Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 187–191

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Algèbre

Périodicité de Knörrer étendue

José Bertin, Fabrice Rosay

Institut Fourier, université de Grenoble 1, 38402 Saint-Martin d'Hères, France

Reçu le 20 novembre 2006 ; accepté après révision le 26 juin 2007

Disponible sur Internet le 9 août 2007

Présenté par Michel Raynaud

Résumé

Nous étudions la théorie des déformations des Factorisations Matricielles, éventuellement munies d'une structure orthogonale ou symplectique. Nous discutons et généralisons dans différents contextes les théorèmes de périodicité de Knörrer et Hori–Walcher. ***Pour citer cet article : J. Bertin, F. Rosay, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abstract

Extended Knörrer periodicity. We study the deformation theory aspects of Matricial Factorizations, possibly with an orthogonal or symplectic structure. We discuss and extend the Knörrer and Hori–Walcher periodicity theorems. ***To cite this article: J. Bertin, F. Rosay, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abridged English version

In this Note our aim is to introduce orthogonal and symplectic matrix factorizations of a polynomial w, and their twisted counterpart, motivated by Faltings paper [2]. Our main result is a Knörrer type periodicity theorem in the spirit of [4]. Let us fix an algebraically closed field k of characteristic zero. Throughout, a ring is a complete local k-algebra, with residue field k. Let $w(x) \in k[x_1, \ldots, x_n]$, $w(0) = 0$ be a polynomial defining an hypersurface with isolated singularities (the potential). For deformation-theoretic reasons we will see w in $R = k[[x_1, \ldots, x_n]]$. A matrix factorization (MF in short) of w over a ring A [3,5], is the data of a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradued free $R\hat{\otimes}A$-module $\mathbf{M} = M_0 \oplus M_1$, together with an odd map $\mathbf{Q}: \mathbf{M} \to \mathbf{M}$, such that $\mathbf{Q}^2 = w.1$. If $A = k$, the subscript k will be dropped. Define $\mathbf{M}[1]$ as the shift graded module with odd operator $-\mathbf{Q}[1]$ [3,6]. Let $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ be two given MF over A; then the graded module $\hom_{R\hat{\otimes}A}(\mathbf{M}, \mathbf{M}')$ is a graded dg-module with differential $D(f) = [\mathbf{Q}, f] = \mathbf{Q}' f - (-1)^{|f|} f\mathbf{Q}$ the graded commutator. The degree zero MF-morphisms, in short the morphisms, are those $f \in \hom^0(\mathbf{M}, \mathbf{M}')$ with $D(f) = 0$. Define $\mathrm{Ext}(\mathbf{M}, \mathbf{M}') = \ker Q / \operatorname{Im} Q$ [6]. It is a graded finitely generated A-module. The last construction we need is the tensor product $\mathbf{M} \otimes \mathbf{M}'$. It is simply the graded tensor product of the corresponding dg-modules. Finally we must observe the category of MF (over A) of w is a DG-category $\mathcal{M}F_A(w)$, which yields if we take morphisms up homotopy the triangulated category $\mathrm{MF}_A(w)$, [6,7].

Adresses e-mail : jose.bertin@ujf-grenoble.fr (J. Bertin), frosay@ujf-grenoble.fr (F. Rosay).

1631-073X/$ – see front matter © 2007 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.
doi:10.1016/j.crma.2007.06.026

Let $\mathbf{M}$ be a MF over A. Define $\mathbf{M}^T$ (resp. $\mathbf{M}^*$) as the graded dual module together with odd operator the (ordinary, not graded) transpose of $\mathbf{Q}$ (resp. $\mathbf{M}^T[1]$). A quadratic (resp. symplectic) form on $\mathbf{M}$ is an isomorphism $b:\mathbf{M} \xrightarrow{\sim} \mathbf{M}^*$ such that ${}^t b = -b$ (resp. ${}^t b = b$), where ${}^t b$ denote the transpose of b.

A twisted quadratic (resp. symplectic) form on $\mathbf{M}$ is an isomorphism $q:\mathbf{M} \xrightarrow{\sim} \mathbf{M}^T$ such that ${}^t q = q$ (resp. ${}^t q = -q$). Let us denote $\mathcal{M}F^{\pm}$ (resp. $\mathcal{M}F^{\omega,\pm}$) the category of MF equipped with a quadratic $(+)$, or symplectic $(-)$ (resp. twisted quadratic or symplectic) form, the morphisms being the morphisms of underlying MF.

If $\mathbf{M}$ and $\mathbf{M}'$ are equipped with a quadratic (resp. symplectic, twisted quadratic, ...) form b (resp. q), the adjoint morphism of $f:\mathbf{M} \to \mathbf{M}'$ is defined, yielding an operator $\operatorname{adj}:\hom(\mathbf{M},\mathbf{M}') \to \hom(\mathbf{M}',\mathbf{M})$, as well $\operatorname{adj}: \operatorname{Ext}(\mathbf{M},\mathbf{M}') \to \operatorname{Ext}(\mathbf{M}',\mathbf{M})$. The tensor product previously defined extends to (twisted) quadratic or symplectic MF, following the rule $b \otimes q'$ or $q \otimes b'$ is a quadratic (or symplectic) form on $\mathbf{M} \otimes \mathbf{M}'$, and $b \otimes b'$, or $q \otimes q'$ is a twisted quadratic (or symplectic) form (Proposition 3).

The matrix factorizations have good deformation properties. Let $\overline{\mathbf{M}}$ be a MF over k. There is a well-defined deformation functor $\mathrm{Def}_{\overline{\mathbf{M}}}$ (resp. a restricted functor keeping $w \in R$ fixed) with tangent space $t_{\overline{\mathbf{M}}}$ which fits into an exact sequence

$$0 \to \operatorname{Ext}^1(\overline{\mathbf{M}},\overline{\mathbf{M}}) \to t_{\overline{\mathbf{M}}} \to \mathcal{J} \to 0$$

(resp. $t_{\overline{\mathbf{M}}} = \operatorname{Ext}^1(\overline{\mathbf{M}},\overline{\mathbf{M}})$), where $\mathcal{J}$ denotes the subspace of Q-exact functions in the Tjurina ring. The obstructions to an infinitesimal lifting lie in the cokernel of the natural map $\mathcal{J} \to \operatorname{Ext}^0(\overline{\mathbf{M}},\overline{\mathbf{M}})$ (resp. in $\operatorname{Ext}^0(\overline{\mathbf{M}},\overline{\mathbf{M}})$). Similarly if $\overline{\mathbf{M}}$ is a (twisted) quadratic or symplectic MF, there is a corresponding deformation functor, with analogous description with however $\operatorname{Ext}^k(\overline{\mathbf{M}},\overline{\mathbf{M}})^{\pm}$ the subgroup of selfadjoint, or anti-selfadjoint elements in place of $\operatorname{Ext}^k(\overline{\mathbf{M}},\overline{\mathbf{M}})$ (Proposition 4).

Let us denote (x,y) the MF $k[[x,y]] \xrightarrow{x} k[[x,y]] \xrightarrow{y} k[[x,y]]$ of $w = xy$. Let (P,Q) be a MF with entries in A, and potential $\pi \in \mathcal{M}_A$. The Faltings–Knörrer functor $\theta:\mathcal{M}F_A(\pi) \to \mathcal{M}F_{A[[x,y]]}(xy-\pi)$ is given by the tensor product $\theta(P,Q) = (Q,-P) \otimes (x,y)$. If we endow (x,y) with its essentially unique quadratic form, the functor θ extends to

$$\theta:\mathcal{M}F^{\omega,\pm}(\pi) \longrightarrow \mathcal{M}F^{\pm}(xy-\pi).$$

We then focus on the deformation-theoretic properties of θ. Our result is the fact the Faltings–Knörrer functor yields an equivalence of categories both at $\mathcal{M}F$ and MF levels (Théorème 5). If we restricts to quadratic or symplectic MF, the square θ^2 yields an equivalence between appropriated categories (Théorème 5), result in the spirit of [4]. If w is a nondegenerate quadratic form, Théorème 5 yields the known fact that the category MF(w) is indeed equivalent to the category of Clifford modules over the Clifford algebra of w [1].

1. Introduction

L'objectif dans cette Note est de traduire dans le cadre des factorisations matricielles quelques résultats de Faltings [2] portant sur la structure locale des espaces de modules de G-fibrés vectoriels sur une courbe algébrique semi-stable, G étant l'un des groupes, linéaire, orthogonal ou symplectique. On sait que les factorisations matricielles du polynôme $w(x) \in k[x_1,\dots,x_n]$ correspondent de manière essentiellement bijective aux modules de Cohen–Macaulay maximaux sur l'hypersurface affine $w=0$, supposée avec des singularités isolées [5]. Ceux de ces modules E qui sont bilinéaires, quadratiques ou symplectiques, correspondent à des factorisations matricielles appelées dans le présent article, quadratiques ou symplectiques. Une version tordue est obtenue en demandant que le module E soit isomorphe au dual du module de syzygies $\Omega(E)$. Le foncteur de Faltings–Knörrer échange ces deux situations [2,5,7], en corollaire le carré du foncteur de Knörrer induit une équivalence entre factorisations matricielles bilinéaires de w définies sur R, et celles de $w + xy + uv$ définies sur $R[[x,y,u,v]]$.

2. Catégories de factorisations matricielles

On fixe un corps algébriquement clos de caractéristique nulle k. Un anneau signifie une k-algèbre locale noetherienne complète, de corps résiduel k, en particulier $W(k)$ est l'anneau des vecteurs de Witt de k. On fixe un polynôme $w(x) \in k[x_1,\dots,x_n]$, sans terme constant, définissant une hypersurface avec singularitées isolées. On regardera $w(x)$ comme élément de $R = k[[x_1,\dots,x_n]]$.

Une factorisation matricielle [4], [5] (MF en abrégé) de rang $r \geqslant 1$ de w à coefficients dans l'anneau A, est la donnée d'un couple de matrices $\mathbf{M} = (\varphi, \psi) \in M_r(R\hat{\otimes}A)$ avec $\varphi\psi = \psi\varphi = w.1_r$, et $\varphi(0) = \psi(0) = 0$. (Voir [6] pour une définition plus générale). Dans cette section w est fixé.[1] On peut voir $\mathbf{M}$ comme un diagramme de R_A-modules libres de rang r (le rang de la MF) $M_0 \xrightarrow{\varphi} M_1 \xrightarrow{\psi} M_0 \quad (M_0 = M_1 = R_A^r)$.

Un morphisme $f = (S, T) : \mathbf{M} = (\varphi, \psi) \to \mathbf{M}' = (\varphi', \psi')$ est un morphisme de diagrammes, soit un couple de matrices $(S, T \in M_r(R\hat{\otimes}A))$ tel que $\varphi' S = T\varphi,\ \psi' T = S\psi$. Si S et T sont inversibles f est un isomorphisme. Le groupe $\mathrm{GL}_r \times \mathrm{GL}_r$ agit sur les MF par $(S, T).(\varphi, \psi) = (T\varphi S^{-1}, S\psi T^{-1})$. Il est utile de voir $\mathbf{M}$ comme un objet $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué $\mathbf{M} = M_0 \oplus M_1$. On définit la MF translatée $\mathbf{M}[1]$ comme étant $M_1 \xrightarrow{-\psi} M_0 \xrightarrow{-\varphi} M_1$. Soit l'opérateur impair $\mathbf{Q} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ \varphi & 0 \end{pmatrix} : \mathbf{M} \to \mathbf{M} \quad (\mathbf{Q}^2 = w.1). \tag{1}$$

Si $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ sont deux MF de w à coefficients dans A, le groupe $\hom(\mathbf{M}, \mathbf{M}') = \hom^0(\mathbf{M}, \mathbf{M}') \oplus \hom^1(\mathbf{M}, \mathbf{M}')$ est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-groupe différentiel gradué, de différentielle $D(f) = Q' f - (-1)^{|f|} f Q$ (on note $|f|$ le degré de f). On pose

$$\mathrm{Ext}^\bullet(\mathbf{M}, \mathbf{M}') = \ker Q / \operatorname{Im} Q = \mathrm{Ext}^0(\mathbf{M}, \mathbf{M}') \oplus \mathrm{Ext}^1(\mathbf{M}, \mathbf{M}'). \tag{2}$$

Comme $w(x)$ n'a que des singularités isolées $\mathrm{Ext}^\bullet(\mathbf{M}, \mathbf{M}')$ est un A-module de type fini. Le produit tensoriel $\mathbf{M} \otimes \mathbf{M}'$ est la MF qui a pour opérateurs

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 \otimes \varphi' & \psi \otimes 1 \\ \varphi \otimes 1 & -1 \otimes \psi' \end{pmatrix}, \qquad \Psi = \begin{pmatrix} 1 \otimes \psi' & \psi \otimes 1 \\ \varphi \otimes 1 & -1 \otimes \varphi' \end{pmatrix}. \tag{3}$$

En résumé, les factorisations matricielles de $w(x)$ à coefficients dans A forment une DG-catégorie $\mathcal{MF}_A$ prétriangulée, i.e. avec translation involutive $\mathbf{M} \to \mathbf{M}[1]$, et cônes [7]. La catégorie triangulée associée MF_A a pour objets les MF, et pour morphismes $\mathbf{M} \to \mathbf{M}'$ (de degré zéro), les éléments de $\mathrm{Ext}^0(\mathbf{M}, \mathbf{M}')$.

Exemple 1. Si $R = k[[x, y]]$, et $w = xy$, toute MF de w à coefficients dans $A = k$, de rang d, est isomorphe à $\mathbf{M}_{p,q}\ (p, q \geqslant 0,\ p + q = d)$, avec pour opérateurs $\varphi = \left(\begin{smallmatrix} x1_p & 0 \\ 0 & y1_q \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} y1_p & 0 \\ 0 & x1_q \end{smallmatrix}\right)$, soit $\mathbf{M}_{p,q} = \mathbf{M}_{1,0}^{\otimes p} \otimes \mathbf{M}_{1,0}[1]^{\otimes q}$.

3. Factorisations orthogonales et symplectiques

Soit $\mathbf{M} : M_0 \xrightarrow{\varphi} M_1 \xrightarrow{\psi} M_0$ une MF de rang d. Posons $\mathbf{M}^T : M_0^* \xrightarrow{{}^t\psi} M_1^* \xrightarrow{{}^t\varphi} M_0^*$, et $\mathbf{M}^* : M_1^* \xrightarrow{-{}^t\varphi} M_0^* \xrightarrow{-{}^t\psi} M_1^*$. On a $\mathbf{M}^* = (\mathbf{M}^T)[1] = (\mathbf{M}[1])^T$. Ces opérations s'étendent en des foncteurs gradués contravariants anti-involutifs[2] $\mathcal{MF}_A \longrightarrow \mathcal{MF}_A$. On a des identifications canoniques $(\mathbf{M} \otimes \mathbf{M}')^T \cong \mathbf{M}^T \otimes \mathbf{M}'^T \cong \mathbf{M}^* \otimes \mathbf{M}'^*$, et $(\mathbf{M} \otimes \mathbf{M}')^* \cong \mathbf{M}^T \otimes \mathbf{M}'^* \cong \mathbf{M}^* \otimes \mathbf{M}'^T$.

Définition 1. On appelle forme quadratique (resp. symplectique) sur $\mathbf{M}$, la donnée d'un isomorphisme dans $\mathcal{MF}_A$, $b : \mathbf{M} \xrightarrow{\sim} \mathbf{M}^*$ tel que ${}^t b = -b$ (resp. b). On appelle forme quadratique (resp. symplectique) tordue sur $\mathbf{M}$, la donnée d'un isomorphisme de MF $q : \mathbf{M} \xrightarrow{\sim} \mathbf{M}^T$ tel que ${}^t q = q$ (resp. $-q$).

On a donc $Q^{\mathrm{adj}} := b^{-1\,t} Q b = -Q$, respectivement $Q^{\mathrm{adj}} = Q$ dans le cas tordu. D'une autre manière si $b = \left(\begin{smallmatrix} 0 & b_1 \\ b_0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $b_0 : M_0 \to M_1^*$, $b_1 : M_1 \to M_0^*$, alors ${}^t b_0 = -b_1$ (resp. b_1), et $\varphi^{\mathrm{adj}} := b_1^{-1\,t} \varphi b_0 = -\varphi$, $\psi^{\mathrm{adj}} = -\psi$. Explicitation analogue dans le cas tordu. On note $\mathcal{MF}_A^{\pm}$ (resp. $\mathcal{MF}_A^{\omega,\pm}$) la catégorie dont les objets sont les MF avec structure orthogonale $(+)$, ou symplectique $(-)$, (resp. orthogonale tordue, symplectique tordue). Si $A = k$, l'indice A sera omis. Un isomorphisme $f : (\mathbf{M}, b) \xrightarrow{\sim} (\mathbf{M}', b')$ est un isomorphisme de MF tel que $f = b^{-1\,t} f b'$, définition analogue dans le cas tordu. Le groupe de jauge agit sur les MF (orthogonales, ...) vues comme des couples (Q, b) selon la règle $F(Q, b) = (F^{-1} Q F,\ {}^t F b F)$.

---

[1] Dans la Section 4, on déformera w, qui pourra être plus généralement un élément de l'idéal maximal de $R\hat{\otimes}A$ relevant w.

[2] Ces foncteurs ne sont pas des dg-foncteurs. Pour rétablir cette propriété, il faut remplacer la transposition par la transposition graduée [4], ce qui aurait pour effet de faire de $\mathbf{M}^*$ (resp. $\mathbf{M}^T$) une MF de $-w$. L'insertion d'une involution σ de R telle que $\sigma(w) = -w$ conduit à la théorie hermitienne.

Posons $\mathrm{cok}(\mathbf{M}) := \mathrm{coker}(\varphi)$. Le foncteur cok établit une équivalence de catégories de MF_k sur la catégorie (stable) des $R/(w)$-modules de Cohen–Macaulay maximaux [5]. Le module des syzygies $\Omega(\mathrm{cok}(\mathbf{M}))$ est $\mathrm{cok}(\mathbf{M}[1]) = \mathrm{coker}(\psi)$. On a $\mathrm{cok}(\mathbf{M}^*) = \mathrm{cok}(\mathbf{M})^*$, et $\mathrm{cok}(\mathbf{M}^T) = \Omega(\mathrm{cok}(\mathbf{M}))^*$. Une forme quadratique (resp. symplectique) sur $\mathbf{M}$ induit une forme quadratique (symplectique) sur $\mathrm{cok}(\mathbf{M})$. Une forme quadratique (resp. symplectique) tordue induit un isomorphisme $c : \mathrm{cok}(\mathbf{M}) \xrightarrow{\sim} (\Omega(\mathrm{cok}(\mathbf{M}))^*$ tel que ${}^t\Omega(c) = \pm c$. Réciproquement toute structure orthogonale (resp. ...) sur un module de Cohen–Macaulay maximal provient d'une MF orthogonale (resp. ...).

Si $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ sont deux objets de $\mathcal{M}F^+$ (resp. $\mathcal{M}F^-, \ldots$), l'application d'adjonction (de degré zéro) est

$$\mathrm{adj} : \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{M}F^\pm}(\mathbf{M}, \mathbf{M}') \to \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{M}F^\pm}(\mathbf{M}', \mathbf{M}), \quad f \mapsto f^{\mathrm{adj}} = b^{-1t} f b'$$

(resp. $\mathrm{adj} : \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{M}F^{\omega,\pm}}(\mathbf{M}, \mathbf{M}') \to \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{M}F^{\omega,\pm}}(\mathbf{M}', \mathbf{M})$).

On vérifie la règle de commutation suivante :

$$D(f)^{\mathrm{adj}} = (\pm)(-1)^{|f|} D(f^{\mathrm{adj}}) \tag{4}$$

avec $+$ dans le cas orthogonal ou symplectique, et $-$ dans le cas orthogonal ou symplectique tordu.

Il s'ensuit que l'application d'adjonction est définie au niveau de la catégorie triangulée MF_A, et conduit à $\mathrm{adj} : \mathrm{Ext}^\bullet(\mathbf{M}, \mathbf{M}') \to \mathrm{Ext}^\bullet(\mathbf{M}', \mathbf{M})$. On utilisera le signe $\epsilon = +1$ (resp. $\epsilon = -1$) pour distinguer une structure orthogonale ou orthogonale tordue (resp. symplectique, symplectique tordue)

Proposition 2. *Soit (b, ϵ) ou (q, ϵ) (resp. (b', ϵ'), (q', ϵ')) une structure bilinéaire ou bilinéaire tordue sur $\mathbf{M}$ (resp. sur $\mathbf{M}'$), alors $b \otimes q'$ ainsi que $q \otimes b'$ définit une structure bilinéaire de type $\epsilon\epsilon'$. Par contre $q \otimes q'$ (resp. $b \otimes b'$) définit une structure bilinéaire tordue de type $\epsilon\epsilon'$ (resp. $-\epsilon\epsilon'$).*

Exemple 2. Soient des entiers $h_i \geqslant 2$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$. Pour $n_i \in [1, h_i - 1]$, soit $\mathbf{M}_{n_i}$ la MF de rang un définie sur $k[[x_i]]$ par $(x_i^{n_i}, x_i^{h_i - n_i})$. Soit au-dessus de $k[[x_1, \ldots, x_d]]$ la MF $\mathbf{M}_{n_1,\ldots,n_d} = \bigotimes_{i=1}^d \mathbf{M}_{n_i}$. Il y a sur $\mathbf{M}_{n_1,\ldots,n_d}$ une (essentiellement) unique structure bilinéaire si d est impair (resp. bilinéaire tordue si d est pair), qui est orthogonale ou symplectique selon la parité de $m = [d/2]$.

4. Déformations et foncteur de Faltings–Knörrer

Fixons $\overline{\mathbf{M}} = (\bar\varphi, \bar\psi)$ une MF de rang d, définie sur k. On suppose que le potentiel $w(x)$ a une singularité isolée à l'origine. Il sera commode d'identifier les modules M_0 et M_1 à $(R\hat\otimes A)^d$. Rappelons que A désigne un anneau local noetherien complet de corps résiduel k. Par MF on entend dans cette section une factorisation matricielle de potentiel $\omega \in \mathcal{M}_A$, l'idéal maximal de $R\hat\otimes A$. Une déformation de $\overline{\mathbf{M}}$ à A est une classe de MF, $\mathbf{M} = (\varphi, \psi)$ au-dessus de A telles que par réduction à k, $\mathbf{M}$ donne $\overline{\mathbf{M}}$.

Appelons automorphisme infinitésimal de la déformation $\mathbf{M}$, un automorphisme de $\mathbf{M}$ qui par réduction à k induit $1_{\overline{\mathbf{M}}}$. Le groupe des A-automorphismes de $R\hat\otimes A$ (changements de variables) agit sur les MF définies sur A. Un tel automorphisme est infinitésimal si sa réduction à R est l'identité. Une transformation de jauge (définie sur A) est un élément du groupe produit semi-direct du groupe des automorphismes infinitésimaux par le groupe des changements de variables infinitésimaux. Alors $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$ sont dans la même classe de déformations de $\overline{\mathbf{M}}$ à A, s'il existe une transformation de jauge $f : \mathbf{M}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{M}_2$. Soit $\mathrm{Def}_{\overline{\mathbf{M}}}(A)$ l'ensemble des déformations de $\overline{\mathbf{M}}$ à A, de sorte que $\mathrm{Def}_{\mathbf{M}}$ est le foncteur des déformations (infinitésimales) de $\overline{\mathbf{M}}$. Soit $\mathcal{O} = R/(w, \partial w)$ l'anneau de Tjurina. On désigne enfin par $\mathcal{I}$ l'idéal formé des classes de fonctions Q-exactes, c'est à dire les $h \in R$ tels que $h.1$ est un cobord. La théorie des déformations de $\overline{\mathbf{M}}$ se résume en :

Le foncteur $\mathrm{Def}_{\overline{\mathbf{M}}}$ admet une enveloppe verselle. L'espace tangent $t_{\overline{\mathbf{M}}} = \mathrm{Def}_{\overline{\mathbf{M}}}(k[\epsilon])$ $(\epsilon^2 = 0)$ s'insère dans une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(\overline{\mathbf{M}}, \overline{\mathbf{M}}) \to t_{\overline{\mathbf{M}}} \to \mathcal{I} \to 0. \tag{5}$$

Les obstructions au relèvement infinitésimal de $\overline{\mathbf{M}}$ appartiennent au conoyau de l'application $R/\mathcal{I} \to \mathrm{Ext}^0(\overline{\mathbf{M}}, \overline{\mathbf{M}})$. Si on déforme $\overline{\mathbf{M}}$ en gardant rigide le potentiel w, l'espace tangent se réduit au sous-espace $\mathrm{Ext}^1(\overline{\mathbf{M}}, \overline{\mathbf{M}})$, les obstructions étant alors localisées dans $\mathrm{Ext}^0(\overline{\mathbf{M}}, \overline{\mathbf{M}})$.

Si $\overline{\mathbf{M}}$ est munie d'une structure orthogonale ou orthogonale tordue $\bar{b}$ (resp. symplectique, ...) , on s'intéresse aux déformations de $\overline{\mathbf{M}}$ qui préservent cette structure. Quitte à remplacer une déformation $\mathbf{M}$ par une déformation équivalente, on peut supposer que la structure bilinéaire est constante, donnée par $\bar{b} \otimes 1$ (resp. $\bar{q} \otimes 1$). Les isomorphismes (transformations de jauge) sont alors assujettis à préserver cette structure. On désignera par un indice supérieur $+$ (resp. $-$) le sous-espace des éléments autoadjoints (resp. anti-autoadjoints).

Proposition 3. *Le foncteur* $\mathrm{Def}_{\overline{\mathbf{M}},b}$ *(resp.* $\mathrm{Def}_{\overline{\mathbf{M}},q}$*) admet une enveloppe verselle. L'espace tangent* $t_{\overline{\mathbf{M}},b}$ *(resp.* $t_{\overline{\mathbf{M}},q}$*) est la partie anti-autoadjointe (resp. autoadjointe) de* $t_{\overline{\mathbf{M}}}$*, il s'insère dans une suite exacte* $0 \to \mathrm{Ext}^1(\overline{\mathbf{M}}, \overline{\mathbf{M}})^- \to t_{\overline{\mathbf{M}},b} \to \mathcal{I} \to 0$ *(resp.* $0 \to \mathrm{Ext}^1(\overline{\mathbf{M}}, \overline{\mathbf{M}})^+ \to t_{\overline{\mathbf{M}},q} \to \mathcal{I} \to 0$*).*

Les obstructions au relèvement infinitésimal de $\overline{\mathbf{M}}$ *appartiennent au conoyau de l'application* $R/\mathcal{I} \to \mathrm{Ext}^0(\overline{\mathbf{M}}, \overline{\mathbf{M}})^+$ *(resp.* $R/\mathcal{I} \to \mathrm{Ext}^0(\overline{\mathbf{M}}, \overline{\mathbf{M}})^-$*).*

Si on déforme $(\overline{\mathbf{M}}, b)$ (resp. $(\overline{\mathbf{M}}, q)$) en gardant w rigide, l'espace tangent se réduit au sous-espace $\mathrm{Ext}^1(\overline{\mathbf{M}}, \overline{\mathbf{M}})^-$ (resp. $\mathrm{Ext}^1(\overline{\mathbf{M}}, \overline{\mathbf{M}})^+$), les obstructions étant alors localisées dans $\mathrm{Ext}^0(\overline{\mathbf{M}}, \overline{\mathbf{M}})^+$ (resp. $\mathrm{Ext}^0(\overline{\mathbf{M}}, \overline{\mathbf{M}})^-$).

Exemple 3. L'exemple clé pour énoncer le théorème de périodicité de Faltings–Knörrer est celui du potentiel $w = xy \in k[[x, y]]$ (point double), et $\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_{p,q}$ (exemple 1). On se limitera à $p = q = r$, avec pour notation $\overline{\mathbf{M}}_r$. On a $\overline{\mathbf{M}}_r = \overline{\mathbf{M}}_r^T = \overline{\mathbf{M}}_r^*$. On peut prouver qu'à une transformation de jauge près on peut supposer que la structure bilinéaire (resp. bilinéaire tordue) est constante, c'est à dire de la forme $b_0 = \left(\begin{smallmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & q_1 \end{smallmatrix}\right)$, $b_1 = -b_0$, avec q_0, q_1 définissant des formes quadratiques non dégénérées sur k^r. Même chose dans le cas tordu.

La déformation verselle de $\overline{\mathbf{M}}_r$ (resp. $(\overline{\mathbf{M}}_r, b)$, $(\overline{\mathbf{M}}_r, q)$) est $\mathbf{M}_{r,\mathrm{ver}} = \theta(P, Q)$ avec $R_{\mathrm{ver}} = W(k)[[p_{ij}, q_{ij}, t]]/(\star)$, $(1 \leqslant i, j \leqslant r)$, $(\star)$ désignant l'idéal défini par les équations matricielles $(p_{ij}).(q_{ij}) = (q_{ij}).(p_{ij}) = t.1_r$, avec $P = (p_{ij})$, $Q = (q_{ij})$. Dans le cas orthogonal (resp. ...) on impose $Q = P^{\mathrm{adj}}$ (resp. $Q = -P^{\mathrm{adj}}$ dans le cas tordu).

Soit (P, Q) une MF de rang r sur A, de potentiel $\pi \in \mathcal{M}_A$, $(PQ = QP = \pi.1)$. Formons la MF (φ, ψ) de potentiel $xy - \pi$, définie sur $A[[x, y]]$, par $(\varphi, \psi) = \theta(P, Q) = (Q, -P) \otimes (x, y)$. A une équivalence près $\varphi = \left(\begin{smallmatrix} x & P \\ Q & y \end{smallmatrix}\right)$, $\psi = \left(\begin{smallmatrix} y & -P \\ -Q & x \end{smallmatrix}\right)$. Noter que le foncteur $\theta : \mathcal{MF}_A(\pi) \to \mathcal{MF}_{A[[x,y]]}(xy - \pi)$ s'étend aux catégories triangulées. Si b (resp. q) est une forme quadratique, ou symplectique sur (P, Q) (resp. forme quadratique, ou symplectique tordue), alors $b \otimes 1$ (resp. $q \otimes 1$) est une forme symplectique, ou quadratique tordue (resp. forme quadratique ou symplectique) sur $\theta(P, Q)$. On a (comparer avec [2])

Théorème 4. (i) *Toute déformation de* $\overline{\mathbf{M}}_r$ *à* A *est isomorphe à une déformation de la forme* $\theta(P, Q)$*. Toute déformation de* (M_r, b) *(resp.* (M_r, q)*) à* A *est isomorphe à* $\theta(P, Q)$*, pour une certaine MF orthogonale (symplectique, ...)* (P, Q)*.*

(ii) *Le foncteur* $\theta : \mathrm{MF}_A(\pi) \to \mathrm{MF}_{A[[x,y]]}(xy - \pi)$ *est une équivalence.*

Si $A = k[[x_1, \dots, x_n]]$, et $\pi \in A$ $(\pi(0) = 0)$, θ établit une équivalence $\mathrm{MF}(\pi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{MF}(xy - \pi)$, resp. $\mathrm{MF}^{\omega,\pm}(\pi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{MF}^{\pm}(xy - \pi)$, $\mathrm{MF} \pm (\pi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{MF}^{\omega,-(\pm)}(xy - \pi)$. Le carré $\theta\theta$ échange les formes quadratiques et symplectiques, et conduit au résultat de périodicité d'ordre quatre (comparer avec [4]) :

Théorème 5. *Le foncteur* $\theta\theta$ *définit une équivalence de catégories triangulées*

$$\mathrm{MF}^{\pm}(\pi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{MF}^{-(\pm)}(xy + uv - \pi). \tag{6}$$

Références

[1] J. Bertin, Clifford algebras and matrix factorizations, in: ICCA7, Toulouse, June 2005, proceedings, Birkhäuser, in press.
[2] G. Faltings, Moduli stacks for bundles on semistable curves, Math. Ann. 304 (1996) 489–515.
[3] K. Hori, J. Walcher, D-branes from matrix factorizations, talk at strings 04 (Paris), arXiv: hep-th/0409204.
[4] K. Hori, J. Walcher, D-branes categories for orientifolds – The Landau–Ginzburg case, arXiv: hep-th/0606179.
[5] H. Knörrer, Cohen–Macaulay modules on hypersurfaces singularities I, Invent. Math. 88 (1987) 153–164.
[6] M. Khovanov, L. Rosansky, Matrix factorizations and link homology, arXiv: math.QA/0401268.
[7] D. Orlov, Triangulated categories of singularities, D-branes in Landau–Ginzburg models, arXiv: math.AG/0302304.