

In the x -dependant case, the right notion is that of pulsating waves, i.e. solutions $u(t, x)$ of (1) for which there exists $c > 0$ such that $t \mapsto u(t, x - ct)$ is $\frac{1}{c}$ -periodic. Existence and qualitative theory is very well developed [2,3,7]. Essentially, there is $c^* > 0$ such that (1) has pulsating wave solutions u_c of velocity c if and only if $c \geq c^*$. Moreover, $\partial_t u_c > 0$. The minimal speed c^* is characterised as follows: let $k(\lambda)$ be the principal eigenvalue of the operator $L_\lambda := \partial_{xx} + 2\lambda\partial_x + (\lambda^2 + f'_u(x, 0))$, acting on the space of C^2 1-periodic functions. Then $c^* = \min_{\lambda > 0} \frac{k(\lambda)}{\lambda} > 0$. Moreover, for all $c > c_*$, each u_c behaves at $-\infty$ like $e^{\lambda_c(x+ct)}\psi_{\lambda_c}(x)$, where λ_c is the smallest positive root of $k(\lambda) = c\lambda$, and ψ_{λ_c} is a positive eigenfunction of L_{λ_c} associated to the eigenvalue $k(\lambda_c) = c\lambda_c$.

To study the large-time behaviour of (1), we need a slightly more precise information:

Theorem 0.1.

(i) For $c > c^*$, (1) has a pulsating wave solution $u_c(t, x)$ such that, as $x + ct \rightarrow -\infty$,

$$u_c(t, x) = e^{\lambda_c(x+ct)}\psi_{\lambda_c}(x) + O(e^{(\lambda_c+\delta)(x+ct)}).$$

(ii) For $c = c^*$, (1) has a pulsating wave solution $u_{c^*}(t, x)$ such that, as $x + ct \rightarrow -\infty$,

$$u_{c^*}(t, x) = -(x + ct)e^{\lambda_{c^*}(x+ct)}\psi_{\lambda_{c^*}}(x) + O(e^{\lambda_{c^*}(x+ct)}).$$

Consider the case $c > c^*$. An easy follow-up of the argument of the preceding theorem proves the following: consider an initial datum $u_0(x) \in [0, 1]$ for (1), such that there is a pulsating wave u_c and $\delta > 0$ satisfying

$$u_0(x) = u_c(0, x)(1 + O(e^{\delta x})) \quad \text{as } x \rightarrow -\infty, \quad \liminf_{x \rightarrow +\infty} u_0(x) > 0. \tag{3}$$

Then, as $t \rightarrow +\infty$, uniformly in x : $u(t, x) = u_c(t, x)(1 + O(e^{-\omega t}))$ for some $\omega > 0$.

We wish to understand what happens when the – quite stringent – assumption (3) is slightly relaxed. A natural way to loosen it is to assume that u_0 is trapped between two translates – in time – of a pulsating wave; the behaviour of the solution $u(t, x)$ of the Cauchy problem (1) with such initial data u_0 is given by the following – much more difficult – general theorem:

Theorem 0.2. Assume there is $M > 0$ such that $u_c(-M, x) \leq u_0(x) \leq u_c(M, x)$. Let $m(t, x)$ solve

$$m_t - m_{xx} - 2\left(\lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}}\right)m_x - c\lambda_c m_x^2 = 0, \quad m(0, x) = u_c(\cdot, x)^{-1}(u_0(x)). \tag{4}$$

Then, as $t \rightarrow +\infty$:

- (i) we have $\|m_t(t, \cdot)\|_\infty = O(t^{-1/2})$, $\|m_x(t, \cdot)\|_\infty = O(t^{-1/2})$;
- (ii) we have, uniformly in $x \in \mathbb{R}$: $|u(t, x) - u_c(t + m(t, x), x)| = O(t^{-1/2})$.

We point out that Theorem 0.2 is new, even in the x -independent case. Let us also mention that nontrivial dynamics does occur, once again in the x -independent case: the shift equation is reduced then to an advection–diffusion equation for which – see [6] – many solutions do not converge as $t \rightarrow +\infty$, while all the derivatives go to 0. Part (i) of the theorem is the most involved: it relies on very precise asymptotics of a heat kernel that the current literature cannot treat [10].

Although we cannot treat the case $c = c^*$ in the same generality, the arguments developed in Theorem 0.2 allow us to prove the following:

Theorem 0.3. Assume that $u_0 \in [0, 1]$ satisfies $u_0(x) = u_{c^*}(0, x)(1 + O(e^{\delta x}))$ for some $\delta > 0$ as $x \rightarrow -\infty$, and $\liminf_{x \rightarrow +\infty} u_0(x) > 0$. Then, as $t \rightarrow +\infty$, $\|u(t, \cdot) - u_{c^*}(t, \cdot)\|_\infty = O(t^{-1/2})$.

1. Introduction

On s'intéresse au comportement en grand temps de l'équation de réaction–diffusion en dimension un

$$u_t - u_{xx} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad u(t, -\infty) = 0, \quad u(t, +\infty) = 1, \tag{5}$$

où le terme non linéaire f est 1-périodique en x , et vérifie

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x, 0) = f(x, 1) = 0$ et $f(x, u) > 0$ pour $u \in (0, 1)$,
- (ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall u \in [0, 1], f'_u(x, 0^+) > 0, f'_u(x, 1^-) < 0$, et $f''_u(x, u) \leq 0$.

On dira qu'il est du type KPP (Kolmogorov, Petrovskii, Piskunov) en u . Une solution u de (5) est appelée onde pulsatoire de vitesse $c \neq 0$ si l'on a, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2: u(t + \frac{1}{c}, x) = u(t, x + 1)$. Cette notion généralise au cadre périodique la notion d'onde progressive, qui n'est appropriée que lorsque la fonction f ne dépend pas de la variable x .

Dans le cas homogène – i.e. le cas où f ne dépend pas de x – de très nombreux travaux établissent la convergence des solutions du problème de Cauchy vers des ondes progressives, sous des hypothèses restrictives sur la façon dont la donnée initiale décroît à l'infini. Le but de cette note est de décrire comment, sous des hypothèses assez générales sur les données initiales, les profils des solutions du problème de Cauchy pour (5) approchent, aux grands temps, les profils d'ondes pulsatoires.

1.1. Travaux pré-existants dans le cas homogène ; motivation

Quand f est indépendante de x , il est bien connu que (5) admet des ondes progressives, i.e. des solutions de la forme $\phi_c(x + ct)$. Le profil ϕ_c vérifie ainsi le système

$$-\phi_c'' + c\phi_c' = f(\phi_c), \quad \phi_c(-\infty) = 0, \quad \phi_c(+\infty) = 1, \tag{6}$$

et l'existence a lieu si et seulement si $c \geq c^* = 2\sqrt{f'(0)}$. La stabilité des ondes progressives et, partant, la dynamique globale en grand temps de (5), a fait l'objet de très nombreuses études depuis l'article fondateur [9]. On peut distinguer deux types de résultats :

- *L'onde de vitesse minimale.* Toute donnée initiale tendant vers 0 à $-\infty$ assez vite donne lieu à une solution $u(t, x)$ telle que $u(t, x - c_*t)$ converge, modulo un shift $s(t) = o(t)$, vers une onde de vitesse c_* – [9,4,12]. Quand la donnée initiale $u(0, x)$ de (5) est de la forme $\phi_{c_*}(x)(1 + O(e^{\delta x}))$ à $-\infty$, avec $\delta > 0$, la fonction $u(t, x - c_*t)$ converge – sans shift – vers ϕ_{c_*} . Le taux de convergence optimal – en $t^{-3/2}$ a été établi dans [5].
- *Les ondes de vitesses supérieures.* Soit $c > c_*$. Quand la donnée initiale $u(0, x)$ de (5) est de la forme $\phi_c(x)(1 + O(e^{\delta x}))$ à $-\infty$, avec $\delta > 0$, la fonction $u(t, x - ct)$ converge – sans shift – vers ϕ_c . Le taux de convergence est exponentiel. On peut trouver ce résultat dans [12].

Les théorèmes sur les ondes de vitesse minimale sont plus difficiles à démontrer que ceux sur les ondes de vitesses supérieures. Toutefois, les hypothèses permettant d'obtenir ceux-ci sont très fortes et une question naturelle est celle de leur affaiblissement. En particulier, que se passe-t-il quand la donnée initiale est encadrée, au voisinage de $-\infty$, par deux ondes ? Une motivation de cette question est un travail récent [11], dans lequel la dynamique issue d'une classe générale de données initiales est décrite pour une équation de type bistable en dimension deux d'espace : si la donnée initiale est comprise entre deux translatées d'une onde progressive, le profil de la solution converge localement vers celui de l'onde, mais en diffère d'un shift qui peut ne converger vers aucune constante. Nous allons voir qu'un comportement analogue est vrai pour KPP en dimension 1 d'espace.

1.2. Travaux pré-existants dans le cadre périodique

Quand f est 1-périodique en x , la notion d'onde pulsatoire se révèle être insuffisante ; la notion correcte est celle d'onde pulsatoire. Il existe – Berestycki et al. [2,3] – des ondes pulsatoires u_c de vitesse c solutions du système (5) si et seulement $c \geq c^* > 0$, où c^* est donné par

$$c^* = \min_{\lambda > 0} \frac{k(\lambda)}{\lambda} > 0, \tag{7}$$

expression dans laquelle $k(\lambda)$ désigne la valeur propre principale de l'opérateur L_λ défini par

$$L_\lambda \psi = \psi'' + 2\lambda \psi' + (\lambda^2 + f'_u(x, 0))\psi \quad (8)$$

et opérant sur l'ensemble des fonctions C^2 et 1-périodiques sur \mathbb{R} . La stabilité de ces ondes pulsatoires n'a pour l'instant pas été étudiée, par manque de connaissance précise du comportement des ondes en $-\infty$.

L'objet de ce travail est de :

- prouver l'existence d'ondes pulsatoires ayant un comportement précis en $-\infty$ (voir Théorème 2.1),
- étudier ensuite la dynamique des solutions de (5) issues de conditions initiales comprises entre deux translatées d'une onde pulsatoire (voir le Théorème 3.1).

2. Ondes pulsatoires au comportement précisé au voisinage de $-\infty$

La fonction u est solution de (5) si et seulement si la fonction $\tilde{u}(t, \xi) := u(t, \xi - ct)$ satisfait le système

$$\tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_\xi = f(\xi - ct, \tilde{u}), \quad \tilde{u} \text{ est } 1/c\text{-périodique en } t, \quad \tilde{u}(t, -\infty) = 0, \quad \tilde{u}(t, +\infty) = 1. \quad (9)$$

Ainsi, dans le repère de l'onde, le problème revient donc à étudier une équation parabolique non linéaire à coefficients $1/c$ -périodiques en t , et à en trouver une solution $1/c$ -périodique en t .

Les outils et propriétés suivants, prouvés dans [2,3], sont des éléments importants de démonstration du Théorème 2.1 ci-dessous :

- l'opérateur L_λ défini par (8), et sa valeur propre principale $k(\lambda)$ (qui est une fonction convexe de λ),
- avec c^* défini par (7), on a : pour tout $c \geq c^*$, $\lambda_c := \inf\{\lambda > 0 \text{ tel que } k(\lambda) = c\lambda\} > 0$, et $k(\lambda_c) = c\lambda_c$,
- pour tout λ , on note ψ_λ une fonction propre (strictement positive) de l'opérateur L_λ associée à la valeur propre principale $k(\lambda)$.

Hamel [7] démontre, dans un cadre très général que toute onde pulsatoire est équivalente à $e^{\lambda_c \xi} \psi_{\lambda_c}(\xi - ct)$ quand $\xi \rightarrow -\infty$. Le théorème suivant donne une estimation précise du reste qui est indispensable pour la suite ; d'autre part il donne une preuve – nouvelle et très simple – de l'existence d'ondes pulsatoires :

Théorème 2.1.

(i) Soit $c > c^*$; alors il existe \tilde{u}_c solution de (9) et $\delta > 0$ tels que

$$\tilde{u}_c(t, \xi) = e^{\lambda_c \xi} \psi_{\lambda_c}(\xi - ct) + O(e^{(\lambda_c + \delta)\xi}), \quad \text{quand } \xi \rightarrow -\infty. \quad (10)$$

(ii) Soit $c = c^*$; alors il existe \tilde{u}_{c^*} solution de (9) telle que

$$\tilde{u}_{c^*}(t, \xi) = -\xi e^{\lambda_{c^*} \xi} \psi_{\lambda_{c^*}}(\xi - ct) + O(e^{\lambda_{c^*} \xi}), \quad \text{quand } \xi \rightarrow -\infty. \quad (11)$$

Arguments de preuve. Puisque nous sommes intéressés par le comportement de la solution \tilde{u} de (9) quand $\xi \rightarrow -\infty$, et donc quand $\tilde{u} \rightarrow 0$, il est naturel de considérer l'équation linéarisée en 0 :

$$p_t - p_{\xi\xi} + cp_\xi - f'_u(\xi - ct, 0)p = 0 ;$$

on vérifie facilement que si $c \geq c^*$ et si λ satisfait $k(\lambda) = c\lambda$, alors $p_\lambda(t, \xi) := e^{\lambda \xi} \psi_\lambda(\xi - ct)$ est une solution particulière de l'équation linéarisée, qui de plus est $1/c$ -périodique en t et tend vers 0 quand $\xi \rightarrow -\infty$. On distingue alors les deux cas suivants.

(i) Quand $c > c^*$, on considère l'espace métrique

$$X_\delta := \left\{ u \in \text{BUC}(\mathbb{R}), 0 \leq u \leq 1, \frac{u(\xi) - p_{\lambda_c}(0, \xi)}{p_{\lambda_c + \delta}(0, \xi)} \in L^\infty(\mathbb{R}) \right\},$$

où $\text{BUC}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions bornées uniformément continues sur \mathbb{R} . Pour $\tilde{u}_0 \in X_\delta$, soit le problème de Cauchy

$$\tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_\xi = f(\xi - ct, \tilde{u}), \quad \tilde{u}(0, \xi) = \tilde{u}_0(\xi) ;$$

on montre que l'application de Poincaré $T(\tilde{u}_0) = \tilde{u}(1/c, \cdot)$ est bien définie sur X_δ , à valeurs dans X_δ , et contractante sur X_δ . Elle admet donc un (et un seul) point fixe, qui engendre une solution $1/c$ -périodique de l'équation parabolique non linéaire. Cette dernière tend vers 0 quand $\xi \rightarrow -\infty$ de par son appartenance à X_δ , et un argument simple s'appuyant sur le principe du maximum montre qu'elle tend vers 1 quand $\xi \rightarrow +\infty$.

(ii) Quand $c = c^*$, l'argument ci-dessus ne s'applique plus. Toutefois, on peut, à partir de p_λ , construire des sur et sous-solutions possédant le comportement dominant adéquat en $-\infty$. \square

3. Dynamique en temps grand

Le but est d'étudier le comportement asymptotique de la solution du problème de Cauchy (5) issue de la donnée initiale u_0 lorsque u_0 est encadrée, au voisinage de $-\infty$, entre deux ondes de même vitesse. On remarque tout d'abord que dans le cas $c > c^*$, si $u_0 \in [0, 1]$ vérifie $u_0(x) = u_c(0, x)(1 + O(e^{\delta x}))$ quand $x \rightarrow -\infty$, avec $\delta > 0$, et $\liminf_{x \rightarrow +\infty} u_0(x) > 0$, les mêmes arguments que précédemment permettent de montrer que la solution u du problème de Cauchy satisfait uniformément en x : $u(t, x) - u_c(t, x) = O(e^{-\omega t})$ pour un certain $\omega > 0$. Nos résultats principaux sont les suivants :

Théorème 3.1. Soit $M > 0$ et $u(t, x)$ une solution de (5) pour laquelle il existe $c > c_*$ et $M > 0$ tels que $u_c(-M, x) \leq u(0, x) \leq u_c(M, x)$. Soit $m(t, x)$ la solution du problème de Cauchy

$$m_t - m_{xx} - 2\left(\lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}}\right)m_x - c\lambda_c m_x^2 = 0, \quad m(0, x) = u_c(\cdot, x)^{-1}(u(0, x)). \tag{12}$$

Alors, quand $t \rightarrow +\infty$:

$$\|m_t(t, \cdot)\|_\infty = O(t^{-1/2}), \quad \|m_x(t, \cdot)\|_\infty = O(t^{-1/2}), \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) - u_c(t + m(t, x), x)| = O(t^{-1/2}).$$

Théorème 3.2. Cas $c = c^*$. Soit $u_0 \in [0, 1]$ telle que $u_0(x) = u_{c^*}(0, x)(1 + O(e^{\delta x}))$ quand $x \rightarrow -\infty$ (avec $\delta > 0$) et $\liminf_{x \rightarrow +\infty} u_0(x) > 0$; alors

$$\|u(t, \cdot) - u_{c^*}(t, \cdot)\|_\infty = O(t^{-1/2}) \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

Ces résultats amènent quelques commentaires :

- le résultat du Théorème 3.1 est nouveau même dans le cas homogène ;
- le Théorème 3.1 signifie que le profil de u converge localement vers celui de l'onde puisque $m_x \rightarrow 0$ et asymptotiquement u diffère de u_c d'un shift $m(t, x)$ qui varie de plus en plus lentement ($m_t \rightarrow 0$) ;
- au moins dans le cas homogène, l'équation du shift se réduit à une équation d'advection–diffusion, pour laquelle il existe de nombreuses solutions qui ne convergent même localement vers aucune constante ; ainsi on peut construire des données initiales pour lesquelles le shift ne converge vers aucune constante, ce qui montre que la solution u peut ne converger vers aucune translatée de l'onde u_c , voir [6] sur ce point ;
- dans le Théorème 3.2, nous étendons les travaux de Gallay [5] au cas inhomogène ; le taux de convergence obtenu semble toutefois non optimal ;
- il manque au théorème précédent une description complète du cas $c = c_*$ et, en particulier, de ce qui se passe pour les données initiales nulles au voisinage de $-\infty$; un tel résultat – en cours d'étude – ferait le lien avec le théorème de Kolmogorov, Petrovskii et Piskunov [9] de 1937 ;
- nous n'avons pas étudié ce qui se passe pour une donnée initiale comprise entre deux ondes vitesses différentes ; ce point très intéressant ferait le lien avec les travaux de Hamel–Nadirashvili [8] sur les mélanges d'ondes ; nous pensons pouvoir l'aborder avec le point de vue développé ici.

Terminons cette note par une brève description des

Arguments de la preuve des Théorèmes 3.1 et 3.2. L'idée de départ du Théorème 3.1 est de chercher la solution u sous la forme $u_c(t + m(t, x), x)$, et de choisir le shift m pour que l'ansatz proposé pour u soit solution de (5) au voisinage de $-\infty$, à une erreur d'ordre $\varepsilon(t)e^{(\lambda_c + \delta)(x - ct)}$, où

- le réel δ est celui trouvé dans le Théorème 2.1 ;
- la fonction $\varepsilon(t)$ tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$.

Le bon choix pour m se révèle alors être la solution de (12). Un point difficile est alors de montrer les propriétés de m , les estimations connues sur le noyau de la chaleur à coefficients périodiques – voir par exemple [10] – ne suffisant pas. \square

La preuve du Théorème 3.2 commence comme la précédente, et est une conséquence de l'analyse faite sur la solution $m(t, x)$ avec donnée initiale tendant rapidement vers 0 à l'infini. Une grande partie de l'analyse à $c > c_*$ persiste quand $c = c_*$, mais les compensations ont lieu à des endroits différents, obligeant à une étude à part. Tous ces points seront développés dans [1].

Références

- [1] M. Bages, P. Martinez, J.-M. Roquejoffre, Nontrivial large-time behaviour in a KPP reaction–diffusion equation in periodic media, in preparation.
- [2] H. Berestycki, F. Hamel, Front propagation in periodic excitable media, *Comm. Pure Appl. Math.* 55 (2002) 949–1032.
- [3] H. Berestycki, F. Hamel, N. Nadirashvili, The speed of propagation for KPP type problems. I. Periodic framework, *J. Eur. Math. Soc.* 7 (2005) 173–213.
- [4] M. Bramson, Convergence of solutions of the Kolmogorov equation to travelling waves, *Mem. Amer. Math. Soc.* 44 (1983).
- [5] T. Gallay, Local stability of critical fronts in nonlinear parabolic partial differential equations, *Nonlinearity* 7 (1994) 741–764.
- [6] P. Collet, J.-P. Eckmann, Space–time behaviour in problems of hydrodynamic type: a case study, *Nonlinearity* 5 (1992) 1265–1302.
- [7] F. Hamel, Qualitative properties of monostable pulsating fronts: exponential decay and monotonicity, *J. Math. Pures Appl.*, in press.
- [8] F. Hamel, N. Nadirashvili, Entire solutions of the KPP equation, *Comm. Pure Appl. Math.* 52 (1999) 1255–1276.
- [9] A.N. Kolmogorov, I.G. Petrovsky, N.S. Piskunov, A study of the equation of diffusion with increase in the quantity of matter, and its application to a biological problem, *Bjul. Moskovskogo Gos. Univ.* 17 (1937) 1–26.
- [10] J.R. Norris, Long-time behaviour of heat flow: global estimates and exact asymptotics, *Arch. Rational Mech. Anal.* 140 (1997) 161–195.
- [11] J.M. Roquejoffre, V. Roussier-Michon, Nontrivial large-time behaviour in bistable reaction–diffusion equations, *Ann. Mat. Pura Appl.*, à paraître.
- [12] K. Uchiyama, The behavior of solutions of some nonlinear diffusion equations for large time, *J. Math. Kyoto Univ.* 18 (1978) 453–508.