

Équations aux dérivées partielles
Une variante de la théorie de l'homogénéisation stochastique
des opérateurs elliptiques

Xavier Blanc ^a, Claude Le Bris ^b, Pierre-Louis Lions ^{c,d}

^a *Laboratoire J.-L. Lions, université Pierre et Marie Curie, boîte courrier, 187, 75252 Paris cedex 05, France*

^b *CERMICS, École nationale des ponts et chaussées, 77455 Champs sur Marne cedex, France*

^c *Collège de France, 11, place Marcelin Berthelot, 75231 Paris cedex 05, France*

^d *CEREMADE, université Paris Dauphine, place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris cedex 16, France*

Reçu le 18 mai 2006 ; accepté après révision le 26 septembre 2006

Disponible sur Internet le 7 novembre 2006

Présenté par Pierre-Louis Lions

Résumé

Nous introduisons dans cette Note un cadre stochastique différent du cadre « habituel » permettant d'effectuer l'homogénéisation d'opérateurs elliptiques linéaires ou non linéaires monotones. Ce cadre de travail est relié à des études que nous avons menées sur les limites de systèmes infinis de particules. *Pour citer cet article : X. Blanc et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.

Abstract

A variant of stochastic homogenization theory for elliptic operators. We introduce in this Note a stochastic setting allowing for the homogenization of elliptic operators. This setting is different from the usual stochastic setting, and is related to other works of ours studying infinite systems of stochastic particles. *To cite this article: X. Blanc et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.

Abridged English version

We study in this Note the homogenization of elliptic boundary problems in divergence form, when the coefficients are periodic (or stationary) functions composed with a given random diffeomorphism. More precisely, we study

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)\right)\nabla u\right) = f & \text{in } \mathcal{D}, \\ u = 0 & \text{on } \partial\mathcal{D}, \end{cases}$$

where the entries a_{ij} of the matrix A are periodic and, almost surely, Φ is a diffeomorphism from \mathbb{R}^d onto \mathbb{R}^d with a stationary gradient in the sense:

Adresses e-mail : blanc@ann.jussieu.fr (X. Blanc), lebris@cermics.enpc.fr (C. Le Bris), lions@ceremade.dauphine.fr (P.-L. Lions).

$$\nabla \Phi(x + k, \omega) = \nabla \Phi(x, \tau_k \omega),$$

for all $k \in \mathbb{Z}^d$, almost all $x \in \mathbb{R}^d$ and almost surely. The stochastic setting, along with the appropriate assumption on all the data of the problem, are made precise in the French version. This problem may be thought of as a homogenization problem set on a random geometry that is the deformation via the diffeomorphism Φ of a periodic reference problem. Related works in the literature are [1,6] and some of our own works dealing with the definition of the energy or infinite stochastic lattices [2,3]. Variants of the present stochastic setting will be considered in a forthcoming work [4].

We identify the homogenized problem (see Theorems 1.2 and 1.3 of the French version). We show that this homogenized problem enjoys the same divergence form structure as the original equation, and that the homogenized matrix can be explicitly determined (14) in terms of a uniquely defined corrector (12). We also provide various comments on, and extensions of, the above simplified linear setting.

1. Introduction

Nous étudions dans cette Note l'homogénéisation d'un problème aux limites elliptique sous forme divergence, dont les coefficients sont des fonctions périodiques « vus à travers » un difféomorphisme aléatoire. Plus précisément, nous considérons les fonctions

$$a_{ij} \left(\Phi^{-1} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) \right), \quad (1)$$

où a_{ij} est périodique, et $\Phi(\cdot, \omega)$ est, pour presque tout ω , un difféomorphisme. Son gradient est stationnaire au sens défini dans la Section 1.1 ci-dessous. Une interprétation possible du formalisme (1) est que le difféomorphisme Φ transforme une structure de référence périodique (définie par les a_{ij}) en une structure aléatoire stationnaire.

Nous commençons par définir dans la Section 1.1 les notions d'ergodicité et de stationnarité considérées, puis décrivons précisément dans la Section 1.2 le problème traité. Nous énonçons dans la Section 1.3 notre résultat principal d'homogénéisation (Théorème 1.3), que nous démontrons dans la Section 2. Enfin, la Section 3 est consacrée à une approche de type développement à deux échelles de ce problème, ainsi qu'à certaines généralisations possible, en particulier au cas non linéaire monotone.

Signalons que le cadre présenté ici est lié à la notion de réseaux stationnaires que nous utilisons dans [2,3] pour définir l'énergie d'un ensemble infini de particules dont les positions sont aléatoires.

1.1. Un cadre stationnaire ergodique

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé. Pour toute variable aléatoire $X \in L^1(\Omega, d\mathbb{P})$, on notera $\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$ son espérance.

On fixe $d \in \mathbb{N}^*$, et on suppose que le groupe $(\mathbb{Z}^d, +)$ agit sur Ω , par une action notée $(\tau_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$. On supposera que cette action préserve la mesure \mathbb{P} et est *ergodique*, c'est-à-dire

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad (\forall k \in \mathbb{Z}^d, \tau_k A = A) \Rightarrow (\mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } 1). \quad (2)$$

On définit de plus la notion de stationnarité suivante : $F \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d, L^1(\Omega))$ est dite *stationnaire* si

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad F(x + k, \omega) = F(x, \tau_k \omega) \quad \text{presque partout en } x, \text{ presque sûrement.} \quad (3)$$

Remarquons qu'une fonction F périodique est un cas particulier de (3), quand on prend F déterministe.

Le théorème ergodique [5,13] peut s'énoncer dans le cadre présent sous la forme suivante :

Théorème 1.1 (Théorème ergodique, [5,13]). *Soit $F \in L^\infty(\mathbb{R}^d, L^1(\Omega))$ une variable aléatoire stationnaire au sens (3). Pour $k = (k_1, k_2, \dots, k_d) \in \mathbb{R}^d$, on note $|k|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq d} |k_i|$. Alors*

$$\frac{1}{(2N+1)^d} \sum_{|k|_\infty \leq N} F(x, \tau_k \omega) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}(F(x, \cdot)) \quad \text{dans } L^\infty(\mathbb{R}^d), \text{ presque sûrement.} \quad (4)$$

Ceci implique en particulier la convergence suivante (où Q est le cube unité)

$$F \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{*} \mathbb{E} \left(\int_Q F(x, \cdot) dx \right) \quad \text{dans } L^\infty(\mathbb{R}^d), \text{ presque sûrement.} \quad (5)$$

1.2. Position du problème

Nous considérons dès lors le problème suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)\right)\nabla u\right) = f & \text{dans } \mathcal{D}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D}, \end{cases} \tag{6}$$

où \mathcal{D} est un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^d , $A(y) = [a_{ij}(y)]$ est une matrice carrée de taille d , fonction périodique de maille périodique Q , vérifiant les hypothèses

$$\exists \gamma > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \xi^T A(y)\xi \geq \gamma |\xi|^2, \quad \text{presque partout en } y \in \mathbb{R}^d, \tag{7}$$

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, d\}, \quad a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{8}$$

L'application $\Phi(\cdot, \omega)$ est pour presque tout ω un difféomorphisme de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d , qui vérifie les hypothèses suivantes :

$$\operatorname{Ess\,Inf}_{\omega \in \Omega, x \in \mathbb{R}^d} [\det(\nabla \Phi(x, \omega))] = \nu > 0, \tag{9}$$

$$\operatorname{Ess\,Sup}_{\omega \in \Omega, x \in \mathbb{R}^d} (|\nabla \Phi(x, \omega)|) = M < \infty, \tag{10}$$

$$\nabla \Phi(x, \omega) \text{ est stationnaire au sens de (3)}. \tag{11}$$

Nous appellerons un tel Φ un difféomorphisme aléatoire stationnaire.

Il est à noter que les hypothèses imposées à l'application Φ font des coefficients de l'équation des fonctions qui « ressemblent » beaucoup à des fonctions périodiques (ceci est explicité dans le Lemme 2.1 ci-dessous).

Notons qu'un problème similaire a été étudié dans [1,6], avec un difféomorphisme Φ déterministe. D'autre part, le cadre stationnaire ergodique utilisé généralement pour l'homogénéisation stochastique est différent du cas étudié dans cette Note car la stationnarité « discrète » que nous supposons n'est pas un cas particulier de la stationnarité « continue » ($F(x + y, \omega) = F(x, \tau_y \omega)$, $\forall y \in \mathbb{R}^d$) utilisée par exemple dans [7–9,12].

D'autres cadres stationnaires ergodiques pourraient être considérés, dans le même esprit que (1)-(2)-(3)-(6)-(11), mais avec des propriétés toutefois différentes : coefficients a_{ij} stationnaires au lieu de périodiques dans (1), stationnarité continue au lieu de discrète dans (3), etc. De telles variantes seront étudiées dans [4].

1.3. Résultat de convergence

Notre résultat central est contenu dans les deux théorèmes suivants :

Théorème 1.2. *Soit A une matrice carrée périodique vérifiant (7)–(8) et Φ un difféomorphisme aléatoire vérifiant les hypothèses (9)-(10)-(11). Alors pour tout $p \in \mathbb{R}^d$ fixé, le système*

$$\begin{cases} \operatorname{div}[A(\Phi^{-1}(y, \omega))(p + \nabla w_p)] = 0, \\ w_p(y, \omega) = \tilde{w}_p(\Phi^{-1}(y, \omega), \omega), \quad \nabla \tilde{w}_p \text{ est stationnaire au sens de (3)}, \\ \mathbb{E}\left(\int_{\Phi(Q)} \nabla w_p(y, \cdot) dy\right) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

admet dans $H^1(\mathbb{R}^d, L^2(\Omega))$ une solution, qui est unique à l'ajout d'une constante (aléatoire) près.

Théorème 1.3. *Soit \mathcal{D} un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^d , soit $f \in H^{-1}(\mathcal{D})$, soit A et Φ vérifiant les hypothèses du Théorème 1.2. Alors la solution $u_\varepsilon(x, \omega)$ de (6) vérifie les propriétés suivantes :*

- (i) $u_\varepsilon(x, \omega)$ converge vers une fonction $u_0(x)$ fortement dans $L^2(\mathcal{D})$ et faiblement dans $H^1(\mathcal{D})$, presque sûrement ;

(ii) la fonction u_0 est solution du problème homogénéisé suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^* \nabla u) = f & \text{dans } \mathcal{D}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{D}. \end{cases} \quad (13)$$

Dans (13), la matrice homogénéisée A^* est définie par :

$$a_{ij}^* = \det \left(\mathbb{E} \left(\int_Q \nabla \Phi(z, \cdot) dz \right) \right)^{-1} \mathbb{E} \left(\int_{\Phi(Q, \cdot)} (e_i + \nabla w_{e_i}(y, \cdot))^T A(\Phi^{-1}(y, \cdot)) e_j dy \right), \quad (14)$$

où pour tout $p \in \mathbb{R}^d$, w_p est le correcteur défini par le système (12) ci-dessus.

2. Preuve de convergence

Nous démontrons dans cette section les Théorèmes 1.3 et 1.2 ci-dessus. Nous commençons par établir deux lemmes nécessaires à leur preuve.

Lemme 2.1. Soit Φ un difféomorphisme aléatoire de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d vérifiant les hypothèses (9)-(10)-(11). Alors

$$\nabla \Phi \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\int_Q \nabla \Phi(y, \cdot) dy \right) \quad \text{dans } (L^\infty(\mathbb{R}^d))^d, \quad \text{presque sûrement.} \quad (15)$$

En conséquence, $\varepsilon \Phi \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) \rightarrow_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\int_Q \nabla \Phi \right) x$ dans $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, presque sûrement.

Preuve. La convergence (15) est une simple application de (5). La fonction $\Phi_\varepsilon(x, \omega) = \varepsilon \Phi \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) - \mathbb{E} \left(\int_Q \nabla \Phi \right) x$ est bornée dans $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, et, par la propriété (15), a son gradient qui converge vers 0 dans L^∞ faible-*. Donc, quitte à extraire une sous-suite, Φ_ε converge dans $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ vers une constante. Cette constante est en particulier égale à la limite $\Phi_\varepsilon(0, \omega) = \varepsilon \Phi(0, \omega)$, c'est-à-dire 0 presque sûrement. \square

Lemme 2.2. Soit Φ un difféomorphisme aléatoire vérifiant les hypothèses (9)-(10)-(11). Soit $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d, L^1(\Omega))$ une fonction stationnaire au sens (3). Alors

$$g \left(\Phi^{-1} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right), \omega \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \det \left(\mathbb{E} \left(\int_Q \nabla \Phi(x, \cdot) dx \right) \right)^{-1} \mathbb{E} \left(\int_{\Phi(Q, \cdot)} g(\Phi^{-1}(x, \cdot), \cdot) dx \right) \quad \text{dans } L^\infty(\mathbb{R}^d), \quad (16)$$

presque sûrement.

Preuve. Par linéarité et densité, il suffit de démontrer que cette convergence a lieu contre des fonctions indicatrices d'ouverts bornés connexes. Soit donc A un tel ouvert de \mathbb{R}^d . On a alors

$$\int_A g \left(\Phi^{-1} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right), \omega \right) dx = \int_{\varepsilon \Phi^{-1}(A/\varepsilon, \omega)} g \left(\frac{z}{\varepsilon}, \omega \right) \det \left(\nabla \Phi \left(\frac{z}{\varepsilon}, \omega \right) \right) dz.$$

Par ailleurs, une conséquence du Lemme 2.1 est que $\varepsilon \Phi^{-1} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right)$ converge vers $[\mathbb{E} \left(\int_Q \nabla \Phi(y, \cdot) dy \right)]^{-1} x$ uniformément sur tout compact en x , presque sûrement. Donc la fonction indicatrice de $\varepsilon \Phi^{-1} \left(\frac{A}{\varepsilon}, \omega \right)$ converge (fortement) dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ vers celle de l'ouvert $[\mathbb{E} \left(\int_Q \nabla \Phi(y, \cdot) dy \right)]^{-1} A$. D'autre part, la convergence (5) implique

$$g \left(\frac{z}{\varepsilon}, \omega \right) \det \left(\nabla \Phi \left(\frac{z}{\varepsilon}, \omega \right) \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\int_Q g(z, \cdot) \det(\nabla \Phi(z, \cdot)) dz \right) = \mathbb{E} \left(\int_{\Phi(Q, \cdot)} g(\Phi^{-1}(x, \cdot), \cdot) dx \right).$$

Ceci achève la démonstration. \square

Preuve du Théorème 1.2. Soit $p \in \mathbb{R}^d$. On définit les problèmes régularisés suivants, où $\alpha > 0$ est destiné à tendre vers 0 :

$$\begin{cases} \operatorname{div}[A(\Phi^{-1}(y, \omega))(p + \nabla w_p)] + \alpha w_p = 0, \\ w_p(y, \omega) = \tilde{w}_p(\Phi^{-1}(y, \omega), \omega), \quad \tilde{w}_p \text{ est stationnaire.} \end{cases} \tag{17}$$

On définit alors l'espace $\mathcal{H} = \{w = \tilde{w} \circ \Phi^{-1}, \tilde{w} \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d, L^2(\Omega)), \tilde{w} \text{ stationnaire}\}$. Muni du produit scalaire $\langle w_1 | w_2 \rangle = \mathbb{E}(\int_Q \nabla \tilde{w}_1 \nabla \tilde{w}_2 + \tilde{w}_1 \tilde{w}_2)$, \mathcal{H} est un espace de Hilbert, sur lequel la forme bilinéaire

$$a(w_1, w_2) = \mathbb{E} \left(\int_{\Phi(Q)} [A(\Phi^{-1}(y, \cdot)) \nabla w_1(y, \cdot)] \nabla w_2(y, \cdot) dy + \alpha \int_{\Phi(Q)} w_1 w_2 \right)$$

est coercive. Le lemme de Lax–Milgram implique donc que (17) admet une unique solution, que nous noterons w_p^α . Cette solution vérifie les estimées suivantes :

$$\mathbb{E} \left(\int_Q |\nabla \tilde{w}_p^\alpha|^2 \right) \leq C, \quad \mathbb{E} \left(\int_Q (\tilde{w}_p^\alpha)^2 \right) \leq \frac{C}{\alpha},$$

où C est une constante indépendante de α . Ainsi, la fonction $\nabla \tilde{w}_p^\alpha$ converge faiblement (à extraction près), quand α tend vers 0, vers une fonction $T_p \in L^2(Q, L^1(\Omega))^d$, qui de plus est stationnaire. De même, ∇w_p^α converge vers $S_p \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^d, L^1(\Omega))^d$, qui vérifie

$$S_p(y, \omega) = \nabla \Psi(y, \omega) T_p(\Psi(y, \omega), \omega), \tag{18}$$

où $\Psi = \Phi^{-1}$. De plus, comme limite de gradients de fonctions, T_p et S_p vérifient $\partial_i (T_p)_j = \partial_j (T_p)_i$, donc il existe v_p et \tilde{v}_p telles que $T_p = \nabla \tilde{v}_p$ et $S_p = \nabla v_p$. De plus, (18) implique $v_p(y, \omega) = \tilde{v}_p(\Psi(y, \omega), \omega) + X(\omega)$, où $X \in L^1(\Omega)$. On pose donc $w_p = v_p - X$ et $\tilde{w}_p = \tilde{v}_p$ pour obtenir la deuxième ligne de (12). D'autre part, αw_p^α tend vers 0 dans $L^2(Q, L^1(\Omega))$. On peut donc passer à la limite dans (17), et on obtient la première ligne de (12). Ceci démontre bien l'existence d'une solution de (12).

Pour démontrer l'unicité, on considère deux solutions, et on note η_p leur différence, qui vérifie donc

$$\begin{cases} \operatorname{div}[A(\Phi^{-1}(y, \omega))(\nabla \eta_p)] = 0, \\ \eta_p(y, \omega) = \tilde{\eta}_p(\Phi^{-1}(y, \omega), \omega), \quad \nabla \tilde{\eta}_p \text{ est stationnaire,} \quad \mathbb{E} \left(\int_{\Phi(Q)} \nabla \eta_p \right) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Par régularité elliptique, $\nabla \eta_p \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^d)$ presque sûrement. Il en est donc de même pour $\nabla \tilde{\eta}_p$. De plus, la stationnarité de $\nabla \tilde{\eta}_p$ et la dernière équation de (19) impliquent que $\tilde{\eta}_p$, donc η_p , est sous-linéaire à l'infini presque sûrement. On intègre maintenant la première ligne de (19) contre $\nabla \eta_p$ sur NQ , où N est un entier. On a donc

$$\int_{NQ} [A(\Phi^{-1}(y, \omega)) \nabla \eta_p(y, \omega)] \nabla \eta_p(y, \omega) dy = \int_{\partial(NQ)} [A(\Phi^{-1}(y, \omega)) \nabla \eta_p(y, \omega)] n(y) \eta_p(y, \omega) d\sigma(y) = o(N^d)$$

presque sûrement, où $n(y)$ est la normale sortante à NQ en $y \in \partial(NQ)$, et $d\sigma(y)$ la mesure de Lebesgue de $\partial(NQ)$. En appliquant le Lemme 2.2 à $g(z, \omega) = [A(z)(\nabla \Phi(z, \omega))^{-1} \nabla \tilde{\eta}_p(z, \omega)] (\nabla \Phi(z, \omega))^{-1} \nabla \tilde{\eta}_p(z, \omega)$, qui est stationnaire, on voit que le membre de gauche de cette égalité divisé par N^d converge vers

$$\det \left(\mathbb{E} \left(\int_Q \nabla \Phi(x, \cdot) dx \right) \right)^{-1} \mathbb{E} \left(\int_{\Phi(Q, \cdot)} g(\Phi^{-1}(x, \cdot), \cdot) dx \right) \geq C \mathbb{E} \left(\int_Q |\nabla \tilde{\eta}_p(z, \cdot)|^2 dz \right),$$

où la constante C est strictement positive dépendant de γ, ν et M . Ainsi, $\nabla \tilde{\eta}_p$ est nul, donc η_p est constant. \square

Preuve du Théorème 1.3. On fixe $p \in \mathbb{R}^d$, et on note v_p la solution du problème (12) avec A^T à la place de A , c'est-à-dire

$$\begin{cases} \operatorname{div}[A(\Phi^{-1}(y, \omega))^T(\nabla v_p + p)] = 0, \\ v_p(y, \omega) = \tilde{v}_p(\Phi^{-1}(y, \omega), \omega), \quad \nabla \tilde{v}_p \text{ est stationnaire,} \quad \mathbb{E}\left(\int_{\Phi(Q)} \nabla v_p\right) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

On pose alors $q(y, \omega) = A(\Psi(y, \omega))^T(\nabla v_p(y, \omega) + p)$, où $\Psi = \Phi^{-1}$, et

$$v_p^\varepsilon(x, \omega) = \varepsilon v_p\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \quad q^\varepsilon(x, \omega) = q\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right).$$

On a alors

$$\nabla v_p^\varepsilon(x, \omega) = \nabla v_p\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) = \nabla \Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) \nabla \tilde{v}_p\left(\Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right).$$

On applique donc le Lemme 2.2 à la fonction $g(y, \omega) = \nabla \Psi(\Phi(y, \omega)) \nabla \tilde{v}_p(y, \omega) = (\nabla \Phi(y, \omega))^{-1} \nabla \tilde{v}_p(y, \omega)$, qui est bien stationnaire par hypothèse, et on constate que

$$\nabla v_p^\varepsilon(x, \omega) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{*} \det\left(\mathbb{E}\left(\int_Q \nabla \Phi(x, \cdot) dx\right)\right)^{-1} \mathbb{E}\left(\int_{\Phi(Q, \cdot)} \nabla \Psi(x, \cdot) \nabla \tilde{v}_p(\Psi(x, \cdot), \cdot) dx\right) = 0$$

dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, presque sûrement. La dernière égalité vient du fait que l'intégrand du deuxième facteur vaut exactement ∇v_p et de (20). De même, on démontre facilement que

$$q^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{*} (A^T)^* p = (A^*)^T p.$$

D'autre part, la solution u_ε de (6) est bornée dans $H^1(\mathcal{D})$, presque sûrement. On a donc, à extraction d'une sous-suite près, pour ω fixé :

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u^0 \quad \text{dans } H^1(\mathcal{D}), \quad A\left(\Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)\right) \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup r^0 \quad \text{dans } L^2(\mathcal{D}).$$

De plus, le principe de compacité par compensation (voir par exemple [11,14], ou [8, Lemme 1.1]) implique que

$$\left[A\left(\Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)\right) \nabla u_\varepsilon\right] (\nabla v_p^\varepsilon + p) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{*} r^0 p, \quad \text{et} \quad \nabla u_\varepsilon q^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{*} \nabla u^0 (A^*)^T p,$$

d'où $r^0 p = (A^* \nabla u^0) p$. Ceci valant pour tout $p \in \mathbb{R}^d$, on obtient $r^0 = A^* \nabla u^0$. Comme de plus $\operatorname{div}(r^0) = f$, on obtient la convergence voulue. \square

3. Remarques et extensions

3.1. Structure du correcteur

Dans le cadre périodique, le correcteur hérite pleinement de la propriété de périodicité des coefficients de A . Dans le cadre stationnaire standard, c'est son gradient qui en hérite, le correcteur lui-même n'ayant pas de statut particulier, à juste titre. On pourrait d'abord penser que, ici aussi, le gradient du correcteur hérite de la structure « fonction périodique composée avec Φ^{-1} ». C'est en fait le cas, mais en dimension un seulement. En effet, l'équation du correcteur s'écrit alors

$$\frac{d}{dy} \left[A(\Phi^{-1}(y, \omega)) \left(1 + \frac{dw_1}{dy}(y, \omega) \right) \right] = 0,$$

dont la solution vérifie $\frac{dw_1}{dy}(y, \omega) = \frac{C(\omega)}{A(\Phi^{-1}(y, \omega))} - 1$, où la constante $C(\omega)$ devient déterministe grâce à la condition de normalisation de (12). Ainsi, $\frac{dw_1}{dy}$ est bien une fonction périodique composée avec Φ^{-1} .

En dimension supérieure, la situation est différente. L'équation du correcteur peut aussi s'écrire, après changement de variable, et en posant $\nabla w_p(y, \omega) = \tilde{W}(\Phi^{-1}(y, \omega), \omega)$,

$$\text{Trace}[(\nabla\Phi(z, \omega))^{-1}\nabla(A(z)(p + \tilde{W}(z, \omega)))] = 0.$$

Dans la suite, on se place en dimension 2 pour simplifier. Si donc on suppose que \tilde{W} est périodique, donc déterministe, on peut prendre l'espérance de cette équation et obtenir, en supposant (toujours pour simplifier), que $\mathbb{E}(\int_Q \nabla\Phi) = I_2$, $\text{div}(A(z)(\tilde{W}(z) + p)) = 0$. La solution de cette équation est unique. Cependant, il est tout-à-fait possible que sur un ensemble de mesure non nulle de Ω , la matrice $(\nabla\Phi(z, \omega))^{-1}$ soit égale par exemple à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui donne sur cet ensemble une équation différentielle pour \tilde{W} , qui implique, avec la première, que le vecteur $A(z)(\tilde{W}(z) + p)$ est constant. Cette constante est égale à $b = (\int_Q A(z)^{-1} dz)^{-1} p$ car la moyenne de \tilde{W} est nulle par hypothèse. Ceci donne une expression explicite de \tilde{W} qui est incompatible avec le fait que $\tilde{W} \circ \Phi$ est un gradient, sauf si A est une matrice constante.

Il est cependant clair, vu les techniques de preuve, que les Théorèmes 1.2 et 1.3 restent vrais si A est stationnaire, et pas seulement périodique. On retrouve alors une structure identique pour A et pour le gradient du correcteur : tous les deux sont des fonctions stationnaires composées avec Φ^{-1} . Nous renvoyons à [4] pour plus de détails.

3.2. Développement à deux échelles

De même que pour le cas périodique ou le cas stationnaire standard, le Théorème 1.3 peut être formellement obtenu par un développement à deux échelles. Dans un tel cas, on écrit la solution u_ε sous la forme

$$u_\varepsilon(x, \omega) = u_0(x, \omega) + \varepsilon u_1(x, \omega) + \varepsilon^2 u_2(x, \omega) + \dots, \tag{21}$$

où les fonctions u_i ont la structure suivante :

$$u_i(x, \omega) = v_i\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right), \tag{22}$$

où l'on suppose que presque partout en $x \in \mathcal{D}$, les fonctions $\nabla_y v_i(x, y, \omega)$ sont stationnaires en y . En identifiant chaque terme du développement, on obtient facilement grâce au terme d'ordre $\frac{1}{\varepsilon^2}$ que

$$\text{div}_y[A(\Phi^{-1}(y, \omega))\nabla_y(\Phi^{-1}(y, \omega))\nabla_y v_0(x, \Phi^{-1}(y, \omega), \omega)]|_{y=x/\varepsilon} = 0.$$

On suppose alors que les variables x et $y = \frac{x}{\varepsilon}$ sont indépendantes l'une de l'autre de sorte que cette équation est vraie pour tout y . D'après l'unicité de la solution de l'équation de correcteur, les seules solutions sont les constantes (aléatoires) en y . Ceci implique que v_0 ne dépend pas de la variable « rapide » y . Par stationnarité, elle est donc indépendante de ω . Ainsi,

$$v_0(x, y, \omega) = v_0(x) = u_0(x).$$

En utilisant cette propriété dans le terme suivant du développement, on obtient alors

$$\text{div}_y[A(\Phi^{-1}(y, \omega))(\nabla_y v_1(x, \Phi^{-1}(y, \omega), \omega) + \nabla_x u_0)] = 0.$$

Ceci amène donc naturellement à poser l'équation du correcteur pour résoudre l'équation ci-dessus et ainsi exprimer v_1 en fonction de u_0 . On a alors $v_1(x, y, \omega) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \tilde{w}_{e_i}(y)$, ce qui, en écrivant le terme d'ordre 0 du développement en puissances de ε , donne (13).

3.3. Le cas non linéaire monotone

Citons une généralisation possible du présent travail au cadre non linéaire : on considère donc le problème

$$\begin{cases} -\text{div}\left[a\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \nabla u\right)\right] = f, & \text{dans } \mathcal{D}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D}, \end{cases} \tag{23}$$

où $a \in (L_{\text{loc}}^{\infty}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))^d$ est périodique en sa première variable, continue en la deuxième et vérifie

$$|a(y, q)| \leq M(1 + |q|), \quad \text{et} \quad (a(y, q_1) - a(y, q_2))(q_1 - q_2) \geq \nu |q_1 - q_2|^2, \quad (24)$$

où $M, \nu > 0$ sont des constantes indépendantes de y et q . En utilisant l'argument de monotonie de Minty (voir [10]), on démontre alors avec des techniques similaires à celles de la Section 2 que les Théorèmes 1.3 et 1.2 sont vrais, à ceci près que le problème homogénéisé s'écrit dans ce cas

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a^*(\nabla u)) = f, & \text{dans } \mathcal{D}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D}, \end{cases} \quad (25)$$

et l'application a^* est définie par

$$a^*(p) = \det\left(\mathbb{E}\left(\int_Q \nabla \Phi(z, \cdot) dz\right)\right)^{-1} \mathbb{E}\left(\int_{\Phi(Q)} a(\Phi^{-1}(y, \cdot), \nabla w_p(y, \cdot) + p) dy\right), \quad (26)$$

et w_p est solution de l'équation de correcteur :

$$\begin{cases} \operatorname{div}[a(\Phi^{-1}(y, \omega), \nabla w_p + p)] = 0, \\ w_p(y, \omega) = \tilde{w}_p(\Phi^{-1}(y, \omega), \omega), \quad \nabla \tilde{w}_p \text{ est stationnaire,} \quad \mathbb{E}\left(\int_{\Phi(Q)} \nabla w_p\right) = 0, \end{cases} \quad (27)$$

qui admet une solution unique à l'ajout d'une constante aléatoire près.

Références

- [1] R. Alexandre, Homogenisation and $\theta - 2$ convergence, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 127 (3) (1997) 441–455.
- [2] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, On the energy of some microscopic stochastic lattices, à paraître dans Arch. Rat. Mech. Anal.
- [3] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, en préparation, suite de [2].
- [4] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, en préparation.
- [5] U. Krengel, Ergodic Theorems, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 6, de Gruyter, 1985.
- [6] M. Briane, Homogenization of a non periodic material, J. Math. Pures Appl. (9) 73 (1994) 47–66.
- [7] G. Dal Maso, L. Modica, Nonlinear stochastic homogenization and ergodic theory, J. Reine Angew. Math. 368 (1986) 28–42.
- [8] V.V. Jikov, S.M. Kozlov, O.A. Oleinik, Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals, Springer-Verlag, 1994.
- [9] S.M. Kozlov, The averaging of random operators, Mat. Sb. (N.S.) 109(151) (2) (1979) 188–202 (in Russian).
- [10] G.J. Minty, Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space, Duke Math. J. 29 (1962) 341–346.
- [11] F. Murat, Compacité par compensation, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. 5 (4) (1978) 485–507.
- [12] G. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan, Diffusions with random coefficients, in: Statistics and Probability. Essays in Honour of C.R. Rao, North-Holland, Amsterdam, 1982, pp. 547–552.
- [13] A.N. Shiryaev, Probability, Graduate Texts in Mathematics, vol. 95, Springer, 1984.
- [14] L. Tartar, Compensated compactness and applications to partial differential equations, in: Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot-Watt Symposium, vol. IV, in: Res. Notes in Math., vol. 39, Pitman, Boston, MA, 1979, pp. 136–212.