Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 125–128
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des nombres

Grandes valeurs de la fonction $\sigma(n)/\sigma^*(n)$

Abdallah Derbal

Département de Mathematiques, École normale supérieure d'Alger, BP 92, Alger, Algérie

Reçu le 8 février 2007 ; accepté aprés révision le 19 novembre 2007

Disponible sur Internet le 10 janvier 2008

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Soient $\sigma(n)$ et $\sigma^*(n)$ les fonctions sommes des diviseurs et somme des diviseur unitaires du nombre entier n. Un diviseur d d'un nombre entier n est dit unitaire s'il est premier avec le quotient n/d. On étudie dans cette Note le comportement relatif de $\sigma(n)/\sigma^*(n)$ et de son ordre maximum. ***Pour citer cet article : A. Derbal, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

Large values of the function $\boldsymbol{\sigma(n)/\sigma^*(n)}$. Let $\sigma(n)$ and $\sigma^*(n)$ be the functions sum of divisors and sum of unitary divisors of an integer n. A divisor d of an integer number n is called unitary if it is prime with n/d. In this Note we study the relative behavior of $\sigma(n)/\sigma^*(n)$ and its maximum order. ***To cite this article: A. Derbal, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***
© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Pour un nombre entier $n = \prod_{p^\alpha \| n} p^\alpha \geqslant 2$, on considère les fonctions arithmétiques :

$$\sigma(n) = \prod_{p^\alpha \| n} (1 + p + \cdots + p^\alpha), \quad \sigma^*(n) = \prod_{p^\alpha \| n} (1 + p^\alpha), \quad f(n) = \frac{\sigma(n)}{\sigma^*(n)(\ln\ln n)},$$

$$f_1(n) = \frac{n}{\varphi(n)(\ln\ln n)} \quad \text{et} \quad f_2(n) = \frac{\sigma(n)}{n(\ln\ln n)} \quad (\varphi(n) \text{ désigne l'indicateur d'Euler}).$$

Les fonctions $f(n)$, $f_1(n)$, $f_2(n)$ sont très voisines, elle ont la même limite supérieure e^γ $(n \to \infty)$ où $\gamma = 0{,}57721566 =$ la constante d'Euler et vérifient $f_1(n) \geqslant f_2(n) \geqslant f(n)$. Cependant, leur comportement relatif à cette limite supérieure est différent. Il y a une infinité de nombres n pour lesquels $f_1(n) > e^\gamma$ [4]. Dans [6], G. Robin a montré que si l'hypothèse de Riemann est vraie, l'inégalité $f_2(n) > e^\gamma$ n'a qu'un nombre fini de solutions tandis que si l'hypothèse de Riemann est fause, elle en a une infinité. De plus il énonce que $f(n) < e^\gamma$ pour n assez grand. Dans cette Note nous précisons cette dernière assertion en démontrant le suivant :

Adresse e-mail : abderbal@yahoo.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.11.011

Théorème. *Pour tout nombre entier $n \geqslant 17$, on a $f(n) < e^{\gamma}$.*

La démonstration du théorème est basée sur la structure des nombres σ^*-colossalement abondants (σ^*-c.a.) que nous introduisons et étudions dans le paragraphe 2. Ces nombres sont similaires aux nombres colossalement abondants [1,6] et [5].

2. Les nombres σ^*-colossalement abondants (σ^*-c.a.)

Lemme 2.1 *(et définition). Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un unique nombre $N = N_\varepsilon$ qui dépend de ϵ tel que*

$$\frac{\sigma(n)}{n^\epsilon \sigma^*(n)} \leqslant \frac{\sigma(N)}{N^\epsilon \sigma^*(N)} \quad \textit{pour } n \leqslant N \quad \textit{et} \quad \frac{\sigma(n)}{n^\epsilon \sigma^*(n)} < \frac{\sigma(N)}{N^\epsilon \sigma^*(N)} \quad \textit{pour } n > N.$$

Ce nombre est appelé σ^*-colossalement abondant associé à ϵ.

Démonstration. La limite, quand $n \to +\infty$, de la fonction $\sigma(n)/(n^\epsilon \sigma^*(n))$ étant nulle, alors elle atteint son maximum en un nombre fini de nombres entiers. N est alors le plus grand. □

Lemme 2.2 *(et définition). Pour tout nombre entier $\alpha \geqslant 0$ et tout nombre réel $x > 1$, on pose*

$$G(x,\alpha) = \bigl(\ln\bigl(1 + g_\alpha(x)\bigr)\bigr)/\ln x \quad \textit{où } g_\alpha(x) = x^\alpha \Bigg/ \left(\sum_{m=0}^{\alpha} x^{2m}\right).$$

Par un simple calcul, on vérifie que pour tout nombre premier p et tout nombre entier $\alpha \geqslant 1$, on a $1 + g_\alpha(p) = (\sigma(p^{\alpha+1})/\sigma^*(p^{\alpha+1}))/(\sigma(p^\alpha)/\sigma^*(p^\alpha))$.

(1) *Pour tout nombre entier $\alpha \geqslant 0$ fixé, la fonction $G(x,\alpha)$ est continue, strictement décroissante de $+\infty$ à 0 sur l'intervalle $]1,+\infty[$.*

(2) *Pour tout $x \in]1,+\infty[$ fixé, $G(x,\alpha+1) < G(x,\alpha)$ pour tout $\alpha \geqslant 0$.*

Démonstration. (1) Pour tout nombre réél $x > 1$, on vérifie que $g'_\alpha(x) < 0$ dans les deux cas α pair et α impair.

(2) Pour $x \in]1,+\infty[$ fixé et α un nombre entier $\alpha \geqslant 0$, en écrivant convenablement l'expession $g_\alpha(x) - g_{\alpha+1}(x)$ on voit qu'elle est négative. □

Lemme 2.3 *(et définition). Pour tout nombre réel $\epsilon > 0$ et α un nombre entier, $\alpha \geqslant 1$, l'équation $G(x,\alpha) = \epsilon$ admet une unique solution x_α dans l'intervalle $]1,+\infty[$. On définit ainsi une suite $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^*}$ dans $]1,+\infty[$.*

On pose $x_1 = x$ et alors

(1) *La suite $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.*

(2) *Pour tout $\alpha \geqslant 2$ et $x > 1$ on a $x^{1/\alpha} < x_\alpha < \sqrt{2x}$.*

(3) *Pour tout $\alpha \geqslant 2$ on a $x_\alpha = (\alpha x)^{1/\alpha}\left(1 - \frac{\ln\alpha}{\alpha\ln x} + \frac{(2\alpha+(\alpha+1)\ln\alpha)\ln\alpha}{2\alpha^2(\ln^2 x)} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)\right)$.*

(4) *Pour $x \geqslant e^2$, on a $x_2 > \sqrt{2x}\left(1 - \frac{\ln 2}{2\ln x}\right)$.*

Démonstration. (1) La suite $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante à cause de la décroissance de la fonction $G(x,\alpha)$.

(2) et (4) Analogues à celle des assertions (a) et (c) du lemme de la page 190 de [6].

(3) C'est une généralisation de la démonstration du Lemme 2 de [3] pages 74–77. □

Lemme 2.4. *Soient $\epsilon > 0$ et $N = N_\epsilon$ le nombre σ^*-c.a. défini dans le Lemme 2.1.*

(1) *Tout diviseur premier p de N, son exposant α est $\geqslant 2$.*

(2) *Pour tout diviseur premier p de N avec exposant $\alpha \geqslant 2$ on a*

(a) $G(p,\alpha) < \epsilon \leqslant G(p,\alpha-1)$.

(b) $x_\alpha < p \leqslant x_{\alpha-1}$ *où x_α et $x_{\alpha-1}$ sont les termes d'indice α et $\alpha-1$ de la suite de la Définition 2.3.*

(3) *Pour tout $\epsilon > \epsilon_1 = G(2,1) = (\ln(1+2/5))/\ln 2 = 0{,}4854268272$ on a $N_\epsilon = 1$.*

Lemme 2.5. *Soient ϵ tel que $0 < \epsilon \leqslant \epsilon_1$, $x = x_1$ le premier terme de la suite de la Définition 2.3, défini par $G(x,1) = \epsilon$ et $N = N_\epsilon$ le nombre $\sigma^* - c.a.$ associé à ϵ.*

Tableau 1
Les 7 premiers $f(N)$

Valeurs de ϵ	$N = N_\epsilon$	$f(N)$
$\epsilon > \epsilon_1 = G(2,1) = 0{,}4854268272$	1	indéfini
$0{,}485426\ldots = \epsilon_1 = G(2,1) \geqslant \epsilon > \epsilon_2$	2^2	$4{,}286139\ldots$
$0{,}251538\ldots = \epsilon_2 = G(2,2) \geqslant \epsilon > \epsilon_3$	2^3	$2{,}276557\ldots$
$0{,}238814\ldots = \epsilon_3 = G(3,1) \geqslant \epsilon > \epsilon_4$	$2^3 \times 3^2 = 72$	$1{,}490989\ldots$
$0{,}129767\ldots = \epsilon_4 = G(2,3) \geqslant \epsilon > \epsilon_5$	$2^4 \times 3^2$	$1{,}478492\ldots$
$0{,}109285\ldots = \epsilon_5 = G(5,1) \geqslant \epsilon > \epsilon_6$	$2^4 \times 3^2 \times 5^2$	$1{,}344175\ldots$
$0{,}085845\ldots = \epsilon_6 = G(3,2) \geqslant \epsilon > \epsilon_7$	$2^4 \times 3^3 \times 5^2$	$1{,}393675\ldots$

(1) *Si p est un facteur premier de N, alors son exposant α vérifie $\alpha \sim \frac{\ln x}{\ln p}$ $(x \to +\infty)$.*
(2) *Soit m le plus grand indice tel que $x_m \geqslant 2 > x_{m+1}$. Alors le nombre N a la structure suivante :*

$$N = \prod_{x_2 < p \leqslant x} p^2 \times \prod_{x_3 < p \leqslant x_2} p^3 \times \cdots \times \prod_{x_{m+1} < p \leqslant x_m} p^{m+1} \left(m \sim \frac{\ln x}{\ln 2} \right).$$

On dit aussi que N est associé à x et on le note aussi par $N(x)$.

Lemme 2.6. *On pose $E = \bigcup_p E_p$ où, pour tout nombre premier p, $E_p = \{G(p,\alpha)$ où $\alpha \geqslant 1\}$. Pour tout $\epsilon > 0$ il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de E supérieurs à ϵ. On range les éléments de E en une suite décroissante $\epsilon_1 = G(2,1) > \epsilon_2 > \epsilon_3 > \cdots$.*
(1) *Soient ϵ_i et ϵ_{i+1} deux élements successifs de E. Alors $\forall \epsilon \in E$, $\epsilon_i \geqslant \epsilon > \epsilon_{i+1}$ on a $N_\epsilon = N_{\epsilon_i}$.*
(2) *L'ensemble des nombres σ^*-colossalement abondants est*

$$\{1\} \cup \{N_{\epsilon_i} \text{ tel que } \epsilon_i \in E\} \text{ et on a } 1 < N_{\epsilon_1} < N_{\epsilon_2} < N_{\epsilon_3} < \cdots.$$

On a établi un programme en fortran par lequel on calcule les nombres σ^*-c.a. dont le plus grand facteur premier est au plus égal à 19 421. Dans le Tableau 1 on en trouve la liste des sept premiers nombres.

Lemme 2.7. *(See [6] page 192.) Soient N et N' deux nombres $\sigma^* - c.a.$ successifs tels que $3 \leqslant N < N'$.*
Pour tout nombre entier n tel que $N \leqslant n \leqslant N'$, on a $f(n) \leqslant \max(f(N), f(N'))$.

Démonstration. Les nombres N et N' étant successifs, alors il existe une seule valeur ε pour laquelle on a $\frac{\sigma(n)}{n^\varepsilon \sigma^*(n)} \leqslant \frac{\sigma(N')}{(N')^\varepsilon \sigma^*(N')} = \frac{\sigma(N)}{N^\varepsilon \sigma^*(N)}$. Par suite $f(n) \leqslant f(N) \times (\frac{n}{N})^\varepsilon \frac{\ln\ln N}{\ln\ln n}$ et $f(n) \leqslant f(N') \times (\frac{n}{N'})^\varepsilon \frac{\ln\ln N'}{\ln\ln n}$. Alors pour que $f(n) \leqslant \max(f(N), f(N'))$ il suffit que $(\frac{n}{N})^\varepsilon \frac{\ln\ln N}{\ln\ln n} \leqslant 1$ ou $(\frac{n}{N'})^\varepsilon \frac{\ln\ln N'}{\ln\ln n}$. Or les dernière inégalités sont équivalentes aux inégalités $h(\ln n) \leqslant h(\ln N)$ ou $h(\ln n) \leqslant h(\ln N')$ où $h(x) = \varepsilon x - \ln\ln x$ qui, à leur tour sont vraies car $1 < \ln N \leqslant \ln n \leqslant \ln N'$ et la fonction $h(x)$ est convexe pour $x > 1$. □

3. Démonstration du théorème

Soit $N = N_\epsilon = N(x)$ le nombre σ^*-c.a. associé $\epsilon = G(x,1)$. La structure de N implique

$$f(N) = \prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \prod_{\alpha=1}^{m} \left\{ \prod_{x_{\alpha+1} < p \leqslant x_\alpha} \left(\left(1 - \frac{1}{p^{\alpha+2}}\right) \left(1 + \frac{1}{p^{\alpha+1}}\right)^{-1} \right) \right\} \big(\ln(\ln N)\big)^{-1}. \tag{1}$$

Nous estimons chaque facteur de la formule (1). On a

$$\prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = e^\gamma (\ln x) \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)\right) \quad \text{([7] page 70).} \tag{2}$$

Le théorème des nombres premiers ($\pi(x) = \mathrm{O}(\frac{x}{\ln x})$) où $\pi(x) =$ le nombre des nombres premiers $p \leqslant x$ et la formule sommatoire d'Abel ([2] page 11) nous permettent de montrer facilement que$\sum_{p>x} \frac{1}{p^\alpha} = \mathrm{O}(\frac{1}{x \ln x})$ ($\alpha \geqslant 2$). Alors par application du Lemme 2.3, on obtient

$$\prod_{\alpha=1}^{m} \left\{ \prod_{x_{\alpha+1} < p \leqslant x_\alpha} \left(\left(1 - \frac{1}{p^{\alpha+2}}\right)\left(1 + \frac{1}{p^{\alpha+1}}\right)^{-1} \right) \right\} = 1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x \ln x}\right). \tag{3}$$

Pour évaluer $\ln(\ln N)$, on écrit $\ln N = 2\theta(x) + \theta(x_2) + \cdots + \theta(x_m)$ où $\theta(x)$ est la fonction sommatoire de Chebycheff définie par $\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \ln p$. On applique le théorème des nombres premiers ($\theta(x) = x + \mathrm{O}(\frac{x}{\ln x})$) et l'assertion (3) du Lemme 2.3, on obtient

$$\big(\ln(\ln N)\big) = (\ln x)\left(1 + \frac{\ln 2}{\ln x} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)\right). \tag{4}$$

Les formules (1)–(3) et (4) impliquent

$$f(N) = e^\gamma \left(1 - \frac{\ln 2}{\ln x} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)\right) \underset{<}{\longrightarrow} e^\gamma \quad (x \to +\infty). \tag{5}$$

Le Lemme 2.7 et la formule (5) montrent que $\limsup f(n) = e^\gamma$ et que $f(n) < e^\gamma$ pour n assez grand. De la formule (1) vient $f(N) < (\ln(\ln N))^{-1} \prod_{p \leqslant x} (1 - \frac{1}{p})^{-1}$. On a aussi

$$\prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \leqslant e^\gamma \log x \left(1 + \frac{0.2}{\log^2 x}\right) \quad \text{pour } x \geqslant 10^4 \quad \text{([6] page 205)}$$

ce qui implique

$$f(N) < e^\gamma \ln x \left(1 + \frac{0.2}{\log^2 x}\right)(\ln \ln N)^{-1} \quad \text{pour } x \geqslant 10^4. \tag{6}$$

Minoration de $\ln(\ln N)$. On a $\ln N = (2\theta(x) + \sum_{i=2}^m \theta(x_i)) > 2\theta(x)$, avec $\theta(x) > x(1 - \frac{1}{8 \ln x}) > 0$ pour $x \geqslant 19\,421$ ([8] page 359) d'où il vient $\ln(\theta(x)) > \ln x + \ln(1 - \frac{1}{8 \ln x}) > \ln x - 0{,}012740181$ ($x \geqslant 19421$). Par suite

$$\ln(\ln N) > \ln 2 + \ln\big(\theta(x)\big) > (\ln x)\left(1 + \frac{0{,}681}{\ln x}\right) \quad \text{pour } x \geqslant 19421. \tag{7}$$

Les formules (6), (7) impliquent alors $f(N) < e^\gamma (1 + \frac{0{,}2}{\log^2 x})(1 + \frac{0{,}681}{\ln x})^{-1} < e^\gamma$ pour $x \geqslant 19\,421$. On note par $N_0 = N(19\,421) =$ le nombre σ^*-c.a. associé à $x = 19\,421$. Le Lemme 2.7 implique alors$\sigma(n)/\sigma^*(n) < e^\gamma (\ln \ln n)$ pour $n \geqslant N_0$. Ensuite on a calculé tous les nombres σ^*-c.a. N tels que $1 < N \leqslant N_0$ (2283 nombres) et on a constaté que $f(N) < e^\gamma$ pour $N \geqslant 72$ ce qui permet de conclure pour $n \geqslant 72$ ensuite on a terminé le calcul pour $2 \leqslant n \leqslant 71$.

Remarques.

1. Le nombre N_0 est donné par

$$N_0 = 2^{18} \times 3^{11} \times 5^8 \times 7^6 \times 11^5 \times 13^5 \times (17 \times \cdots \times 37)^4 \times \prod_{41 \leqslant p \leqslant 191} p^3 \times \prod_{193 \leqslant p \leqslant 19421} p^2.$$

2. Les nombres entiers n tels que $f(n) > e^\gamma$ sont $n = 3,\ 4,\ 5,\ 8,\ 16$.

Références

[1] L. Alaoglu, P. Erdös, On Highly composite and similar numbers, Trans. Amer. Math. Soc. 56 (1944) 448–469.
[2] W.J. Ellison, M. Mendes-France, Les Nombres Premiers, Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 1366, Hermann, Paris, 1975.
[3] P. Erdös, J.-L. Nicolas, Répartition des nombres superabondants, Bull. Soc. Math. France 103 (1) (1975) 65–90.
[4] J.-L. Nicolas, Petites valeurs de la fonction d'Euler, J. Number Theory 17 (1983) 375–388.
[5] S. Ramanujan, Highly composite numbers, Annotated by J.-L. Nicolas and G. Robin, The Ramanujan J. 1 (1997) 119–153.
[6] G. Robin, Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann, J. Math. Pures Appl. 63 (1984) 187–213.
[7] J.B. Rosser, L. Schoenfeld, Approximate formulas for some functions of prime numbers, Illinois J. Math. 6 (1962) 64–94.
[8] L. Schoenfeld, Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$ II, Math. Comp. 30 (134) (1976) 337–360.