

Mathematical Physics

# Unitary reduction for the two-dimensional Schrödinger operator with strong magnetic field

Andrei Eckstein

*Institut Galilée, Département de Mathématiques, Université Paris 13, 99, avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse, France*

Received 10 March 2007; accepted 3 April 2007

Available online 29 May 2007

Presented by Jean-Michel Bony

## Abstract

The spectrum of the two-dimensional Schrödinger operator with strong magnetic field and electric potential is contained in a union of intervals centered on the Landau levels. The study of the spectrum in any of these intervals is reduced by unitary equivalence to the study of a one-dimensional operator. We give a precise description of this operator in the case when the electric potential is periodic and analytic in a strip. **To cite this article:** A. Eckstein, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007)*.

© 2007 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

## Résumé

**Réduction unitaire pour l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique fort en dimension deux.** Le spectre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique fort et potentiel électrique en dimension deux est contenu dans une union d'intervalles autour des niveaux de Landau. L'étude de la partie du spectre contenue dans chacun de ces intervalles est réduite par une conjugaison unitaire à l'étude d'un opérateur en dimension un. On donne une description très précise de cet opérateur dans le cas où le potentiel électrique est périodique et analytique dans une bande. **Pour citer cet article :** A. Eckstein, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007)*.

© 2007 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

## Version française abrégée

On considère l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant et potentiel électrique

$$P_{B,V} = D_{x_1}^2 + (D_{x_2} + Bx_1)^2 + V(x_1, x_2),$$

où  $B > 0$  est le champ magnétique et  $V \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  est le potentiel électrique. On se place dans le contexte semi-classique  $B \rightarrow \infty$  (champ magnétique fort) et on se propose d'étudier la nature du spectre de cet opérateur. Notre approche nous a été inspirée par deux articles de B. Helffer et J. Sjöstrand dans lesquels les auteurs étudient le spectre de  $P_{B,V}$  en tant qu'ensemble. Dans [5] l'étude du spectre est réduite à celui d'un opérateur pseudodifférentiel (OPD) en dimension un dont le symbole principal est  $V(y, \eta)$ . L'étude d'un tel opérateur est fait dans [4] pour le cas d'un potentiel  $V$  « proche » de  $\cos x_1 + \cos x_2$ . Suivant la démarche de ces deux articles, nous avons dans [3] réduit dans

*E-mail addresses:* [eckstein@math.univ-paris13.fr](mailto:eckstein@math.univ-paris13.fr), [aeksteinul@yahoo.com](mailto:aeksteinul@yahoo.com).

une première partie l'étude du spectre de  $P_{B,V}$  à celui d'un opérateur en dimension un. Afin de préserver la nature du spectre, cette réduction est faite par des conjugaisons unitaires et en utilisant une méthode différente de celle de [5]. Puis dans une deuxième partie nous étudions la nature du spectre de l'opérateur réduit.

Cette Note est dédiée uniquement à la première partie. Des résultats partiels concernant la nature du spectre dans le cas d'un potentiel périodique ainsi que les preuves complètes des résultats présentés dans cette Note se trouvent dans [3].

Un résultat connu (Théorème 1.1 dans [5]) réduit, par une équivalence unitaire, l'étude du spectre de  $P_{B,V}$ , à l'étude du spectre de l'opérateur  $\check{P}_{B,V} = B(D_x^2 + x^2) + V^W(y + B^{-1/2}x, B^{-1}D_y - B^{-1/2}D_x)$ , où, en posant  $h = \frac{1}{B} \rightarrow 0$ ,  $V^W$  est le  $h$ -quantifié de Weyl du symbole  $V$  défini par (3). Cet opérateur est une petite perturbation de  $B(D_x^2 + x^2)$  dont le spectre est constitué des valeurs propres  $(2n + 1)B$ , les niveaux de Landau. On obtient que le spectre de  $P_{B,V}$  est contenu dans une union d'intervalles centrés dans  $(2n + 1)B$ . Dans la suite on fixe  $n = N$  et on renormalise : au lieu de chercher la partie du spectre de  $\check{P}_{B,V}$  dans l'intervalle  $I_{N,B} = [(2N + 1)B - \sup |V|, (2N + 1)B + \sup |V|]$ , on cherche la partie du spectre de l'opérateur  $H_{h,V} = h\check{P}_{B,V}$  dans l'intervalle  $[2N + 1/2, 2N + 3/2]$ . Cet opérateur est une petite perturbation de l'oscillateur harmonique  $D_x^2 + x^2$  dont le spectre est constitué des valeurs propres  $\lambda_n = 2n + 1$ . On note par  $\mathcal{H}_n \subset L^2(\mathbb{R}^2)$  l'espace propre correspondant à  $\lambda_n$ . On a que  $\mathcal{H}_n = h_n(x) \otimes L^2(\mathbb{R}_y)$  où  $h_n(x) = (\partial_x - x)^n e^{-x^2/2}$ . Pour chercher la partie du spectre de  $H_{h,V}$  située près de  $\lambda_N$ , on décompose  $L^2(\mathbb{R}^2) = \mathcal{H}_N \oplus \mathcal{H}_N^\perp$  et on écrit

$$H_{h,V} = \begin{pmatrix} \lambda_N I_{\mathcal{H}_N} & 0 \\ 0 & \tilde{D}_N \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \bar{v}_0 & v_0 \\ v_0^* & \tilde{v}_0 \end{pmatrix}.$$

On va diagonaliser cette matrice. Pour cela, on construit (Théorème 3.1) une suite d'opérateurs unitaires  $(U_n)_{n \geq 1}$  t.q. la conjugaison par l'opérateur  $U_n$  «élimine» la partie hors-diagonale de taille  $h^n$ . Appliqués successivement, ces opérateurs «éliminent» les parties hors-diagonale de taille  $h, h^2, h^3, \dots$ . L'estimation sur le reste  $R_n$  permet de montrer (Théorème 3.2) qu'on peut passer à la limite et obtenir l'opérateur unitaire qui diagonalise la matrice comme étant  $U = \lim_{n \rightarrow \infty} U_1 U_2 \cdots U_n$ . Le fait que  $H_{h,V}$  soit unitairement équivalent à un opérateur de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_N I_{\mathcal{H}_N} & 0 \\ 0 & \tilde{D}_N \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \bar{v}_\infty & 0 \\ 0 & \tilde{v}_\infty \end{pmatrix}$$

implique que si on note  $\bar{V}$  l'opérateur  $\bar{V} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  défini par  $(\bar{V}f)(y)h_N(x) = \bar{v}_\infty(f(y)h_N(x))$  (qui est unitairement équivalent à  $\bar{v}_\infty$ ), alors l'étude du spectre de  $H_{h,V}$  près de  $\lambda_N$  est réduit à l'étude du spectre de  $\bar{V}$ . Le résultat précis est formulé dans le Théorème 3.3.

Ce résultat est valable pour une classe très large de potentiels. Dans la suite on va donner une description très précise de cet opérateur dans le cas d'un potentiel électrique  $V$  périodique. Toutefois, on s'attend à ce que, même dans le cas général, l'opérateur  $\bar{V}$  soit un OPD dont le symbole principal est  $V$ .

Dans le cas où  $V$  est  $2\pi$ -périodique dans chaque variable et analytique dans la bande  $\mathcal{D}_R \times \mathcal{D}_r$  où  $\mathcal{D}_a = \{x \in \mathbb{C}; |\operatorname{Im} x| < a\}$ , on obtient une caractérisation très précise de  $\bar{V}$  :  $\bar{V}$  est un OPD classique, dont le symbole principal est  $V$  et dont le symbole hérite de toutes les propriétés de  $V$  : périodicité, analyticité et, si c'était le cas pour  $V$ , symétrie (voir les Théorèmes 4.1 et 4.2).

## 1. Introduction

We consider the two-dimensional Schrödinger operator with constant magnetic field  $B$  and electric potential  $V$ :

$$P_{B,V} = D_{x_1}^2 + (D_{x_2} + Bx_1)^2 + V(x_1, x_2), \quad (1)$$

where  $V \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^2) = \{V \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}); |D_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \forall x \in \mathbb{R}^2\}$ .

Our goal is to study the nature of the spectrum of  $P_{B,V}$  in the semi-classical limit  $B \rightarrow \infty$  (*strong magnetic field*). In our approach we were inspired by two papers by B. Helffer and J. Sjöstrand in which the authors study the spectrum of  $P_{B,V}$  as a set. In [5] the study of the spectrum of  $P_{B,V}$  is reduced to that of a one-dimensional pseudodifferential operator (PDO) whose principal symbol is  $V(y, \eta)$ . The study of the geometry of part of the spectrum of such an operator is done in [4] for the case in which  $V(x_1, x_2)$  is "close" to  $\cos x_1 + \cos x_2$ . Following the approach of Helffer and Sjöstrand, in the first part of [3] we have reduced the study of the spectrum of  $P_{B,V}$  to that of a one-dimensional operator.

In order to preserve the nature of the spectrum, this reduction is made by unitary conjugation. Our methods are quite different from those used in [5]. In the second part of [3] we study the nature of the spectrum of the reduced operator.

This Note is dedicated to the first part only. Some partial results concerning the spectrum of the PDO in the case of periodic  $V$  as well as the complete proofs of the results below can be found in [3].

### 2. Semi-classical setting

A frequently used unitary conjugation (see for example Theorem 1.1 in [5]) reduces the study to that of the operator

$$\check{P}_{B,V} = B(D_x^2 + x^2) + V^W(y + B^{-1/2}x, B^{-1}D_y - B^{-1/2}D_x), \tag{2}$$

where, by putting  $h = \frac{1}{B} \rightarrow 0$ ,  $V^W$  is the *Weyl Quantized* of the symbol  $V$  defined, as in [2] (Chapter 7), by:

$$\begin{aligned} & \left( V^W(y + h^{1/2}x, hD_y - h^{1/2}D_x)u \right)(x, y) \\ &= \frac{1}{4\pi^2 h} \int_{\mathbb{R}^4} e^{i(x-x')\xi} e^{i(y-y')\eta/h} V\left(\frac{y+y'}{2} + h^{1/2}\frac{x+x'}{2}, \eta - h^{1/2}\xi\right) u(x', y') dx' dy' d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{3}$$

The operator  $\check{P}_{B,V}$  is a small perturbation of the operator  $B(D_x^2 + x^2)$  whose spectrum consists of the eigenvalues  $(2n + 1)B$ , the Landau levels. Thus we obtain that the spectrum of  $\check{P}_{B,V}$  is contained in a union of intervals centered on the Landau levels:  $\sigma(\check{P}_{B,V}) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_{n,B}$  where  $I_{n,B} = [(2n + 1)B - \sup|V|, (2n + 1)B + \sup|V|]$ . Next, we fix

a  $\lambda_N$  and we renormalize: instead of looking for the part of the spectrum of  $\check{P}_{B,V}$  contained in  $I_{N,B}$ , we look for the part of the spectrum of the operator  $H_{h,V} = h\check{P}_{B,V}$  lying in the interval  $[2N + 1/2, 2N + 3/2]$ .  $H_{h,V}$  is a small perturbation of the harmonic oscillator  $H_{h,0} = D_x^2 + x^2$  whose spectrum consists of the eigenfunctions  $\lambda_n = 2n + 1$ . The eigenspace associated with  $\lambda_n$  is  $\mathcal{H}_n = h_n \otimes L^2(\mathbb{R}_y)$  where  $h_n(x) = (\partial_x - x)^n e^{-x^2/2}$  is the eigenfunction with  $\lambda_n$  of  $H_{h,0}$  seen as a one-dimensional operator. Thus we can see that the spectrum of  $H_{h,V}$  is contained in a union of small intervals centered on  $\lambda_n$ . In order to search for the part of the spectrum of  $H_{h,V}$  close to  $\lambda_N$ , we decompose  $L^2(\mathbb{R}^2) = \mathcal{H}_N \oplus \mathcal{H}_N^\perp$  and we write

$$H_{h,V} = \begin{pmatrix} \lambda_N I_{\mathcal{H}_N} & 0 \\ 0 & \tilde{D}_N \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \tilde{v}_0 & v_0 \\ v_0^* & \tilde{v}_0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

where  $\tilde{D}_N(\sum_{k \neq N} h_k(x) f_k(y)) := \sum_{k \neq N} \lambda_k h_k(x) f_k(y)$ .

### 3. Unitary equivalence

In order to examine the part of the spectrum close to  $\lambda_N$  we diagonalize the matrix above. So, the goal of this section is to construct a unitary operator  $U$  such that

$$U^{-1} H_{h,V} U = \begin{pmatrix} \lambda_N I_{\mathcal{H}_N} & 0 \\ 0 & \tilde{D}_N \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \tilde{v}_\infty & 0 \\ 0 & \tilde{v}_\infty \end{pmatrix}.$$

This is done in two steps:

**Step 1:** We construct by induction a sequence of unitary operators  $U_n, n \geq 1$ , such that conjugation by  $U_n$  eliminates the off-diagonal part of size  $h^n$ . Applied successively, these operators allow us to get rid of the off-diagonal parts of sizes  $h, h^2, h^3, \dots$ . Each time, the price to pay is the modification of the diagonal part by a term of size  $h^n$ .

**Step 2:** We show that we can pass to the limit when  $n \rightarrow \infty$  and obtain  $U$  as the limit  $U = \lim_{n \rightarrow \infty} U_1 U_2 \dots U_n$ .

*Step 1: The induction*

Put  $H_0 = H_{h,V}$ . We define inductively the sequence of operators  $H_n$  as  $H_n := U_n^{-1} H_{n-1} U_n$  where the operator  $U_n$  is given by the following theorem:

**Theorem 3.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall h \in ]0, h_0[$  there exists a unitary operator  $U_n$  of the form

$$U_n = \exp \left( h^n \begin{pmatrix} 0 & u_n \\ -u_n^* & 0 \end{pmatrix} \right) \tag{5}$$

( $u_n$  bounded) such that  $H_n = U_n^{-1} H_{n-1} U_n$  is of the form

$$H_n = \begin{pmatrix} \lambda_N I_{\mathcal{H}_N} & 0 \\ 0 & \tilde{D}_N \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \tilde{v}_n & 0 \\ 0 & \tilde{v}_n \end{pmatrix} + h^{n+1} \begin{pmatrix} 0 & v_n \\ v_n^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

where:

1.  $v_n$  is a bounded operator from  $\mathcal{H}_N^\perp$  to  $\mathcal{H}_N$ ,  $\tilde{v}_n$  is bounded from  $\mathcal{H}_N$  to  $\mathcal{H}_N$ ,  $\tilde{v}_n$  is bounded from  $\mathcal{H}_N^\perp$  to  $\mathcal{H}_N^\perp$ ,
2.  $\tilde{v}_n, \tilde{v}_n$  are self-adjoint,
3.  $\|R_n\| \leq C^n h^{n+1}$ .

(The remainder  $R_n$  contains the sum of the off-diagonal part and the variation of the diagonal one at the  $n$ -th step of the induction. Constants  $C$  and  $h_0$  are defined precisely in [3]. They depend on  $N$  so the results above are not uniform with respect to  $N$ .)

**Sketch of the proof.** We search for a  $u_n$  such that  $U_n$  satisfy the formula  $H_n = U_n^{-1} H_{n-1} U_n$ . By substituting  $U_n$  in the formula above, by expanding in powers of  $h$  and by imposing the condition that the off-diagonal part of size  $h^n$  is equal to 0, we obtain an equation that  $u_n$  must satisfy.

This equation yields  $u_n = v_{n-1}(\tilde{D}_N - \lambda_N)^{-1}$  and  $u_n$  is obviously a bounded operator.

Next we compute  $v_n, \tilde{v}_n$  and  $\tilde{v}_n$  and, by using that  $\|R_{n-1}\| \leq C^{n-1} h^n$ , we obtain that these operators satisfy the inductive hypothesis 1, 2, 3.  $\square$

*Step 2: Passage to the limit*

We use the estimation on the remainder  $R_n$  to show that we can pass to the limit. We obtain:

**Theorem 3.2.** *The operator  $H_{h,V}$  is unitarily equivalent to an operator of the form*

$$H_{h,V}^\infty = \begin{pmatrix} \lambda_N I_{\mathcal{H}_N} & 0 \\ 0 & \tilde{D}_N \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \tilde{v}_\infty & 0 \\ 0 & \tilde{v}_\infty \end{pmatrix}, \quad (7)$$

where  $\tilde{v}_\infty$  and  $\tilde{v}_\infty$  are bounded and self-adjoint.

*Conclusion of the 3rd section*

Since it acts on  $\mathcal{H}_N$ , it is clear that  $\tilde{v}_\infty$  is essentially a one-dimensional operator. From now on we'll work with  $\bar{V} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  defined by  $(\bar{V}f)(y)h_N(x) = \tilde{v}_\infty(f(y)h_N(x))$  ( $\bar{V}$  is really one-dimensional and unitarily equivalent to  $\tilde{v}_\infty$ ).

As a corollary of the two theorems above we obtain:

**Theorem 3.3 (reduction).**

$$\lambda \in \sigma(H_{h,V}) \cap [2N + 1/2, 2N + 3/2] \iff -\lambda_N + h\lambda \in \sigma(\bar{V}).$$

Moreover, the nature of the part of the spectrum of  $H_{h,V}$  contained in  $[2N + 1/2, 2N + 3/2]$  is the same as that of  $\bar{V}$ .

This theorem works for a very large class of potentials. In the next section we give a precise description of the operator  $\bar{V}$  in the case when the potential  $V$  is periodic and analytic. However we expect that even in the general case the operator  $\bar{V}$  is a PDO whose principal symbol is  $V$ .

#### 4. Description of the operator $\bar{V}$ in the periodic case

As  $\tilde{v}_\infty$  is known only as the limit of some convergent sequence, in order to be able to give a description of the nature of its spectrum we need to know its properties. We impose two further hypothesis on the electric potential  $V$ :

**(h.1)**  $V$  is  $2\pi$ -periodic in each of its variables,

**(h.2)**  $V$  is analytic in the strip  $\mathcal{D}_R \times \mathcal{D}_r$ , where  $\mathcal{D}_a = \{x \in \mathbb{C}; |\operatorname{Im} x| < a\}$ .

The main results of the fourth section allow us to give a precise description of the properties of  $\bar{V}$ :

**Theorem 4.1.** (Description of  $\bar{V}$ )

$\bar{V}$  is a pseudodifferential operator whose symbol  $\bar{v} \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^2)$  is classical,  $2\pi$ -periodic, analytic in the strip  $\mathcal{D}_R \times \mathcal{D}_r$ . The principal symbol of  $\bar{V}$  is  $V$  and the subprincipal symbol is given by  $\frac{2N+1}{4} \text{tr Hess } V$ .

**Sketch of the proof.** As in [1], we introduce  $\mathcal{A}$ , the algebra of the pseudodifferential operators whose symbol satisfies (h.1) and (h.2). Then we follow the construction of  $\bar{V}$ . First we show that hypothesis (h.1) and (h.2) imply that  $\bar{v}_0 \in \mathcal{A}$ . Then, by induction, we show that  $\bar{v}_n \in \mathcal{A}$ ,  $\forall n$ . Finally we get  $\bar{v}_\infty \in \mathcal{A}$ .  $\square$

This result is the analogue of Theorem 0.1 in [5]. The gain is that, having obtained  $\bar{V}$  by unitary reductions, here the nature of the spectrum is preserved.

*The case of symmetric potential*

If the potential  $V$  satisfies an additional symmetry, then the full symbol of  $\bar{V}$  inherits this symmetry. More precisely, we obtain:

**Theorem 4.2.**

- (a) If  $V(x_1, -x_2) = V(x_1, x_2)$ ,  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  then  $\bar{v}(y, -\eta) = \bar{v}(y, \eta)$ ,  $\forall y, \eta \in \mathbb{R}$ .  
 (b) If  $V(-x_1, x_2) = V(x_1, x_2)$ ,  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  then  $\bar{v}(-y, \eta) = \bar{v}(y, \eta)$ ,  $\forall y, \eta \in \mathbb{R}$ .

**Sketch of the proof.** Again we follow the construction of  $\bar{v}$ . We use the following well-known characterization of symmetry: “a symbol of a PDO is symmetric iff the corresponding PDO commutes with a certain operator” ( $(\Gamma u)(x) = u(x)$  for the first symmetry and  $(Su)(x) = u(-x)$  for the second one). See for example Theorem 0.3 in [5] for this result. Note that we do not use (h.1) and (h.2) in the proof.  $\square$

**5. Conclusion and perspectives**

1. In the periodic case the above results constitute an important step towards studying the nature of the spectrum in some convenient cases.
2. Since the reduction theorem does not need periodicity, it can be used for non-periodic potentials. All we need is to be able to study the spectrum of a PDO known only by its principal symbol.

**Acknowledgements**

I am deeply grateful to Alain Grigis for his constant attention to this work, his help and his sensible suggestions and remarks. I would also like to thank Alexander Fedotov for bringing this problem in my attention and for many interesting and helpful discussions.

**References**

[1] J. Bellissard, R. Lima, E. Scoppola, Localisation in  $\nu$ -dimensional incommensurate structures, *Comm. Math. Phys.* 88 (1983) 465–477.  
 [2] M. Dimassi, J. Sjöstrand, *Spectral Asymptotics in the Semi-Classical Limit*, London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 268, Cambridge University Press, 2000.  
 [3] A. Eckstein, *Etude spectrale d’un opérateur de Schrödinger périodique avec champ magnétique fort en dimension deux*, Thèse de doctorat de l’Université Paris 13, 2006.  
 [4] B. Helffer, J. Sjöstrand, Analyse semi-classique pour l’équation de Harper (avec application à l’étude de l’équation de Schrödinger avec champ magnétique), *Mémoires de la S.M.F.* 34 116 (4) (1988).  
 [5] B. Helffer, J. Sjöstrand, Équation de Schrödinger avec champ magnétique et équation de Harper, in: *Lecture Notes in Physics*, vol. 345, 1998, pp. 118–198.