Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 791–794
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Statistique

Groupe d'opérateurs unitaires déduit d'une mesure spectrale – une application

Alain Boudou

Laboratoire de statistique et probabilités, UMR CNRS C5583, Université Paul-Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex, France

Reçu le 6 mars 2006 ; accepté après révision le 27 avril 2007

Présenté par Paul Deheuvels

Résumé

Dans cette Note, étant donné une fonction aléatoire continue stationnaire $(X'_{(t_1,t_2)})_{(t_1,t_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ et un couple de réels (a,b), nous nous proposons de définir tous les processus stationnaires $(X'_{(t_1,t_2)})_{(t_1,t_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ tels que $(X'_{(bt,at)})_{t\in\mathbb{R}} = (X_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Pour cela, nous utilisons le produit de convolution de mesures spectrales, tel que celui-ci est défini en [A. Boudou, Y. Romain, On spectral and random measures associated to discrete and continuous-time processes, Statist. Probab. Lett. 59 (2002) 145–157], et développons d'autres outils mathématiques dont l'intérêt, nous semble-t-il, dépasse le cadre de nos préoccupations initiales. Nous utilisons le concept de transposé d'un homomorphisme, lequel nous permet de définir, d'une façon harmonieuse, la notion de groupe d'opérateurs unitaires déduit d'une mesure spectrale. ***Pour citer cet article : A. Boudou, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abstract

Group of unitary operators deducted from a spectral measure – an application. In this Note, given the stationary continuous random function $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ and a pair (a,b) of reals we will define all the stationary processes $(X'_{(t_1,t_2)})_{(t_1,t_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ such that $(X'_{(bt,at)})_{t\in\mathbb{R}} = (X_t)_{t\in\mathbb{R}}$. For this purpose, we use the product of spectral measure convolution, as defined in [A. Boudou, Y. Romain, On spectral and random measures associated to discrete and continuous-time processes, Statist. Probab. Lett. 59 (2002) 145–157], and we develop other mathematical tools which offer a wider interest than our initial preoccupation. So, we use the concept of transposed homomorphism, which allows us to evenly define the concept of a group of unitary operators deduced from a spectral measure. ***To cite this article: A. Boudou, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

1. Rappel et notations

L'objet de ce paragraphe est de préciser les notations et de rappeler quelques outils nécéssaires à la compréhension de ce texte. Par $\mathcal{P}(H)$ nous désignons l'ensemble des projecteurs orthogonaux d'un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert H (qui peut être du type $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$).

Adresse e-mail : boudou@cict.fr.

1631-073X/$ – see front matter © 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2007.05.013

Rappelons que si $\widehat{G}$, dual d'un groupe abélien localement compact G, est à base dénombrable, il en est de même de $\widehat{G} \times \widehat{G}$, dual de $G \times G$, et que, $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ désignant la tribu de Borel de $\widehat{G}$, $\mathcal{B}_{\widehat{G}} \otimes \mathcal{B}_{\widehat{G}}$ est la tribu de Borel de $\widehat{G} \times \widehat{G}$. Dans ce texte G, G' et G'' sont des groupes abéliens localement compacts dont les duaux $\widehat{G}$, $\widehat{G}'$ et $\widehat{G}''$ sont à bases dénombrables.

En [3] le lecteur peut trouver la définition d'une mesure spectrale (m.s.), d'une mesure aléatoire (m.a.) et de l'intégrale stochastique relativement à cette dernière. Il y trouvera également la définition de l'image d'une m.a. (resp. m.s.) par une application mesurable et un théorème de transfert permettant d'intégrer par rapport à une m.a. image. Dans ce texte nous utiliserons fréquemment le produit de convolution de deux m.s. qui commutent, notion développée en [4]. Notons que les définitions de mesure spectrale et de mesure aléatoire que nous avons retenues sont celles qui sont adoptées respectivement en [1] et en [2].

Il est bien connu que lorsque $(X_g)_{g\in G}$ est une fonction aléatoire continue (f.a.c.) stationnaire à valeurs dans H il existe une m.a. Z, et une seule, dite m.a. associée à $(X_g)_{g\in G}$, définie sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ à valeurs dans H telle que $X_g = \int (\cdot, g)_{\widehat{G}G}\, \mathrm{d}Z(\cdot)$, pour tout g de G. Réciproquement lorsque Z est une m.a. définie sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$, $(\int (\cdot, g)_{\widehat{G}G}\, \mathrm{d}Z(\cdot))_{g\in G}$ est une f.a.c. stationnaire.

Une m.s. α, sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour H, est dite compatible avec une m.a. Z, définie sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ et à valeurs dans H, lorsque, pour tout A de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$, on a $(\alpha(A))(Z(\widehat{G})) = Z(A)$. Étant donné une m.a. Z on peut montrer qu'il existe une infinité de m.s. compatibles avec Z.

Lorsque ε est une m.s. sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour H, si l'on note Z_ε^X la m.a. $A \in B_{\widehat{G}} \mapsto \varepsilon(A)X \in H$, on montre qu'étant donné un opérateur unitaire U de H, il existe une et une seule m.s. ε, sur $\mathcal{B}$, tribu de Borel de $[-\pi, \pi[$, pour H, appelée m.s. associée à U, telle que $U(X) = \int e^{i\cdot}\, \mathrm{d}Z_\varepsilon^X$, pour tout X de H. Réciproquement lorsque ε est une m.s. sur $\mathcal{B}$ pour H l'application $X \in H \mapsto \int e^{i\cdot}\, \mathrm{d}Z_\varepsilon^X \in H$ est un opérateur unitaire, appelé opérateur unitaire déduit de ε, de m.s. associée ε. Nous pouvons établir que deux opérateurs unitaires U_1 et U_2 de H commutent si et seulement si les m.s. ε_1 et ε_2 qui leur sont associées commutent, $\varepsilon_1 * \varepsilon_2$ est alors la m.s. associée à l'opérateur unitaire $U_1 \circ U_2$.

Terminons ces rappels par quelques propriétés algébriques que l'on peut trouver en [4] :

(i) l'application $\varepsilon_{\widehat{G}} : A \in \mathcal{B}_{\widehat{G}} \mapsto \delta_0(A) I_H \in \mathcal{P}(H)$, où δ_0 est la mesure de Dirac concentrée en 0, est une m.s., $\varepsilon_{\widehat{G}}$ commute avec toute m.s. ε sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour H et : $\varepsilon_{\widehat{G}} * \varepsilon = \varepsilon$;
(ii) avec des notations évidentes, pour toute m.s. ε sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour H, on a : $0(\varepsilon) = \varepsilon_{\widehat{G}'}$;
(iii) si h est un homomorphisme mesurable de $\widehat{G}$ dans $\widehat{G}'$ et si $\varepsilon_1$et ε_2 sont deux m.s., sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour H, qui commutent alors $h(\varepsilon_1)$ et $h(\varepsilon_2)$ commutent et : $h(\varepsilon_1 * \varepsilon_2) = (h(\varepsilon_1)) * (h(\varepsilon_2))$;
(iv) si h_1 et h_2 sont deux applications mesurables de $\widehat{G}$ dans $\widehat{G}'$ et si ε est une m.s. sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour H alors $h_1 + h_2$ est mesurable, les m.s. $h_1(\varepsilon)$ et $h_2(\varepsilon)$ commutent et $(h_1 + h_2)(\varepsilon) = (h_1(\varepsilon)) * (h_2(\varepsilon))$.

2. Transposé d'un homomorphisme

Commençons par introduire la notion de transposé d'un homomorphisme grâce au

Théorème-définition 2.1. *Si h est un homomorphisme continu de G dans G' alors* :

(i) *pour tout γ' de $\widehat{G}'$, $\gamma' \circ h$ appartient à $\widehat{G}$* ;
(ii) *l'application ${}^t h : \gamma' \in \widehat{G}' \mapsto \gamma' \circ h \in \widehat{G}$ est un homomorphime continu appelé homomorphisme transposé de h* ;
(iii) *pour tout (γ', g) de $\widehat{G}' \times G$ on a : $({}^t h(\gamma'), g)_{\widehat{G}G} = (\gamma', h(g))_{\widehat{G}'G'}$.*

Les principales propriétés du transposé d'un homomorphime continu sont fournies par le

Lemme 2.2.

(i) *si h_1 et h_2 sont des homomorphismes continus respectivement de G dans G' et de G' dans G'', $h_2 \circ h_1$ est un homomorphisme continu de G dans G'' et ${}^t(h_2 \circ h_1) = {}^t h_2 \circ {}^t h_1$* ;
(ii) *si h_1 et h_2 sont des homomorphismes continus de G dans G', il en est de même de $h_1 + h_2$ et de $h_1 - h_2$, de plus : ${}^t(h_1 + h_2) = {}^t h_1 + {}^t h_2$ et ${}^t(h_1 - h_2) = {}^t h_1 - {}^t h_2$* ;

(iii) *si $(X'_{g'})_{g'\in G'}$ est une f.a.c stationnaire de m.a. associée Z' et h un homomorphisme continu de G dans G', alors $(X'_{h(g)})_{g\in G}$ est une f.a.c. stationnaire de m.a. associée ${}^t h(Z')$.*

Dans la suite du texte, pour tout g de G nous désignerons par h_g l'homomorphisme continu $n \in \mathbb{Z} \mapsto ng \in G$. La famille d'homomorphismes $\{h_g;\, g \in G\}$ nous permet d'introduire le

Théorème-définition 2.3. *Étant donné une m.s. ε sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour H, nous appelons groupe des opérateurs unitaires de H déduit de ε, la famille $\{U_g;\, g \in G\}$ où U_g est l'opérateur unitaire déduit de ${}^t h_g(\varepsilon)$. Pour tout couple (g_1, g_2) d'éléments de G on a alors $U_{g_1+g_2} = U_{g_1} \circ U_{g_2}$. Pour tout X de H, nous pouvons affirmer que $(U_g(X))_{g\in G}$ est une f.a.c. stationnaire de m.a. associée Z^X_ε.*

Démonstration. D'après ce qui précède et les propriétés du produit de convolution il vient ${}^t h_{g_1+g_2}(\varepsilon) = {}^t(h_{g_1} + h_{g_2})(\varepsilon) = ({}^t h_{g_1} + {}^t h_{g_2})(\varepsilon) = ({}^t h_{g_1}(\varepsilon)) * ({}^t h_{g_2}(\varepsilon))$, d'où $U_{g_1+g_2} = U_{g_1} \circ U_{g_2}$. De plus, les régles d'intégration par rapport à une m.a. image nous permettent d'écrire $U_g(X) = \int e^{i\cdot}\,\mathrm{d}Z^X_{{}^t h_g(\varepsilon)} = \int e^{i\cdot}\,\mathrm{d}{}^t h_g(Z^X_\varepsilon) = \int e^{i\cdot} \circ {}^t h_g\,\mathrm{d}Z^X_\varepsilon = \int (\cdot, g)_{\widehat{G}G}\,\mathrm{d}Z^X_\varepsilon$. $\square$

Lorsque ε_1 et ε_2 sont deux m.s., sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour H, qui commutent de l'égalité ${}^t h_g(\varepsilon_1 * \varepsilon_2) = {}^t h_g(\varepsilon_1) * {}^t h_g(\varepsilon_2)$, nous déduisons le

Lemme 2.4. *Si $\{U^1_g;\, g \in G\}$ et $\{U^2_g;\, g \in G\}$ sont les groupes d'opérateurs unitaires de H respectivement déduits de ε_1 et de ε_2, m.s. sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour H qui commutent, alors $\{U^1_g \circ U^2_g;\, g \in G\}$ est le groupe des opérateurs unitaires de H déduit de la m.s. $\varepsilon_1 * \varepsilon_2$.*

Étant donné un homomorphisme continu h, de G dans G', il est facile d'établir que $h \circ h_g = h_{h(g)}$, donc que ${}^t h_{h(g)}(\varepsilon') = {}^t h_g({}^t h(\varepsilon'))$, lorsque ε' est une m.s. sur $\mathcal{B}_{\widehat{G'}}$ pour H. d'où le

Lemme 2.5. *Si $\{U'_{g'};\, g' \in G'\}$ est le groupe des opérateurs unitaires de H déduit d'une m.s. ε' sur $\mathcal{B}_{\widehat{G'}}$ pour H, si h est un homomorphisme continu, de G dans G', alors $\{U'_{h(g)};\, g \in G\}$ est le groupe des opérateurs unitaires de H déduit de ${}^t h(\varepsilon')$.*

3. L'équation $X' \circ h = X$

Étant donné une f.a.c. stationnaire $(X_g)_{g\in G}$ à valeurs dans H, de m.a. associée Z, et h un homomorphisme continu de G dans G', nous nous proposons de déterminer toutes les f.a.c. stationnaires $(X'_{g'})_{g'\in G'}$ telles que $(X'_{h(g)})_{g\in G} = (X_g)_{g\in G}$. C'est-à-dire que si l'on note X (resp. X') l'application $g \in G \mapsto X_g \in H$ (resp. $g' \in G' \mapsto X'_{g'} \in H$) nous souhaitons résoudre l'équation $X' \circ h = X$. Pour cela nous supposerons qu'il existe une application mesurable v, de $\widehat{G}$ dans $\widehat{G'}$, telle que ${}^t h \circ v = i_{\widehat{G}}$. Les solutions sont alors fournies par la

Proposition 3.1. *Si α est une m.s. sur $\mathcal{B}_{\widehat{G'}}$ pour H compatible avec la m.a. $v(Z)$ et si $\{U_{g'};\, g' \in G'\}$ est le groupe des opérateurs unitaires de H déduit d'une m.s. β sur $\mathcal{B}_{\widehat{G'}}$ pour H qui commute avec α et telle que ${}^t h(\beta) = \varepsilon_{\widehat{G}}$, alors $(U_{g'}(\int (\cdot, g')_{\widehat{G'}G'}\,\mathrm{d}v(Z)))_{g'\in G'}$ est une f.a.c. stationnaire solution. Toutes les solutions sont de ce type.*

Démonstration. Soit $\{V_{g'};\, g' \in G'\}$ $\{U_{g'};\, g' \in G'\}$ les groupes d'opérateurs unitaires respectivement déduits de α et de β, m.s. vérifiant les hypothèses. Comme $\{U_{g'} \circ V_{g'};\, g' \in G'\}$ est le groupe des opérateurs unitaires déduit de $\beta * \alpha$, $(U_{g'} \circ V_{g'}(X_0))_{g'\in G'}$, c'est-à-dire $(U_{g'}(\int (\cdot, g')_{\widehat{G'}G'}\,\mathrm{d}v(Z)))_{g'\in G'}$ est une f.a.c. stationnaire. Cette dernière est solution car d'une part $U_{h(g)} = I_H$ et d'autre part $\int (\cdot, h(g))_{\widehat{G'}G'}\,\mathrm{d}v(Z) = \int (\cdot, g)_{\widehat{G}G}\,\mathrm{d}Z$.

Réciproquement, lorsque $(X'_{g'})_{g'\in G'}$ est une f.a.c. stationnaire solution, de m.a. associée Z', si l'on désigne par α' une m.s. compatible avec Z' et par f l'application $\gamma' \in \widehat{G'} \mapsto \gamma' - (v \circ {}^t h)(\gamma') \in \widehat{G'}$, les m.s. $\alpha = (v \circ {}^t h)(\alpha')$ et $\beta = f(\alpha')$ vérifient les hypothèses du théorème. Adoptant les mêmes notations que précédemment on peut affirmer que $\{U_{g'} \circ V_{g'};\, g' \in G'\}$ est le groupe des opérateurs unitaires déduit de $\alpha * \beta = ((v \circ {}^t h) + f)\alpha' = \alpha'$. Donc $(U_{g'} \circ$

$V_{g'}(X_0))_{g'\in G'}$, c'est-à-dire $(U_{g'}(\int(\cdot,g')_{\widehat{G'}G'}\,\mathrm{d}v(Z)))_{g'\in G'}$ est une f.a.c. stationnaire de m.a. associée $A'\in\mathcal{B}_{\widehat{G'}}\mapsto\alpha'(A')(X_0)\in H$, ou bien encore de m.a. associée Z'. □

Considérons le cas particulier où l'homomorphisme h est du type $g\in G\mapsto(l(g),k(g))\in G\times G$, l et k étant des homomorphimes continus qui commutent. Nous ferons l'hypothèse qu'il existe un homomorphisme continu, de G dans lui même, k' tel que $k\circ k'=k'\circ k=i_G$. Pour v nous choisirons l'homomorphisme $\gamma\in\widehat{G}\mapsto(0,{}^tk'(\gamma))\in\widehat{G}\times\widehat{G}$. Nous nous proposons donc de définir toutes les f.a.c. stationnaires $(X'_{(g_1,g_2)})_{(g_1,g_2)\in G\times G}$ telles que $(X'_{(l(g),k(g))})_{g\in G}=(X_g)_{g\in G}$. Le résultat précédent nous permet d'obtenir le

Corollaire 3.2. *Si $\{V_g;\,g\in G\}$ est le groupe des opérateurs unitaires de H déduit d'une m.s. δ, sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour H, qui commute avec une m.s. ε, sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour H, compatible avec la m.a. Z, alors $(V_{k(g_1)-l(g_2)}(X_{k'(g_2)}))_{(g_1,g_2)\in G\times G}$ est une f.a.c. stationnaire solution. Toutes les solutions sont de ce type.*

Démonstration. Pour la première partie de ce résultat on utilise le théorème précédent en choisissant $\alpha=v(\varepsilon)$ et $\beta={}^th_1(\delta)$, où h_1 est l'homomorphime $(g_1,g_2)\in G\times G\mapsto k(g_1)-l(g_2)\in G$. Ensuite il suffit de remarquer que si k'' désigne l'homomorphisme $g\in G\mapsto(k'(g),0)\in G\times G$, et $\{V_g;\,g\in G\}$ le groupe des opérateurs unitaire déduit de ${}^tk''(\beta)$, alors $\{V_{k(g_1)-l(g_2)},\,(g_1,g_2)\in G\times G\}$ est le groupe des opérateurs unitaires déduit de β (car ${}^th(\beta)=\varepsilon_{\widehat{G}}$). En ce qui concerne la réciproque, de l'existence d'une solution on déduit les m.s. α et β, les m.s. ε et δ sont alors obtenues grâce aux relations $\varepsilon={}^th(\alpha)$ et $\delta={}^tk''(\beta)$. Pour conclure on utilise à nouveau la remarque faite précédemment au sujet de $\{V_g;\,g\in G\}$. □

Lorsque $k=i_G$ et $l=i_G$ (resp. $k=i_G$ et $l=0$) nous pouvons ainsi trouver, d'une façon exhaustive, toute les f.a.c. stationnaires $(X'_{(g_1,g_2)})_{(g_1,g_2)\in G\times G}$ telles que $(X'_{(g,g)})_{g\in G}=(X_g)_{g\in G}$ (resp. $(X'_{(0,g)})_{g\in G}=(X_g)_{g\in G}$).

Enfin étant donné une f.a.c. stationnaire $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, de m.a. associée Z, si nous appelons solution toute f.a.c. stationnaire $(X'_{(t_1,t_2)})_{(t_1,t_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ telle que $(X'_{(bt,at)})_{t\in\mathbb{R}}=(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, (a,b) appartenant à $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, nous pouvons énoncer le

Corollaire 3.3. *Si $\{V_t;\,t\in\mathbb{R}\}$ est le groupe des opérateurs unitaires de H déduit d'une m.s. δ, sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ pour H, qui commute avec une m.s. ε, sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ pour H, compatible avec la m.a. Z, alors $(V_{at_1-bt_2}(X_{\frac{1}{a}t_2}))_{(t_1,t_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ est une f.a.c. stationnaire solution. Toutes les solutions sont de ce type.*

4. Perspectives

Il serait intéressant d'examiner la forme des solutions, de l'équation $X'\circ h=X$, lorsqu'on fait une hypothèse de normalité, d'autant plus que l'estimation des différents éléments intervenant dans l'expression de la solution générale serait, vraisemblablement, facilitée.

Le problème peut se généraliser de la façon suivante : étant donné p processus $(X^1_g)_{g\in G},\ldots,(X^p_g)_{g\in G}$ et p endomorphismes $h^1,\ldots,h^p$, définir tous les processus $(X'_{g'})_{g'\in G'}$ tels que $X'_{h^i(g)}=X^i_g$ pour tout (g,i) de $G\times\{1,\ldots,p\}$. On pourrait de la sorte définir un champ aléatoire connu dans plusieurs directions.

Références

[1] W. Arveson, A Short Course on Spectral Theory, Springer, New York, 2001.

[2] R. Azencot, D. Dacunha-Castelle, Séries d'observations irrégulières, Masson, Paris, 1984.

[3] A. Boudou, Interpolation de processus stationnaire, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 1021–1024.

[4] A. Boudou, Y. Romain, On spectral and random measures associated to discrete and continuous-time processes, Statist. Probab. Lett. 59 (2002) 145–157.