Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 669–672
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des nombres

Algèbres de restrictions des formes modulaires de Hilbert

Najib Ouled Azaiez

Max Planck Institute fur Mathematik, Vivatsgasse 7, Bonn 53111, Germany

Reçu le 11 juillet 2006 ; accepté après révision le 18 avril 2007

Disponible sur Internet le 25 mai 2007

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Soit $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ un sous-groupe discret de covolume fini. On suppose que la courbe modulaire $\mathcal{H}/\Gamma$ se « plonge » dans une surface modulaire de Hilbert $\mathcal{H}^2/\Gamma_K$, où Γ_K est le groupe modulaire de Hilbert associé à un corps quadratique réel K. On définit une suite de restrictions $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des formes modulaires de Hilbert pour Γ_K aux formes modulaires pour Γ. Notons $M_{k_1,k_2}(\Gamma_K)$ l'espace des formes modulaires de Hilbert de poids (k_1,k_2) pour Γ_K. On démontre que $\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{N}}\rho_n(M_{k_1,k_2}(\Gamma_K))$ est un sous-espace stable par les crochets de Rankin–Cohen de l'espace $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} M_k(\Gamma)$ des formes modulaires pour Γ. ***Pour citer cet article : N. Ouled Azaiez, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abstract

Restrictions of Hilbert modular forms. Let $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ be a discrete subgroup of finite covolume. We suppose that the modular curve $\mathcal{H}/\Gamma$ is 'embedded' into a Hilbert modular surface $\mathcal{H}^2/\Gamma_K$, where Γ_K is the Hilbert modular group associated to a real quadratic field K. We define a sequence of restrictions $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of Hilbert modular forms for Γ_K to modular forms for Γ. We denote by $M_{k_1,k_2}(\Gamma_K)$ the space of Hilbert modular forms of weight (k_1,k_2) for Γ_K. We prove that $\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{N}}\rho_n(M_{k_1,k_2}(\Gamma_K))$ is a subspace closed under Rankin–Cohen brackets of the space $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} M_k(\Gamma)$ of modular forms for Γ. ***To cite this article: N. Ouled Azaiez, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

1. Introduction

Les cycles de Hirzebruch–Zagier sont les *images* des courbes modulaires « plongées » dans les surfaces modulaires de Hilbert. Toute composante irréductible d'un cycle de Hirzebruch–Zagier est image dans un quotient $\mathcal{H}^2/\Gamma_K$ d'une partie $\iota_{1,2}(\mathcal{H})$ de $\mathcal{H}^2$, où $\iota_{1,2}:\mathcal{H}\to\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ est un plongement défini par $z\mapsto(A_1.z, A_2.z)$ avec A_1, A_2 élements de $M(2,K)$ agissant sur $\mathcal{H}$ par homographie. Notons $\gamma'=\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ la matrice obtenue en conjugant dans K les coefficients de $\gamma=\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Soit $\Gamma\subset\Gamma_K$ un sous-groupe de matrices γ satisfaisant $\gamma A_1 = A_1\gamma$ et $\gamma' A_2 = A_2\gamma$. Un tel groupe agit sur $\mathcal{H}$ de manière compatible avec le plongement $\iota_{1,2}$. Cela implique que l'application $\mathcal{H}/\Gamma\to\mathcal{H}^2/\Gamma_K$ induite par $\iota_{1,2}$ est génériquement de degré 1, mais non nécessairement injective. On sait définir des restrictions simples des formes modulaires pour Γ_K aux formes modulaires pour Γ, pour plus de détails on peut voir [2] et [5]. On rappelle

Adresse e-mail : ouled@mpim-bonn.mpg.de.

1631-073X/$ – see front matter © 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2007.04.010

que Γ_K se plonge dans le groupe produit $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})\times\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ par $\alpha:\gamma\mapsto(\gamma,\gamma')$. Soit $\delta:\Gamma\to\Gamma_K$ le plongement diagonal. Il suit de la définition de Γ que l'application $\alpha\circ\delta:\Gamma\to\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})^2$ est un plongement qui coincide avec $\gamma\to(A_1\gamma A_1^{-1},A_2\gamma A_2^{-1})$. Dans la Proposition 2.2, le Théorème 4.1 et le Corollaire 4.2, nous disons qu'*un sous-groupe $\Gamma\subset\Gamma_K$ est associé à un couple de matrices $(A_1,A_2)\in M(2,K)\times M(2,K)$, si $(\gamma,\gamma')=(A_1\gamma A_1^{-1},A_2\gamma A_2^{-1})$ pour tout $\gamma\in\Gamma$.*

Dans cette Note, on définit des restrictions généralisées ρ_n des formes modulaires de Hilbert. On démontre que l'algèbre des restrictions est de Rankin–Cohen, c'est-à-dire stable par les crochets de Rankin–Cohen, on peut voir la Section 3.5 de [3] pour plus de détails. Le résultat principal est le Théorème 4.1. On introduit les restrictions généralisées et les autres outils nécessaires dans les deux Propositions 2.1, 2.2 suivantes.

2. Restrictions généralisées des formes modulaires de Hilbert

Soient $\mathbb{H}\mathrm{ol}(\mathcal{H}\times\mathcal{H})$ et $\mathbb{H}\mathrm{ol}(\mathcal{H})$ les espaces de fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ (respectivement sur $\mathcal{H}$) à valeurs complexes. Soit $\rho:\mathbb{H}\mathrm{ol}(\mathcal{H}\times\mathcal{H})\to\mathbb{H}\mathrm{ol}(\mathcal{H})$, la restriction diagonale définie par $\rho(F)(z)=F(z,z)$. Soient ∂_1 et ∂_2 les dérivations par rapport aux variables z_1 et $z_2\in\mathcal{H}$. Pour tout triplet (k,l,n) d'entiers, on définit sur $\mathbb{H}\mathrm{ol}(\mathcal{H}\times\mathcal{H})$ des opérateurs différentiels par

$$\mathrm{RC}_n^{k,l}(F)=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{k+n-1}{n-j}\binom{l+n-1}{j}\partial_1^j\partial_2^{n-j}(F),\quad \text{pour tout } F\in\mathbb{H}\mathrm{ol}(\mathcal{H}\times\mathcal{H}).$$

On définit $\rho_n^{k,l}=\rho\circ\mathrm{RC}_n^{k,l}$. Notons Γ_1 le groupe modulaire classique $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, et $M_k(\Gamma_1)$ respectivement $M_{k,l}(\Gamma_K)$ les espaces des formes modulaires de poids k pour Γ_1 respectivement de Hilbert de poids (k,l) pour Γ_K.

Proposition 2.1. *Pour tout triplet (n,k,l) d'entiers et pour tout corps quadratique réel K, l'opérateur $\rho_n^{k,l}$ induit une application* :

$$\rho_n^{k,l}:M_{k,l}(\Gamma_K)\longrightarrow M_{k+l+2n}(\Gamma_1).$$

Démonstration. Pour toute forme modulaire de Hilbert $F(\tau_1,\tau_2)\in M_{k,l}(\Gamma_K)$, on associe une série de Cohen–Kuznetsov

$$\widetilde{F}(\tau_1,\tau_2,X,Y)=\sum_{r,s\geqslant 0}\frac{\partial_1^r\partial_2^s(F)X^rY^s}{r!(r+k-1)!s!(s+l-1)!}.$$

Cette série vérifie l'équation fonctionnelle

$$\widetilde{F}\left(\gamma.\tau_1,\gamma'.\tau_2,\frac{X}{(c\tau_1+d)^2},\frac{Y}{(c'\tau_2+d')^2}\right)$$
$$=(c\tau_1+d)^k(c'\tau_2+d')^l\exp\bigl(cX/(c\tau_1+d)+c'Y/(c'\tau_2+d')\bigr)\widetilde{F}(\tau_1,\tau_2,X,Y),$$

pour tout $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_K$. Pour terminer, on utilise $\widetilde{F}(\tau,\tau,X,-X)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho_n^{k,l}(F)X^n}{(n+k-1)!(n+l-1)!}$ et le fait que $\gamma'=\gamma$ pour tout $\gamma\in\Gamma_1$. □

En utilisant des idées similaires, on démontre aussi :

Proposition 2.2. *Soit K un corps quadratique réel et Γ_K le groupe modulaire de Hilbert associé. Soient $(A_1,A_2)\in M(2,K)\times M(2,K)$ et $\Gamma\subset\Gamma_K$ un sous-groupe associé à ce couple. Alors l'opérateur défini par $\rho_{n;A_1,A_2}^{k,l}(F)=\rho_n^{k,l}(F\mid_{k,l}(A_1,A_2))$, induit une application* : $\rho_{n;A_1,A_2}^{k,l}:M_{k,l}(\Gamma_K)\to M_{k+l+2n}(\Gamma)$.

3. Crochets de Rankin–Cohen

On rappelle que les crochets de Rankin–Cohen sont définis sur $M_k(\Gamma)\otimes M_l(\Gamma)$, pour des sous-groupes discrets Γ de covolume fini de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, par

$$[f,g]_n=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{k+n-1}{n-j}\binom{l+n-1}{j}f^{(j)}g^{(n-j)}=\rho_n^{k,l}\big(f(z_1)g(z_2)\big),$$

où $f^{(j)}$ désigne la dérivée j-ème par rapport à z de f et même notation pour g, on peut voir [6] pour plus de détails. On a alors pour tout groupe $\Gamma\subset\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et pour tout entier n, un opérateur $[\cdot,\cdot]_n: M_k(\Gamma)\otimes M_l(\Gamma)\to M_{k+l+2n}(\Gamma)$. Ces opérateurs se généralisent aux produits tensoriels d'espaces de formes modulaires de Hilbert (cf. [1,4]). Dans le cas d'un corps quadratique réel K, pour tout couple $(n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2$, et pour tout couples (k_1,k_2) et (l_1,l_2) d'entiers, il existe un opérateur

$$[\cdot,\cdot]_{(n_1,n_2)}: M_{k_1,k_2}(\Gamma_K)\otimes M_{l_1,l_2}(\Gamma_K)\to M_{k_1+l_1+2n_1,k_2+l_2+2n_2}(\Gamma_K),\quad \text{induit par } \mathrm{RC}_{n_1}^{k_1,l_1}\otimes\mathrm{RC}_{n_2}^{k_2,l_2}.$$

4. Théorème de restriction

Voici le résultat principal de cette Note :

Théorème 4.1. *Soient K un corps quadratique réel et Γ_K le groupe modulaire de Hilbert associé. Soient $(A_1,A_2)\in M(2,K)\times M(2,K)$ et $\Gamma\subset\Gamma_K$ un sous-groupe associé à ce couple. On considère $(k,l,r,s,n,n_1,n_2)\in\mathbb{N}^7$. Pour tout couple (F,G) de formes modulaires de Hilbert pour Γ_K de poids respectifs (k,l) et (r,s), on a*

$$\big[\rho_{n_1;A_1,A_2}^{k,l}(F),\rho_{n_2;A_1,A_2}^{r,s}(G)\big]_n=\sum_{\substack{p,\,p_1,\,p_2\in\mathbb{N}\\ p+p_1+p_2=n+n_1+n_2}}(*)\,\rho_{p;A_1,A_2}^{k+r+2p_1,\,l+s+2p_2}\big([F,G]_{(p_1,p_2)}\big),$$

avec $(*)$ des nombres rationnels qui dépendent de k,l,r,s,n,n_1,n_2,p,p_1 et p_2.

On obtient le corollaire suivant du Théorème 4.1 :

Corollaire 4.2. *Soit K un corps quadratique réel et Γ_K le groupe modulaire de Hilbert associé. Soient $(A_1,A_2)\in M(2,K)\times M(2,K)$ et $\Gamma\subset\Gamma_K$ un sous-groupe associé à ce couple de matrices. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k,l}\rho_{n;A_1,A_2}^{k,l}(M_{k,l}(\Gamma_K))$ est une sous-algèbre stable par crochets de Rankin–Cohen de l'algèbre $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}}M_k(\Gamma)$ des formes modulaires pour Γ.*

Démonstration. Soient $k,l\in\mathbb{N}$. On définit une suite de polynômes homogènes de degré n dans $\mathbb{Q}[x,y]$ par :

$$R_n^{k,l}(x,y)=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{k+n-1}{n-j}\binom{l+n-1}{j}x^jy^{n-j},\tag{1}$$

de façon que $\mathrm{RC}_n^{k,l}=R_n^{k,l}(\partial_1,\partial_2)$, et un opérateur :

$$\begin{aligned}\Delta_{k,l}:\mathbb{Q}[x,y]&\longrightarrow\mathbb{Q}[x,y],\\ P&\longrightarrow\left(x\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial^2}{\partial y^2}+l\frac{\partial}{\partial y}\right)(P).\end{aligned}$$

Le lemme suivant donne une caractérisation de la suite des polynômes $R_n^{k,l}(x,y)$. On omet la démonstration simple de ce lemme :

Lemme 4.3. *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(k,l)\in\mathbb{Z}^2$, on a* $\ker(\Delta_{k,l})\cap\mathbb{Q}[x,y]_n=\mathbb{Q}\,.R_n^{k,l}(x,y)$.

Soit $k,l,r,s\in\mathbb{N}$. On introduit pour tout $N\in\mathbb{N}$, deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{Q}[x_1,y_1,x_2,y_2]_N$, en donnant leurs familles génératrices. Soient

(i) W_N^1 l'espace engendré par les polynômes

$$R_p^{k+r+2p_1,l+s+2p_2}(x_1+y_1,x_2+y_2)R_{p_1}^{k,r}(x_1,y_1)R_{p_2}^{l,s}(x_2,y_2)\quad (p+p_1+p_2=N).$$

(ii) W_N^2 l'espace engendré par les polynômes

$$R_n^{k+l+2n_1,r+s+2n_2}(x_1+x_2,y_1+y_2)R_{n_1}^{k,l}(x_1,x_2)R_{n_2}^{r,s}(y_1,y_2)\quad (n+n_1+n_2=N).$$

On a alors $W_N^1=W_N^2$. Pour démontrer cette égalité on définit un troisième sous-espace de $\mathbb{Q}[x_1,y_1,x_2,y_2]_N$,

$$W_N=\ker(\Delta_{k,x_1}+\Delta_{r,y_1}+\Delta_{l,x_2}+\Delta_{s,y_2}).$$

En utilisant le Lemme 4.3, on démontre les propriétés suivantes :

(a) $W_N^1\subset W_N$.
(b) $W_N^2\subset W_N$.

En spécialisant les variables (x_1,y_1,x_2,y_2) en $(x-y,y,t,-t)$, on démontre que :

(c) $\dim W_N^1=\binom{N+2}{2}$.
(d) $\dim W_N^2=\binom{N+2}{2}$.

En utilisant le fait que W_N est isomorphe à $\mathbb{Q}[x_1,y_1,x_2]_N$ par $P\to P(x_1,y_1,x_2,0)$, pour tout $P\in W_N$, on déduit (e) $\dim W_N=\binom{N+2}{2}$. Finalement, (a)–(e) impliquent $W_N^1=W_N=W_N^2$.

En spécialisant les variables x_1,y_1,x_2,y_2 en des opérateurs de dérivation $\partial_1,\partial_1',\partial_2,\partial_2'$ par rapport à des variables z_1,z_1',z_2,z_2', et en écrivant F comme fonction des variables z_1,z_2 et G comme fonctions des variables z_1',z_2', on obtient que

$$\begin{aligned}&\big[\rho_{n_1;A_1,A_2}^{k,l}(F),\rho_{n_2;A_1,A_2}^{r,s}(G)\big]_n(z)=R_n^{k+l+2n_1,r+s+2n_2}(\partial_1+\partial_2,\partial_1'+\partial_2')R_{n_1}^{k,l}(\partial_1,\partial_2)\\&\quad\times R_{n_2}^{r,s}(\partial_1',\partial_2')\big(F|_{k,l}(A_1,A_2)(z_1,z_2)G|_{r,s}(A_1,A_2)(z_1',z_2')\big)|_{z_1=z_2=z_1'=z_2'=z}.\\&\rho_{p,;A_1,A_2}^{k+r+2p_1,l+s+2p_2}\big([F,G]_{(p_1,p_2)}\big)(z)=R_p^{k+r+2p_1,l+s+2p_2}(\partial_1+\partial_1',\partial_2+\partial_2')R_{p_1}^{k,r}(\partial_1,\partial_1')\\&\quad\times R_{p_2}^{l,s}(\partial_2,\partial_2')(FG)|_{k,l,r,s}(A_1,A_2,A_1,A_2)(z_1,z_2,z_1',z_2')|_{z_1=z_2=z_1'=z_2'=z}.\end{aligned}$$

En utilisant l'égalité des espaces W_N^1 et W_N^2, on déduit le Théorème 4.1. □

Références

[1] Y. Choie, H. Kim, O. Richter, Differential operators on Hilbert modular forms, J. Number Theory 122 (1) (2007) 25–36.
[2] H. Cohen, A lifting of modular forms in one variable to Hilbert modular forms in two variables, in: J.P. Serre, D. Zagier (Eds.), Modular Functions of One Variable, VI, Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, 1976, in: Lecture Notes in Math., vol. 627, Springer, Berlin, 1976, pp. 175–196.
[3] N. Ouled Azaiez, Formes quasi-modulaires sur des groupes modulaires co-compacts et restrictions des formes modulaires de Hilbert aux courbes modulaires, Thèse de Doctorat, Université P. et M. Curie, 2005.
[4] F. Pellarin, Introduction aux formes modulaires de Hilbert et à leur propriétés différentielles, in : Formes modulaires et transcendance, in : Sémin. Congr., vol. 12, SMF, Paris, 2005, pp. 215–269.
[5] G. Van der Geer, Hilbert Modular Surfaces, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
[6] D. Zagier, Modular forms and differential operators, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 104 (1) (1994) 57–75.