Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 231–234
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse fonctionnelle

Construction d'opérateurs hypercycliques ne vérifiant pas le critère d'hypercyclicité

Frédéric Bayart, Étienne Matheron

Laboratoire bordelais d'analyse et de géométrie, UMR 5467, Université Bordeaux 1, 351, cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France

Reçu le 15 novembre 2006 ; accepté après révision le 12 décembre 2006

Disponible sur Internet le 25 janvier 2007

Présenté par Gilles Pisier

Résumé

On prouve l'existence d'opérateurs hypercycliques qui ne vérifient pas le critère d'hypercyclicité sur les espaces $\ell^p(\mathbb{N})$ et $c_0(\mathbb{N})$. La construction est inspirée de la solution récente au « problème de Herrero » proposée par M. De La Rosa et C. Read. ***Pour citer cet article : F. Bayart, É. Matheron, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abstract

Construction of hypercyclic operators failing the Hypercyclicity Criterion. We prove the existence of hypercyclic operators on $\ell^p(\mathbb{N})$ and $c_0(\mathbb{N})$ which do not satisfy the Hypercyclicity Criterion. Our construction is inspired by the recent solution to 'Herrero's Problem' proposed by M. De La Rosa and C. Read. ***To cite this article: F. Bayart, É. Matheron, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abridged English version

A continuous linear operator T on a Fréchet space X is said to be *hypercyclic* if there exists some vector $x \in X$ whose orbit $\{T^i(x);\ i \in \mathbb{N}\}$ is dense in X.

Very recently, M. De La Rosa and C. Read [4] solved a longstanding problem posed by D. Herrero [5] by constructing a Banach space X and a hypercyclic operator T on X such that the direct sum $T \oplus T$ is not hypercyclic. Equivalently (see [3]), T is a hypercyclic operator which does not satisfy the so-called *Hypercyclicity Criterion*.

It is not clear whether the Banach space X constructed in [4] can be identified with a 'classical' space. Using some key ideas of De La Rosa and Read, we were able to construct in [2] hypercyclic operators whose direct sum is not hypercyclic on a large class of Banach spaces, including Hilbert Space and ℓ^p spaces. Let us say that a linearly independent sequence $(e_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset X$ is *shift-admissible* if the linear operator S defined on $\text{span}\{e_i;\ i \in \mathbb{N}\}$ by $S(e_i) = e_{i+1}$ is continuous.

Adresses e-mail : Frederic.Bayart@math.u-bordeaux1.fr (F. Bayart), Etienne.Matheron@math.u-bordeaux1.fr (É. Matheron).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.12.010

Theorem 0.1. *Let X be a separable Banach space. Assume that X has a complemented subspace with a shift-admissible, normalized unconditional basis. Then there exists a hypercyclic operator on X whose direct sum is not hypercyclic.*

Corollary 0.2. *If X is a separable Banach space having a complemented subspace isomorphic to $c_0(\mathbb{N})$ or to some $\ell^p(\mathbb{N})$, then there exist hypercyclic operators on X failing the Hypercyclicity Criterion. In particular, such operators exist on Hilbert Space.*

We give here only a very short outline of proof. The details may be found in [2].

The first step is to show that one can assume from the beginning that the space X itself has a basis with the above properties. This is done with the help of the following lemma, which is a variant of a well-known result of S. Ansari [1]:

Lemma 0.3. *Let X_0, Y be two separable, infinite dimensional Banach spaces. If T_0 is a hypercyclic operator on X_0, then one can find an operator $R \in \mathcal{L}(Y)$ such that $T_0 \oplus R$ is hypercyclic on $X_0 \oplus Y$.*

So, let us assume that X has a shift-invariant, normalized unconditional basis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. We denote by c_{00} the linear span of the vectors e_i, $i \in \mathbb{N}$. Let $\mathbf{Q}$ be a countable dense subset of the scalar field $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, and let us choose an enumeration $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of all polynomials with coefficients in $\mathbf{Q}$, with $P_0 = 0$. Finally, let $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be an increasing sequence of integers, with $b_0 = 0$ and $b_n > \deg(P_n)$ for all $n \geqslant 1$.

Since $b_n > \deg(P_n)$, there exists a unique linear map $T : c_{00} \to c_{00}$ such that for all $n \geqslant 1$:

$$T(e_i) = 2e_{i+1} \quad \text{if } i \in [b_{n-1}, b_n - 2]; \tag{1}$$

$$T^{b_n}(e_0) = P_n(T)e_0 + \frac{1}{n+1} e_{b_n}. \tag{2}$$

These properties imply that one can write

$$T(e_{b_n - 1}) = \varepsilon_n e_{b_n} + f_n, \tag{3}$$

where $\varepsilon_n > 0$ and $f_n \in \mathrm{Vect}\{e_i;\ i < b_n\}$. In particular, we have $c_{00} = \mathrm{span}\{T^i(e_0);\ i \in \mathbb{N}\} := \mathbb{K}[T]e_0$.

The following lemma summarizes the two main steps of the proof:

Lemma 0.4. *If the sequence (b_n) is sufficiently fast increasing, then the following properties hold true.*

(a) *The sequence (ε_n) is bounded and $\sum_1^\infty \|f_n\|_1 < \infty$, where $\|\ \|_1$ is the ℓ^1-norm on c_{00}.*
(b) *Define a product on $c_{00} = \mathbb{K}[T]e_0$ by the identities $T^i(e_0) \cdot T^j(e_0) = T^{i+j}(e_0)$. Then one can find a nonzero linear form $\phi : c_{00} \to \mathbb{K}$ such that $\sum_{p,q} |\phi(e_p \cdot e_q)| < \infty$.*

It follows from (a) and the properties of (e_i) that the linear map T extends to a continuous linear operator on X, still denoted by T. By condition (2) above, the operator T is hypercyclic. Moreover, it follows from (b) that the map $(x, y) \mapsto \phi(x \cdot y)$ is continuous on $c_{00} \times c_{00}$, so that one can apply a result contained in [4] to conclude that $T \oplus T$ is not hypercyclic.

1. Introduction

Soit X un espace de Fréchet séparable, et notons $\mathcal{L}(X)$ l'espace des opérateurs linéaires continus sur X. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est dit *hypercyclique* s'il existe un vecteur $x \in X$ dont la T-orbite $\{T^i(x);\ i \in \mathbb{N}\}$ est dense dans X. Comme exemples classiques d'opérateurs hypercycliques, on peut citer l'opérateur de dérivation sur l'espace des fonctions entières $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, les opérateurs de translation non triviaux sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, et les opérateurs du type λB, où B est l'opérateur de décalage à gauche sur $\ell^2(\mathbb{N})$ et $|\lambda| > 1$.

Un moyen très efficace de vérifier qu'un opérateur est hypercyclique est le *critère d'hypercyclicité* isolé par C. Kitai [6]. Sous sa forme générale [3], ce critère s'énonce comme suit :

Critère d'hypercyclicité. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$. On suppose qu'il existe deux parties denses $D, D' \subset X$ et une suite strictement croissante d'entiers (n_k) telles que les propriétés suivantes soient vérifiées :*

(1) *La suite (T^{n_k}) converge simplement vers 0 sur D ;*
(2) *pour tout $z' \in D'$, il existe une suite $(x_k) \subset X$ tendant vers 0 telle que $T^{n_k}(x_k)$ tend vers z'.*

Alors l'opérateur T est hypercyclique.

J. Bès et A. Peris [3] ont montré qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ vérifie le critère d'hypercyclicité si et seulement si l'opérateur « somme directe » $T \oplus T \in \mathcal{L}(X \oplus X)$ est hypercyclique.

Très récemment, M. De La Rosa et C. Read [4] ont résolu un problème posé par D. Herrero [5] en construisant un espace de Banach X et un opérateur hypercyclique $T \in \mathcal{L}(X)$ tels que $T \oplus T$ n'est pas hypercyclique ; un tel opérateur ne vérifie donc pas le critère d'hypercyclicité.

L'espace de Banach construit dans [4] ne semble pas pouvoir être identifié à un espace « classique ». En s'inspirant des idées de [4], on établit dans [2] le résultat suivant. Convenons de dire qu'une famille libre $(e_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset X$ est *à décalage continu* si l'application linéaire S définie sur $\mathrm{Vect}\{e_i;\ i \in \mathbb{N}\}$ par les identités $S(e_i) = e_{i+1}$ est continue.

Théorème 1.1. *Soit X un espace de Banach séparable. On suppose que X possède un sous-espace complémenté admettant une base inconditionnelle normalisée $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ à décalage continu. Alors il existe un opérateur hypercyclique sur X dont la somme directe n'est pas hypercyclique.*

Corollaire 1.2. *Si X est un espace de Banach séparable contenant un sous-espace complémenté isomorphe à $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leqslant p < \infty$ ou à $c_0(\mathbb{N})$, alors il existe un opérateur hypercyclique sur X qui ne vérifie pas le critère d'hypercyclicité. En particulier, un tel opérateur existe sur l'espace de Hilbert.*

La présente Note ne contient qu'une esquisse de démonstration. Une preuve complète est en attente de publication [2].

2. Résumé de la preuve

Le lemme suivant, qui est une variante d'un résultat bien connu de S. Ansari [1], permet de se ramener au cas où l'espace X lui même possède une base inconditionnelle normalisée à décalage continu :

Lemme 2.1. *Soient X_0 et Y deux espaces de Banach séparables de dimension infinie. Si T_0 est un opérateur hypercyclique sur X_0, alors on peut trouver un opérateur $R \in \mathcal{L}(Y)$ tel que $T := T_0 \oplus R$ est hypercyclique sur $X := X_0 \oplus Y$.*

Soit maintenant $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base inconditionnelle normalisée de X à décalage continu, et notons c_{00} l'espace vectoriel engendré par les e_i. Soit $\mathbf{Q}$ une partie dénombrable dense du corps de base $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit (P_n) une énumération de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbf{Q}$, avec $P_0 = 0$. Enfin, soit (b_n) une suite strictement croissante d'entiers, avec $b_0 = 0$ et $b_n > \deg(P_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme $b_n > \deg(P_n)$ pour tout n, on voit facilement qu'il existe une unique application linéaire $T : c_{00} \to c_{00}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T(e_i) = 2e_{i+1} \quad \text{si } i \in [b_{n-1}, b_n - 2]\ ; \tag{4}$$

$$T^{b_n}(e_0) = P_n(T)e_0 + \frac{1}{n+1} e_{b_n}. \tag{5}$$

Ces propriétés imposent à $T(e_{b_n-1})$ d'être de la forme

$$T(e_{b_n-1}) = \varepsilon_n e_{b_n} + f_n, \tag{6}$$

où $\varepsilon_n > 0$ et $f_n \in \mathrm{Vect}\{e_i;\ i < b_n\}$. En particulier, on a $c_{00} = \mathrm{Vect}\{T^i(e_0);\ i \in \mathbb{N}\}$.

Notons $\|\cdot\|_1$ la norme ℓ^1 sur c_{00} : si $x = \sum_i x_i e_i$, alors $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$.

Lemme 2.2. *Si la suite* (b_n) *croît suffisamment rapidement, alors la suite* (ε_n) *est bornée et on a* $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$.

Il découle de ce lemme et des propriétés de la base (e_i) que si (b_n) croît suffisamment vite, alors l'application linéaire T est continue. On peut donc prolonger T en un opérateur linéaire continu sur X, que l'on note encore T. Comme on a $c_{00} = \mathrm{Vect}\{T^i(e_0);\ i \in \mathbb{N}\}$, il découle de (2) que T est hypercyclique.

Pour montrer que $T \oplus T$ n'est pas hypercyclique, on utilise le critère suivant, qui est contenu dans [4] :

Lemme 2.3. *Soit* F *un espace de Fréchet de dimension infinie, et soit* $R \in \mathcal{L}(F)$ *possédant un vecteur cyclique* f_0. *Munissons l'espace vectoriel* $\mathbb{K}[R]f_0 := \mathrm{Vect}\{R^i(f_0);\ i \in \mathbb{N}\}$ *du produit défini par les identités* $(R^i(f_0)) \cdot (R^j(f_0)) = R^{i+j}(f_0)$. *On suppose qu'il existe une forme linéaire non nulle* $\phi : \mathbb{K}[R]f_0 \to \mathbb{K}$ *telle que l'application* $(x, y) \mapsto \phi(x \cdot y)$ *soit continue sur* $\mathbb{K}[R]f_0 \times \mathbb{K}[R]f_0$. *Alors l'opérateur* $R \oplus R$ *n'est pas hypercyclique.*

Pour achever la preuve du théorème principal, il suffit donc de construire une forme linéaire non nulle $\phi : \mathbb{K}[T]e_0 \to \mathbb{K}$ vérifiant la propriété précédente.

On se donne pour cela un nombre $\varepsilon \in]0, 1[$, et on suppose désormais qu'on a $b_{n+1} \geqslant (2 + \varepsilon)b_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

On définit ϕ de la façon suivante. On pose $\phi(e_0) = 1$ et $\phi(e_i) = 0$ pour $i \in]0, b_1[$. Si $i \in [b_k, b_{k+1}[$ pour un certain entier $k \geqslant 1$, on pose

$$\phi(T^i e_0) = \begin{cases} \phi(P_k(T)T^{i-b_k} e_0) & \text{si } i \in \big[b_k, (1+\varepsilon)b_k\big[\cup \big[2b_k, (2+\varepsilon)b_k\big[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette définition a bien un sens car $\deg(P_k) + i - b_k < i$, de sorte que $\phi(T^i e_0)$ est bien défini si $\phi(T^j e_0)$ est déja connu pour tout $j < i$.

Lemme 2.4. *Si la suite* (b_n) *croît suffisamment vite, alors* $\sum_{p,q} |\phi(e_p \cdot e_q)| < \infty$.

Comme $\mathbb{K}[T]e_0 = c_{00}$, il découle de ce lemme que l'application $(x, y) \mapsto \phi(x \cdot y)$ est continue sur $\mathbb{K}[T]e_0 \times \mathbb{K}[T]e_0$ si (b_n) croît suffisamment rapidement. Ceci achève la preuve du théorème principal.

Références

[1] S. Ansari, Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces, J. Funct. Anal. 148 (1997) 384–390.
[2] F. Bayart, E. Matheron, Hypercyclic operators which do not satisfy the hypercyclicity criterion, Prépublication, 2006.
[3] J. Bès, A. Peris, Hereditarily hypercyclic operators, J. Funct. Anal. 167 (1999) 94–112.
[4] M. De La Rosa, C. Read, A hypercyclic operator whose direct sum is not hypercyclic, Prépublication, 2006.
[5] D.A. Herrero, Limits of hypercyclic and supercyclic operators, J. Funct. Anal. 99 (1991) 179–190.
[6] C. Kitai, Invariant closed sets of linear operators, PhD thesis, University of Toronto, 1982.