Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 257–260
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Algèbre homologique

Sur la non-universalité des couples exacts

Belkacem Bendiffalah

Institut de mathématiques et de modélisation de Montpellier, UMR 5149, Université Montpellier II, place Eugène-Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France

Reçu le 11 juin 2007 ; accepté après révision le 29 janvier 2008

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Nous remarquons que les invariants spectraux de Jordan de tout endomorphisme s'organisent en une suite spectrale de Leray–Koszul d'un type nouveau, dit « triangulaire ». Nous en déduisons une seconde suite spectrale pour tout couple exact de Massey et, surtout, nous en dérivons le concept universel de couplage exact de deux suites spectrales (la seconde étant triangulaire). Nous nous en servons pour la construction du premier exemple d'une suite spectrale qui ne dérive d'aucun couple exact. ***Pour citer cet article : B. Bendiffalah, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

Non-universality of exact couples. We define the notion of triangular (Leray–Koszul) spectral sequence and show that the Jordan spectral invariants of an endomorphism form a triangular spectral sequence. We introduce the concept of a universal coupling between a spectral sequence and a triangular spectral sequence and obtain a second spectral sequence associated to a Massey exact couple. Using these ideas, we construct an example of a spectral sequence which is not derived from an exact couple. ***To cite this article: B. Bendiffalah, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***
© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Suites spectrales triangulaires

Nous définissons ici le couplage exact d'une suite spectrale par une suite spectrale « triangulaire ». Nous obtenons une description alternative et simplifiée des suites spectrales et de leurs limites (cf. Théorème) et montrons l'universalité suivante : toute suite spectrale intègre un couplage exact (cf. Corollaire).

Nous fixons une catégorie abélienne $\mathcal{C}_0$ (avec limite et colimite dénombrables et avec objets noyau et conoyau) ainsi qu'un groupe abélien G ; nous notons $\mathcal{C}$ la catégorie des $\mathcal{C}_0$-objets G-gradués, avec morphismes de degrés quelconques. Pour tout « degré » $\delta \in G$, nous avons une catégorie de $\mathcal{C}$-complexes X ($\mathcal{C}$-objet avec différentielle de degré δ) ; nous avons aussi deux foncteurs à valeurs dans $\mathcal{C}$: l'homologie HX et l'oubli OX. Sur la catégorie $\mathcal{MC}$ des $\mathcal{C}$-morphismes (un $\mathcal{MC}$-morphisme est un carré commutatif), nous avons un foncteur oubli $\mathcal{O} : \mathcal{MC} \to \mathcal{C}^2$ (source-but) et un foncteur $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}(f) = ker\ f \times coker\ f$.

Adresse e-mail : ben@math.univ-montp2.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.02.001

Fixons une suite de degrés $g = (g_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Une $\mathcal{C}$-suite spectrale (au sens de [5,4]) de type g est une suite de $\mathcal{C}$-complexes $E = (E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (E_n de degré g_n) munie de $\mathcal{C}$-isomorphismes : $OE_{n+1} = HE_n,\ n \geqslant 0$.

Dans la suite nous dirons simplement la $\mathcal{C}$-suite spectrale $E = (E_n)_n$, sans préciser le type. La limite de E est un $\mathcal{C}$-objet E_∞, définie à l'aide des filtrations « adjacentes » B (croissante) et Z (décroissante) de E_0, $0 = B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset Z_2 \subset Z_1 \subset Z_0 = E_0$ (cf. [2]) ; elles sont reliées par des $\mathcal{C}$-isomorphismes $Z_n/Z_{n+1} \cong B_{n+1}/B_n$ (degré g_n) et nous avons un $\mathcal{C}$-isomorphisme canonique : $E_n = Z_n/B_n$. Pour $Z_\infty = \bigcap_n Z_n$ et $B_\infty = \bigcup_n B_n$, nous posons $E_\infty = Z_\infty/B_\infty$. Nous notons $SS_g(\mathcal{C})$ la catégorie des $\mathcal{C}$-suites spectrales : un morphisme $E \to E'$ est une suite de morphismes de $\mathcal{C}$-complexes $\varphi_n : E_n \to E'_n$, tels que $O\varphi_{n+1} = H\varphi_n$; il induit un $\mathcal{C}$-morphisme $\varphi_\infty : E_\infty \to E'_\infty$. La limite d'une suite spectrale n'étant pas toujours celle escomptée (la convergence faible de [2] est nécessaire), il est utile de considérer la catégorie des $\mathcal{C}$-suites spectrales « limitées » $SS_g^\infty(\mathcal{C})$ qui a, pour objets, les couples (E, e_0), où $E = (E_n)_n$ est une $\mathcal{C}$-suite spectrale et « la limitation » e_0 est une $\mathcal{C}$-suite exacte courte $0 \to C_0 \to E_0 \to N_0 \to 0$ telle que l'image $\tilde{C}_0$ de C_0 vérifie $B_\infty \subset \tilde{C}_0 \subset Z_\infty$. Un morphisme $(E, e_0) \to (E', e'_0)$ est composé d'un morphisme de $\mathcal{C}$-suites spectrales $\varphi : E \to E'$ et d'un morphisme de $\mathcal{C}$-suites exactes courtes $e_0 \to e'_0$ impliquant φ_0.

Exemple 1. Soit A, un complexe de groupes abéliens $\cdots \to A_{q+1} \xrightarrow{d_{q+1}} A_q \xrightarrow{d_q} A_{q-1} \to \cdots$ filtré par des sous-complexes $A^p : \cdots \to A^p_{q+1} \to A^p_q \to A^p_{q-1} \to \cdots$ ($A^p_q = A^p \cap A_q$), $p \in \mathbf{Z}$. Nous en déduisons des filtrations pour les sous-groupes de A, cA (cycles) et bA (bords) : $cA^p_q = Ker\, d_q \cap A^p$, $bA^p_q = d_{q+1}A^p_{q+1}$. La suite exacte courte $\mathbf{Z}^2$-graduée $0 \to gr\, cA \to gr\, A \to gr\, bA \to 0$ (où gr désigne le groupe gradué d'un groupe filtré) est une limitation de la suite spectrale $E = (E_n)_n$ associée à A, avec $E_0 = gr\, A$.

Définition. Une $\mathcal{C}$-suite spectrale triangulaire est une suite de $\mathcal{MC}$-objets $F = (F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (F_n de degré g_n), munie de $\mathcal{C}^2$-isomorphismes : $\mathcal{O}F_{n+1} = \mathcal{H}F_n,\ n \geqslant 0$. Un morphisme de $\mathcal{C}$-suites spectrales triangulaires $\psi : F \to F'$ est une suite de $\mathcal{MC}$-morphismes $\psi_n : F_n \to F'_n$, avec $\mathcal{O}\psi_{n+1} = \mathcal{H}\psi_n$.

Nous notons $SST_g(\mathcal{C})$ la catégorie des $\mathcal{C}$-suites spectrales triangulaires. Une $\mathcal{C}$-suite spectrale triangulaire F définit une authentique $\mathcal{C}$-suite spectrale E ; pour chaque $\mathcal{C}$-morphisme $F_n : N_n \to C_n$ nous avons un complexe $E_n = N_n \oplus C_n$, de différentielle $d_n(x, y) = (0, F_n x)$ (degré g_n) ; d'où un foncteur $SST_g(\mathcal{C}) \to SS_g(\mathcal{C})$. Avec ses $\mathcal{C}^2$-isomorphismes, une $\mathcal{C}$-suite spectrale triangulaire F revient à la donnée de $\mathcal{C}$-extensions $0 \to N_{n+1} \to N_n \to C_n \to C_{n+1} \to 0,\ n \geqslant 0$; nous définissons la « limite » de F comme étant le $\mathcal{C}^2$-objet $F_\infty = N_\infty \times C_\infty$, où $N_\infty = \lim_\leftarrow N_n$ et $C_\infty = \lim_\rightarrow C_n$.

Nous avons aussi la catégorie $SST_g^o(\mathcal{C})$ des $\mathcal{C}$-suites spectrales triangulaires « étendues » : il s'agit de couples (F, f_0), où $F = (F_n)_n$ est une $\mathcal{C}$-suite spectrale triangulaire ($F_n : N_n \to C_n$ de degré g_n) et f_0 est une $\mathcal{C}$-extension $0 \to C_0 \to E_0 \to N_0 \to 0$; leurs morphismes se définissent comme ceux de $SS_g^\infty(\mathcal{C})$.

Théorème. *Nous avons un isomorphisme de catégories* $\int : SST_g^o(\mathcal{C}) \to SS_g^\infty(\mathcal{C})$.

Preuve. Soit une $\mathcal{C}$-suite spectrale triangulaire F ($F_n : N_n \to C_n$, de degré g_n) et soit une $\mathcal{C}$-extension $f_0 : 0 \to C_0 \xrightarrow{\tilde{\beta}_0} E_0 \xrightarrow{\tilde{\gamma}_0} N_0 \to 0$. Nous définissons par récurrence une $\mathcal{C}$-suite spectrale $E = (E_n)_n$ telle que $B_\infty \subset im\, \tilde{\beta}_0 \subset Z_\infty$. Il suffit de définir l'homologie E_1 et de définir une extension f_1 pour $F' = (F_{n+1})_n$. Nous posons $d_0 = \tilde{\beta}_0 F_0 \tilde{\gamma}_0$ (ainsi $d_0^2 = 0$, avec d_0 de degré g_0) et $E_1 = H(E_0)$. Puisque $\tilde{\gamma}_0(ker\, d_0) = \tilde{\gamma}_0(ker\, F_0\tilde{\gamma}_0) = im\, \tilde{\gamma}_0 \cap ker\, F_0 = ker\, F_0 \cong N_1$, $\tilde{\gamma}_0$ induit un épimorphisme $\tilde{\gamma}_1 : E_1 \to N_1$; de même : puisque $\tilde{\beta}_0^{-1}(im\, d_0) = im\, F_0$, $\tilde{\beta}_0$ induit un monomorphisme $\tilde{\beta}_1 : C_1 \to E_1$. Enfin : $ker\, \tilde{\gamma}_1 = ker(\tilde{\gamma}_0)/B_1 = im(\tilde{\beta}_0)/B_1 = im\, \tilde{\beta}_1$. L'encadrement $B_\infty \subset im\, \tilde{\beta}_0 \subset Z_\infty$ s'obtient par récurrence en considérant la suite spectrale dérivée $E' = (E_{n+1})_n$. Inversement, toute $\mathcal{C}$-suite spectrale limitée (E, e_0) provient d'une $\mathcal{C}$-suite spectrale triangulaire étendue (F, f_0) ; nous obtenons en effet un $\mathcal{C}$-morphisme $F_0 : N_0 \to C_0$ (degré g_0), comme suit : $N_0 \cong E_0/im\, \tilde{\beta}_0 \to E_0/Z_1 = Z_0/Z_1 \cong B_1/B_0 = B_1 \subset im\, \tilde{\beta}_0 \cong C_0$ (on utilise les inclusions $B_\infty \subset im\, \tilde{\beta}_0 \subset Z_\infty$) ; la preuve se complète par récurrence. □

Par commodité, nous noterons simplement $E = \int F$ (extension et limitation sous-entendues) ; nous appelons une telle relation un « $\mathcal{C}$-couplage exact de suites spectrales ». Notons que ce couplage définit des $\mathcal{C}$-suites exactes courtes $0 \to C_n \to E_n \to N_n \to 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et, aussi, pour $n = \infty$.

Corollaire. *Pour toute $\mathcal{C}$-suite spectrale $E = (E_n)_n$, il existe un $\mathcal{C}$-couplage exact $E = \int F$.*

Preuve. Étant données les filtrations adjacentes B et Z de E_0, choisissons un $\mathcal{C}$-sous-objet $C_0 \subset Z_0$, tel que $B_\infty \subset C_0 \subset Z_\infty$ (pas de choix si $E_\infty = 0$). Pour $N_0 = Z_0/C_0$, nous obtenons une limitation e_0 de E et nous définissons F avec l'inverse de $\int$ appliqué à (E, e_0). □

2. Exemple : les invariants spectraux de Jordan

Nous construisons dans cette section le premier exemple d'une suite spectrale qui est prouvée ne pas être de Massey (i.e. qui ne dérive d'aucun couple exact de Massey, cf. Exemple 2).

Soit un $\mathcal{C}$-objet D et soit un endomorphisme $\alpha : D \to D$ de degré δ. Nous avons deux filtrations canoniques de D, par le noyau itéré ($0 = ker\,\alpha^0 \subset ker\,\alpha \subset ker\,\alpha^2 \subset \cdots \subset D$) et par l'image itérée ($D = im\,\alpha^0 \supset im\,\alpha \supset im\,\alpha^2 \supset \cdots$) ; Nous utiliserons aussi les noyau itéré et image itérée « infinis » : $ker\,\alpha^\infty = \bigcup_n ker\,\alpha^n$ et $im\,\alpha^\infty = \bigcap_n im\,\alpha^n$. Les gradués associés aux filtrations sont des $\mathcal{C}$-objets, qui constituent les « invariants spectraux de Jordan » de α : $\tilde{N}_n = ker\,\alpha^{n+1}/ker\,\alpha^n$ et $\tilde{C}_n = im\,\alpha^n/im\,\alpha^{n+1}$ pour $n \geqslant 0$; notons que α^n induit un $\mathcal{C}$-morphisme $\tilde{F}_n : \tilde{N}_n \to \tilde{C}_n$ de degré $n\delta$.

Proposition 1. *Les invariants spectraux de Jordan définissent une $\mathcal{C}$-suite spectrale triangulaire $J(\alpha) = (F_n)_n$ de type $g = (g_n)_n$, avec $g_n = -n\delta$ $(n \geqslant 0)$; sa limite $F_\infty = N_\infty \times C_\infty$ est donnée par les $\mathcal{C}$-isomorphismes : $C_\infty = D/(im\,\alpha + ker\,\alpha^\infty)$ et $N_\infty = im\,\alpha^\infty \cap ker\,\alpha$.*

D'une $\mathcal{C}$-suite spectrale triangulaire F, nous dirons qu'elle possède une structure de Jordan s'il existe un isomorphisme $F \cong J(\alpha)$, pour un certain $\mathcal{C}$-endomorphisme $\alpha : D \to D$.

Preuve. Nous devons construire des 2-extensions graduées $0 \to N_{n+1} \to N_n \to C_n \to C_{n+1} \to 0$, $n \geqslant 0$. Pour tout $n \geqslant 0$, posons $N_n = ker\,\alpha \cap im\,\alpha^n$ et $C_n = D/(ker\,\alpha^n + im\,\alpha)$: nous avons des isomorphismes $i_n : \tilde{N}_n \to N_n$ et $j_n : \tilde{C}_n \to C_n$ (induits par α^n) qui transportent le morphisme $\tilde{F}_n : \tilde{N}_n \to \tilde{C}_n$ en un morphisme $F_n : N_n \to C_n$ (induit par la relation α^{-n}) de degré $-n\delta$; nous avons de plus $ker\,F_n = N_{n+1}$ et $coker\,F_n = C_{n+1}$; par exemple :

$ker\,F_n = ker(\tilde{F}_n i_n^{-1}) = i_n(ker\,\tilde{F}_n) = \alpha^n(im\,\alpha \cap ker\,\alpha^{n+1} + ker\,\alpha^n/ker\,\alpha^n) = im\,\alpha^{n+1} \cap ker\,\alpha = N_{n+1}$.

Les isomorphismes de l'énoncé pour N_∞ et C_∞ sont alors évidents. □

Un $\mathcal{C}$-couple exact M est une $\mathcal{C}$-suite exacte [6] :

$$D \xrightarrow{\alpha} D \xrightarrow{\beta} E_0 \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{\alpha} D. \tag{1}$$

La dérivation (itérée) de Massey associe à M une $\mathcal{C}$-suite spectrale $E = (E_n)_n$. Notons que la proposition précédente affirme que le $\mathcal{C}$-couple exact M recèle une seconde $\mathcal{C}$-suite spectrale (celle-ci triangulaire) $F = (F_n)_n$, à savoir : les invariants spectraux de Jordan de α, $F = J(\alpha)$.

Proposition 2. *Pour l'extension $0 \to coker\,\alpha \xrightarrow{\tilde{\beta}_0} E_0 \xrightarrow{\tilde{\gamma}_0} ker\,\alpha \to 0$, canoniquement extraite de (1), nous avons un $\mathcal{C}$-couplage exact : $E = \int F$.*

Donc la $\mathcal{C}$-suite spectrale triangulaire de M détermine sa $\mathcal{C}$-suite spectrale de Massey et *vice versa*. La $\mathcal{C}$-suite exacte à l'infini $0 \to D/(im\,\alpha + ker\,\alpha^\infty) \to E_\infty \to im\,\alpha^\infty \cap ker\,\alpha \to 0$ est celle de [3]. Notons qu'une $\mathcal{C}$-suite spectrale $E = (E_n)_n$ est de Massey si et seulement s'il existe un $\mathcal{C}$-couplage exact $E = \int F$, tel que la $\mathcal{C}$-suite spectrale triangulaire $F = (F_n)_n$ possède une structure de Jordan.

Proposition 3. *Si une $\mathcal{C}$-suite spectrale triangulaire $F = (F_n)_n$ possédant une structure de Jordan est telle que $F_2 = 0$, alors la classe de la 2-extension $0 \to N_1 \to N_0 \to C_0 \to C_1 \to 0$ est nulle.*

Preuve. Soit un $\mathcal{C}$-objet D et soit un $\mathcal{C}$-endomorphisme $\alpha : D \to D$ tel que sa suite spectrale de Jordan $F = J(\alpha)$ vérifie $F_2 = 0$. Nous avons pour F_1 un isomorphisme $ker\,\alpha \cap im\,\alpha \to im\,\alpha/im\,\alpha^2$, c'est-à-dire une décomposition en somme directe : $im\,\alpha = im\,\alpha^2 \oplus (im\,\alpha \cap ker\,\alpha)$. Donc, quitte à considérer $\tilde{D} = D/im\,\alpha^2$ et l'endomorphisme $\tilde{\alpha}$ induit par α, nous pouvons supposer que $im\,\alpha^2 = 0$ ($F \cong J(\tilde{\alpha})$). L'annulation de la classe provient du théorème de Yoneda ([7], p. 568), appliqué au diagramme commutatif à colonnes et lignes exactes :

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & N_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & im\,\alpha \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & N_0 \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & im\,\alpha \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & im\,F_0 \arrow[r] \arrow[d] & C_0 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

□

Exemple 2. Soit $G = \mathbf{Z}$ et soit $\mathcal{C}_0$ la catégorie abélienne des A-modules à gauche avec $A = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$. Nous construisons à présent une $\mathcal{C}$-suite spectrale $E = (E_n)_n$ qui n'est pas de Massey et telle que : $E_0 \cong A^2$ (A-module libre de rang fini égal à 2) et $E_2 = 0$ (E stationnaire de limite nulle).

Posons $E_0 = A \times A$ et $d_0(x, y) = (0, 2x)$; ainsi $E_1 = H(E_0) \cong 2A \times 2A$ et, pour $d_1(x, y) = (0, x)$, $E_2 = H(E_1) = 0$; enfin : $E_n = 0$ pour $n \geqslant 3$. Admettons que la suite spectrale $E = (E_n)_n$ soit de Massey : il existe donc, avec les notations de (1), un $\mathcal{C}$-couple exact M à l'origine du $\mathcal{C}$-couplage exact de la Proposition 2 et, en particulier, un encadrement $B_\infty \subset im\,\tilde{\beta}_0 \subset Z_\infty$. Puisque $E_2 = 0$, la suite spectrale triangulaire $F = J(\alpha_0)$ est telle que $F_2 = 0$; nous avons aussi $B_2 = B_\infty = Z_\infty = Z_2$ et, donc, $im\,\tilde{\beta}_0 = Z_2$. Des définitions $Z_1 = 2A \times A$, $B_1 = 0 \times 2A$ et $E_1 = 2A \times A/2A$ (donc $B_2 = Z_2 = 0 \times A$), nous déduisons un A-isomorphisme $ker\,\alpha \cong E_0/Z_2 \cong A$: c'est un A-module libre et l'extension de la Proposition 2 est une A-extension scindée. Donc la 2-extension associée à F_0 est $0 \to 2A \to A \to A \to 2A \to 0$, de classe non nulle ; ceci contredit la Proposition 3.

Dans [1], nous donnons une application des suites spectrales triangulaires à celles de Bockstein.

Références

[1] B. Bendiffalah, La seconde suite spectrale d'un couple exact, Préprint, 2007.
[2] H. Cartan, S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, 1956.
[3] B. Eckmann, P.J. Hilton, Exact couples in an Abelian category, J. Algebra 3 (1966) 38–87.
[4] J.L. Koszul, Sur les opérateurs de dérivation dans un anneau, C. R. Acad. Sci. Paris (1947) 217–219.
[5] J. Leray, L'anneau d'homologie d'une représentation, C. R. Acad. Sci. Paris (1946) 1366–1368.
[6] W.S. Massey, Exact couples in algebraic topology, Ann. of Math. 56 (2) (1952) 363–396.
[7] N. Yoneda, On ext and exact sequences, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo I 8 (1960) 507–576.