Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006) 679–684
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des jeux/Économie mathématique

Jeux à champ moyen. II – Horizon fini et contrôle optimal

Jean-Michel Lasry [a], Pierre-Louis Lions [b,c]

[a] *Institut de Finance, Université Paris-Dauphine, place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris cedex 16, France*
[b] *Collège de France, 3, rue d'Ulm, 75005 Paris, France*
[c] *Ceremade – UMR CNRS 7534, Université Paris-Dauphine, place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris cedex 16, France*

Reçu le 6 juin 2006 ; accepté le 4 juillet 2006

Présenté par Pierre-Louis Lions

Résumé

Nous poursuivons dans cette Note notre étude de la notion de jeux à champ moyen introduite dans une Note précédente. Nous considérons ici le cas d'équilibres de Nash pour des problèmes de type contrôle stochastique en horizon fini. Nous donnons des résultats généraux d'existence et d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles ainsi obtenus. Et nous montrons une interprétation possible de ces systèmes en terme de contrôle optimal. ***Pour citer cet article : J.-M. Lasry, P.-L. Lions, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***

Abstract

Mean field games. II – Finite horizon and optimal control. We continue in this Note our study of the notion of mean field games that we introduced in a previous Note. We consider here the case of Nash equilibria for stochastic control type problems in finite horizon. We present general existence and uniqueness results for the partial differential equations systems that we introduce. We also give a possible interpretation of these systems in term of optimal control. ***To cite this article: J.-M. Lasry, P.-L. Lions, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***

Abridged English version

This Note is the sequel of a previous Note [3] in which we introduced a model (and a general modelling approach) of 'mean field' type for the limit of problems with a large number N of players as N goes to $+\infty$. The economical and game theoretical motivations of this work are mentioned in [3] together with a rigorous justification of such mean field models in the context of ergodic stochastic control and Nash equilibria.

We consider here analogous models in the more realistic case of finite horizon problems and we are led to the following system of partial differential equations:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + H(x, \nabla v) = V[m], \qquad v|_{t=0} = v_0\big[m(0)\big], \tag{1}$$

Adresses e-mail : lasry@ceremade.dauphine.fr (J.-M. Lasry), lions@ceremade.dauphine.fr (P.-L. Lions).

1631-073X/$ – see front matter © 2006 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.
doi:10.1016/j.crma.2006.09.018

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \nu\Delta m + \operatorname{div}\left(\frac{\partial H}{\partial p}(x, \nabla v)m\right) = 0, \qquad m|_{t=T} = m_0 \tag{2}$$

where $\nu > 0$, m_0 is a given positive bounded smooth function over $Q = [0,1]^d$ $(d \geqslant 1)$, $\int_Q m_0 = 1$, all functions are supposed to be periodic in each x_i $(1 \leqslant i \leqslant d)$, H is a smooth convex Hamiltonian and $v_0[m]$, $V[m]$ are operators that (for example) are bounded from $C^{k,\alpha}$ into $C^{k+1,\alpha}$ $(\forall k \geqslant 0, \forall \alpha \in]0,1[)$ such that $\sup\{\|V[m]\|_{C^1} + \|v_0[m]\|_{C^1} \mid m \in L^1(Q),\ m \geqslant 0,\ \int_Q m = 1\} < \infty$. We also prove the following:

Theorem.

(i) *There exists at least one smooth solution* (v, m) *of* (1), (2).
(ii) *If, in addition,* V *and* v_0 *are strictly monotone in* L^2*, any such solution is unique.*

We also present various extensions and variants of the system (1), (2) and of this result together with observations on instability and nonuniqueness phenomena. Also, in the case when V and v_0 are the gradients of convex functionals, we indicate an interpretation of the above system (1), (2) in term of the optimal control of (some) partial differential equations.

Pour Romain

1. Introduction

Cette Note fait suite à une première Note [3] dans laquelle nous avons introduit un modèle (et une approche générale) de type « champ moyen » pour les problèmes avec une infinité de joueurs (par passage à la limite quand le nombre de joueurs tend vers l'infini). Les motivations économiques et de théorie des jeux sont mentionnées dans [3] ainsi qu'une justification rigoureuse de ces modèle de champ moyen dans le cadre du contrôle optimal stochastique ergodique et des points ou équilibres de Nash.

Nous introduisons ici l'analogue de ces modèles dans le cas plus réaliste et plus délicat de problèmes en horizon fini et étudions les propriétés mathématiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles ainsi obtenus. Pour simplifier la présentation, nous ne considérons ici que le cas de conditions aux limites périodiques sur $Q = [0,1]^d$ $(d \geqslant 1)$ même si tous nos résultats s'étendent sans difficultés au cas de conditions aux limites générales (Dirichlet, Neumann, contraintes d'état, ...) sur un domaine ouvert de $\mathbb{R}^d$ ou au cas de l'espace $\mathbb{R}^d$ tout entier (avec des conditions convenables à l'infini ...). Avec cette convention, le (ou un) système de champ moyen dans le cas d'un horizon fini $T \in]0, +\infty[$ s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + H(x, \nabla v) = V[m] \quad \text{dans } Q \times [0,T], \qquad v|_{t=0} = v_0\big[m(0)\big] \quad \text{sur } Q. \tag{1}$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \nu\Delta m + \operatorname{div}\left(\frac{\partial H}{\partial p}(x, \nabla v)m\right) = 0 \quad \text{dans } Q \times [0,T], \qquad m|_{t=T} = m_0 \quad \text{sur } Q \tag{2}$$

où $\nu > 0$, m_0 est une fonction donnée régulière sur Q, $m_0 > 0$, $\int_Q m_0 = 1$ sur Q, $H(x,p)$ est Lipschitz en $x \in Q$ uniformément pour p borné $\in \mathbb{R}^d$, convexe de classe C^1 en p $(\forall x \in Q)$, $v_0[m]$ et $V[m]$ sont des opérateurs sur lesquels nous ferons des hypothèses plus loin. A titre d'exemple, voir aussi [3], $V[m]$ (ou $v_0[m]\ldots$) peut être donné par $F(x, m * G(x))$ (où $m * G = \int_Q m(y)G(x-y)\,dy$, G est donnée) ou par $F(x, m(x))$ et F est une fonction donnée sur $Q \times \mathbb{R}$ (par exemple $F(x,t) = ct + F_0(x)$, $c \in \mathbb{R}$, F_0 est donnée). Nous indiquons à la fin de cette Note, de multiples variantes et extensions du système (1), (2).

Formellement, le système (1), (2) ci-dessus s'obtient par passage à la limite quand N tend vers l'infini dans les systèmes d'équations aux dérivées partielles caractérisant des équilibres de Nash à N joueurs pour des problèmes dans lesquels

(i) chaque joueur a une dynamique stochastique du type $dX_s^i = \sigma\, dW_s^i - \alpha_s^i$ pour $s \geqslant t$, $X_t^i = x^i$ où $x^i \in Q$, $\sigma = \sqrt{2\nu}$; $W_s^1, \ldots, W_s^N$ sont des Browniens indépendants et α_s^i correspond au contrôle que peut exercer le joueur i,

(ii) le critère de chaque joueur est du type

$$E\left[\int_t^T L\big(X_s^i, \alpha_s^i\big) + V\left[\frac{1}{N-1}\sum_{j \neq i} \delta_{X_s^j}\right] ds + v_0\left[\frac{1}{N-1}\sum_{j \neq i} \delta_{X_T^j}\right]\right]$$

pour $0 \leqslant t \leqslant T$, où $H(x,p) = \sup_\alpha[\alpha \cdot p - L(x,\alpha)]$ et

(iii) la densité initiale (i.e. à l'instant t) des joueurs est donnée par $\prod_{j=1}^N m_0(x^j)$.

On s'attend alors que la fonction valeur de chacun des joueurs se réduise asymptotiquement quand N tend vers l'infini à une fonction de la forme $v(x^i, T-t)$ (avec une dépendance d'ordre $1/N$ en chacune des autres variables X^j pour $j \neq i$) et que la mesure m se factorise asymptotiquement (phénomène bien connu de propagation du chaos en Mécanique Statistique) « en » $\prod_{j=1}^N m(x^j, T-t)$. Il est alors aisé d'en déduire les équations (1), (2). Justifier rigoureusement ce passage à la limite est extrêmement délicat et pour l'instant nous n'avons pu mener à bien ce programme que dans des cas particuliers (comme par exemple le cas où $H = 0, \ldots$). Nous reviendrons sur ce point dans de futures publications.

2. Existence

En raison de l'extrême généralité du système (1), (2) de par la présence des opérateurs V et v_0, de multiples situations sont possibles conduisant à différentes classes de résultats. Pour simplifier la présentation, nous ne considérons ici que deux cas représentatifs : (i) le cas d'opérateurs régularisants et (ii) le cas d'opérateurs ponctuels. Dans le premier cas, nous supposons que $V[m]$ et $v_0[m]$ sont réguliers si m l'est (par exemple, sont des opérateurs bornés de $C^{k,\alpha}$ dans $C^{k+1,\alpha}$ $\forall k \geqslant 0$, $\forall \alpha \in]0,1[$), et que ces opérateurs vérifient :

$$\sup\left\{ \left\| V[m] \right\|_{C^1} + \left\| v_0(m) \right\|_{C^1} \,\middle|\, m \in L^1(Q),\ m \geqslant 0,\ \int_Q m \, \mathrm{d}x = 1 \right\} < \infty. \tag{3}$$

Dans ce cas, diverses hypothèses sur H peuvent être faites comme

$$\exists C \geqslant 0, \quad \left| \frac{\partial H}{\partial p}(x,p) \right| \leqslant C\big(1+|p|\big) \quad \forall (x,p) \in Q \times \mathbb{R}^d \tag{4}$$

ou

$$\exists C \geqslant 0, \quad \left| \frac{\partial H}{\partial x}(x,p) \right| \leqslant C\big(1+|p|\big) \quad \forall (x,p) \in Q \times \mathbb{R}^d. \tag{5}$$

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses précédentes, il existe une solution régulière* (v,m) *de* (1), (2).

La démonstration du Théorème 2.1 repose sur des estimations a priori. Dans le cas où nous supposons (4), les bornes se déduisent des résultats classiques sur les équations paraboliques quasilinéaires avec croissance au plus quadratique par rapport au gradient. Dans le cas de la condition (5), on obtient par la méthode de Beinstein (i.e. l'utilisation du principe du maximum pour la fonction auxiliaire $|\nabla v|^2$) une borne sur $\|\nabla v\|_{L^\infty}$.

Le cas où $V[m]$ et $v_0[m]$ sont des opérateurs locaux i.e. où $V[m](x) = F(x, m(x))$, $v_0[m](x) = g(x, m(x))$ est plus délicat. Là encore de nombreux résultats d'existence de solutions régulières ou de solutions faibles sont possibles. Un exemple de solution faible est obtenu en supposant qu'il existe des constantes $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $\gamma > 1$, $\delta > 0$, $C > 0$ telles que pour tous $x \in Q$, $p \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in [0, \infty[$

$$F(x,\lambda)\lambda \geqslant \delta\big|F(x,\lambda)\big|^\alpha - C, \qquad \inf_{\lambda \in [0,1]} F(x,\lambda) \geqslant -C, \tag{6}$$

$$g(x,\lambda)\lambda \geqslant \delta\big|g(x,\lambda)\big|^\beta - C, \qquad \inf_{\lambda \in [0,1]} g(x,\lambda) \geqslant -C, \tag{7}$$

$$\begin{cases} \delta|p|^\gamma - C \leqslant H(x,p) \leqslant C|p|^\gamma + C, \\ \dfrac{\partial H}{\partial p}(x,p) \cdot p \geqslant \gamma H(x,p) - C, \quad \left|\dfrac{\partial H}{\partial p}(x,p)\right| \leqslant C|p|^{\gamma-1} + C. \end{cases} \tag{8}$$

Théorème 2.2. *Sous les conditions précédentes et en supposant que* m_0 *est bornée, il existe une solution de* (1), (2) *vérifiant :* $v \in L_t^\gamma(W_x^{1,\gamma})$, *$v$ est minorée,* $|\nabla v|^\gamma m \in L^1_{x,t}$, $v \in C_t(L_x^q)$ *où* $q = \min(\beta, \frac{\alpha d}{d-2(\alpha-1)})$ *si* $\alpha < 1 + \frac{d}{2}$, $q = \beta$ *si* $\alpha \geqslant 1 + \frac{d}{2}$, *et* $m \in C_t(L_x^1)$.

Les bornes indiquées dans le Théorème 2.2 s'obtiennent en observant que d'une part on a

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + H(x, \nabla v) \geqslant -C, \qquad v|_{t=0} \geqslant -C$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v \leqslant C + F(x, m), \qquad v|_{t=0} = g(x, m);$$

et d'autre part on obtient en multipliant (1) par m et (2) par v (et en intégrant sur $Q \times [0, T]$)

$$\int_0^T \int_Q \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x\, Fm + \int_Q gm(0)\, \mathrm{d}x + \int_0^T \int_Q \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x \{H_p \cdot \nabla v - H\} m$$
$$= \int_Q v(T) m_0\, \mathrm{d}x \leqslant C\left(1 + \int_Q v(T)\, \mathrm{d}x\right) \leqslant C\left(1 + \int_0^T \int_Q \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x\, F\right),$$

où C désigne diverses constantes ne dépendant que des données.

Remarque. On voit que dans le cas d'opérateurs locaux, il nous faut supposer un comportement « essentiellement croissant » de F et de g par rapport à λ. Ceci n'est pas strictement nécessaire (suivant les croissances à l'infini ...) mais de telles hypothèses sont fondamentales pour le caractère bien posé du système. Nous abordons la question de l'unicité dans la section suivante mais nous indiquons dès maintenant que si $H(x, p) = \frac{1}{2}|p|^2$, $F(x, \lambda) = -c\lambda$ avec $c > 0$, $g \equiv 0$ (par exemple), le système linéarisé (autour de $m \equiv 1$, $v \equiv -ct$) suivant est en général mal posé

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = -cf, \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \nu \Delta f + \Delta u = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad f|_{t=T} = f_0.$$

Un calcul simple (sur les transformées de Fourier) montre que ce système n'est bien posé que si T est suffisamment petit ($T < \nu/c$).

3. Unicité

L'unicité des solutions du système (1), (2) est vraie dès que les opérateurs V et v_0 sont « strictement » monotones au sens suivant :

$$\int_Q \big(A[m_1] - A[m_2]\big)(m_1 - m_2)\, \mathrm{d}x \leqslant 0 \Rightarrow A[m_1] = A[m_2]. \tag{9}$$

Pour éviter des hypothèses techniques sur les solutions, nous supposons dans le résultat qui suit que les solutions sont régulières.

Théorème 3.1. *Si les opérateurs V et v_0 vérifient la condition* (9)*, alors l'unicité des solutions de* (1)*,* (2) *a lieu.*

Démonstration. Soient $v_1, m_1), (v_2, m_2)$ deux solutions de (1), (2). En multipliant par $(m_1 - m_2)$ l'équation satisfaite par $(v_1 - v_2)$ et par $(v_1 - v_2)$ celle satisfaite par $(m_1 - m_2)$, et en intégrant sur $Q \times [0, T]$, on trouve aisément

$$\int_0^T \int_Q \big(V[m_1] - V[m_2]\big)(m_1 - m_2) + m_1 \left\{ H(x, \nabla v_2) - H(x, \nabla v_1) - \frac{\partial H}{\partial p}(x, \nabla v_1) \nabla(v_2 - v_1) \right\}$$
$$+ m_2 \left\{ H(x, \nabla v_1) - H(x, \nabla v_2) - \frac{\partial H}{\partial p}(x, \nabla v_2) \nabla(v_1 - v_2) \right\} \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x$$
$$+ \int_Q \big(v_0[m_1] - v_0[m_2]\big) \cdot (m_1 - m_2)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Et il est alors facile de conclure. □

Remarque. (i) Nous avons vu dans la section précédente que si $v_0 \equiv 0$ et $V[m] = -cm$ (avec $c > 0$) le problème linéaire était mal posé. En fait, il est possible de donner des contre-exemples à l'unicité même dans des cas simples (par exemple $V \equiv 0$ et $v_0[m] = -\psi(m(x))$ où ψ est croissante). Ceci est naturel du point de vue de la théorie des jeux non coopératifs (multiplicité d'équilibres généralement inefficients).

(ii) Le rôle de la monotonie de V est crucial dans l'analyse de système (1), (2) comme le montre l'exemple $\nu = 0$, $H = \frac{1}{2}|p|^2$, $V[m] = -q(m)$ où q est une fonction donnée. En effet, dans ce cas, en posant $u = \nabla v$ on obtient le système

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla q(m) = 0, \qquad \frac{\partial m}{\partial t} + \operatorname{div}(um) = 0$$

i.e. le système des équations d'Euler compressibles dans le cas d'un flot potentiel et barotrope – voir [4] – (la pression $p(m)$ étant définie par $p(m) = \int_0^m q'(\lambda)\lambda\,\mathrm{d}\lambda$). On note alors que le système est hyperbolique (avec formation de discontinuités en temps fini) si et seulement si q est une fonction croissante, tandis qu'il est elliptique si et seulement si q est une fonction décroissante (i.e. V monotone !). Il est à noter que, dans le cas où $d = 1$, ce dernier cas apparaît dans des questions de grandes déviations en théorie des Probabilités (et leurs applications à la Physique) – voir pour plus de détails A. Guionnet et O. Zeitouni [2], A. Guionnet [1].

4. Contrôle optimal

De façon à éviter la multiplication d'hypothèses techniques, nous énonçons ici des principes variationnels associés au système (1), (2) dans le cas où $V[m]$ et $v_0[m]$ sont les gradients (par exemple dans $L^2(Q \times [0,T]), L^2(Q)$ respectivement) de fonctionnelles $\Phi(m)$ et $\Psi(m)$ respectivement.

Le premier principe correspond au contrôle optimal d'équations de type Fokker–Planck à savoir :

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \nu\Delta m + \operatorname{div}(\alpha m) = 0 \quad \text{dans } Q \times [0,T], \qquad m|_{t=T} = m_0 \quad \text{dans } Q \tag{10}$$

où $\alpha(x,t)$ représente le contrôle.

Dans ce cas, le **problème de contrôle optimal** est donné par

$$\inf_{\alpha}\left[\int_0^T \mathrm{d}t\left\{\int_Q L(x,\alpha)m\,\mathrm{d}x\right\} + \Phi(m) + \Psi\big(m(0)\big)\right], \tag{11}$$

où $H(x,p) = \sup_{\alpha}[\alpha \cdot p - L(x,\alpha)]$ $[\forall(x,p) \in Q \times \mathbb{R}^d)$. Alors, au moins formellement, un contrôle optimal α et l'état associé m permettent de construire une solution de (1), (2) où v représente l'état adjoint déterminé par : $\alpha = \frac{\partial H}{\partial p}(x, \nabla v)$,

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + H(x,\nabla v) = \Phi'(m) \quad \text{dans } Q \times [0,T], \qquad v|_{t=0} = \Psi'\big(m(0)\big) \quad \text{dans } Q. \tag{12}$$

Il est important de noter que le problème de minimisation (11) est **convexe** dès que L est convexe en α (i.e. V et v_0 sont monotones !).

Toujours dans le cas où Φ et Ψ sont convexes, le problème dual s'interprète comme un problème (également convexe bien sûr) de contrôle optimal d'équations de Hamilton–Jacobi–Bellman du type

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + H(x,\nabla v) = \beta \quad \text{dans } Q \times [0,T], \qquad v|_{t=0} = \gamma \quad \text{dans } Q, \tag{13}$$

qui s'écrit

$$\min_{(\beta,\gamma)}\left\{\Phi^*(\beta) + \Psi^*(\gamma) - \int_Q m_0 v(T)\right\}. \tag{14}$$

Ces interprétations de contrôle optimal permettent d'ailleurs, dans le cas convexe, de donner un sens d'optimalité au sens de Pareto à l'équilibre déterminé par le système (1), (2).

Remarque. Dans le cas où $H(x,p)=\frac{1}{2}|p|^2-f_0(x)$, en posant $\phi=\mathrm{e}^{-v/(2\nu)}$, le problème (14) s'interprète comme un problème de contrôle optimal de

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}-\nu\Delta\phi+(f_0+\beta)\phi=0\quad\text{dans } Q\times[0,T]$$

par le potentiel β.

Ainsi que nous l'avons indiqué dans [3], de multiples variantes et extensions sont possibles correspondant à des dynamiques stochastiques plus générales, des interactions entre joueurs plus complexes dans les dynamiques, et des critères à minimiser (pour chaque joueur) plus complexes. De manière générale, on aboutit ainsi à une classe de systèmes de la forme

$$\frac{\partial v}{\partial t}-F\big(x,t,\nabla v,D^2v;m\big)=0\quad\text{dans } Q\times[0,T],\qquad v|_{t=0}=v_0[m],\tag{15}$$

$$\frac{\partial m}{\partial t}+D^2\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial A}m\right)+\left(\operatorname{div}\frac{\partial F}{\partial p}m\right)=0\quad\text{dans } Q\times[0,T],\qquad m|_{t=T}=m_0\tag{16}$$

où $F(x,t,p,A;m)$ est croissant en A pour l'ordre partiel des matrices symétriques (conditions d'ellipticité) et la dépendance en m est fonctionnelle.

Sont également possibles et naturels des problèmes à frontière libre du type problème d'obstacle à la place de (15) auquel cas l'équation (16) est posée dans la zone de décollement de l'obstacle.

D'autres variantes concernent la possibilité d'incorporer dans l'équation (2) (ou (16)) – ainsi que dans l'équation (1) (ou (15)) – des termes de second membre (de type source) comme par exemple $f(x,t,v(x,t),m(x,t))$ correspondant à la « création » ou à la « destruction » de joueurs.

Signalons aussi deux directions possibles. La première correspond à la possibilité d'avoir des termes de « diffusion » (ou de « dérive ») supplémentaires dans l'équation de la densité m. La deuxième concerne la possibilité d'obtenir des développements asymptotiques en N pour les équilibres de Nash à N joueurs (au moins dans le cas symétrique ...).

Enfin, une direction importante correspond au cas de plusieurs populations d'un grand nombre de joueurs identiques au sein de chacune des populations. Les équilibres de champ moyen se traduisent alors par des système de type (dans le cas de deux populations pour simplifier les notations ...).

$$\frac{\partial v^i}{\partial t}-\nu^i\Delta v^i+H^i\big(x,\nabla v^i\big)=V^i[m_1,m_2],\qquad v^i|_{t=0}=v_0^i[m_1,m_2],$$

$$\frac{\partial m^i}{\partial t}+\nu^i\Delta m^i+\operatorname{div}\left(\frac{\partial H^i}{\partial p}\big(x,\nabla v^i\big)m^i\right)=0,\qquad m^i|_{t=T}=m_0^i$$

pour $i=1,2$ (système qui correspond à l'extension la plus élémentaire du système (1), (2), ...).

Ces extensions et variantes, ainsi que les démonstrations des résultats (ou les énoncés précis des principes) énoncés dans cette Note, seront détaillés dans des publications ultérieures.

Références

[1] A. Guionnet, First order asymptotics of matrix integrals: a rigorous approach towards the understanding of matrix models, Comm. Math. Phys. 244 (2003) 527–569.
[2] A. Guionnet, O. Zeitouni, Large deviations asymptotics for spherical integrals, J. Funct. Anal. 188 (2001) 461–515.
[3] J.-M. Lasry, P.-L. Lions, Jeux à champ moyen. I – Le cas stationnaire, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006), doi:10.1016/j.crma.2006.09.019.
[4] P.-L. Lions, Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Oxford Science Publications, vol. 1, Clarendon Press, Oxford, 1996; vol. 2, 1998.

Pour en savoir plus

[5] R. Aumann, Markets with a continuum of trackers, Econometrica 32 (1964) 39–50.
[6] A. Bensoussan, J. Frehse, Nonlinear elliptic systems in stochastic game theory, J. Reine Angew. Math. 350 (1984) 23–67.
[7] A. Bensoussan, J. Frehse, Ergodic Bellman systems for stochastic games in arbitrary dimension, Proc. Roy. Soc. Edin. A 449 (1995) 65–77.
[8] G. Carmona, Nash equilibria of games with a continuum of players, Reprint, 2004.
[9] J.-M. Lasry, P.-L. Lions, Towards a self-consistent theory of volatility, J. Math. Pures Appl. (2006).