Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006) 179–184
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles/Physique mathématique

Entropies d'ordre supérieur

Vincent Giovangigli

CMAP-CNRS, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

Reçu le 2 décembre 2005 ; accepté après révision le 13 juin 2006

Présenté par Pierre-Louis Lions

Résumé

Les entropies d'ordre supérieur sont des estimateurs d'entropie cinétique pour les modèles fluides. Ces quantités sont quadratiques en les dérivées de la vitesse v et la température T avec des coefficients dépendants de T. Elles satisfont des inégalités entropiques si $\| \log T \|_{\mathrm{BMO}} + \| v/\sqrt{T} \|_{L^\infty}$ est assez petite, pouvu que la dépendance de la conductivité thermique λ et de la viscosité η en la température soit celle de la théorie cinétique. On obtient dans cette situation de nouvelles estimations a priori des solutions. On établit ensuite un théorème d'existence globale lorsque les données initiales $\log(T_0/T_\infty)$ and $v_0/\sqrt{T_0}$ sont assez petites dans des espaces appropriés. ***Pour citer cet article : V. Giovangigli, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***
© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Higher order entropies. Higher order entropies are kinetic entropy estimators for fluid models. These quantities are quadratics in the velocity v and temperature T derivatives and have temperature dependent coefficients. We establish entropic inequalities when $\| \log T \|_{\mathrm{BMO}} + \| v/\sqrt{T} \|_{L^\infty}$ is small enough, provided that the temperature dependence of the thermal conductivity λ and the viscosity η is that given by the kinetic theory. In this situation, new a priori estimates for solutions are obtained. We next establish a global existence theorem when the initial values $\log(T_0/T_\infty)$ and $v_0/\sqrt{T_0}$ are small enough in appropriate spaces. ***To cite this article: V. Giovangigli, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***
© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

The notion of entropy has been shown to be of fundamental importance in fluid modeling from a physical and/or mathematical point of view [1,4–6,8–10]. In this note, we introduce higher order kinetic entropy estimators which are then used to estimate the solutions of a fluid model [7].

In a kinetic framework, second order kinetic entropy correctors obtained from Enskog expansion are quadratics in the temperature and velocity gradients. These notions are generalized by considering higher order terms in Enskog expansion of kinetic entropy and this suggests the quantity $\gamma^{[k]}$ as a $(2k)$th order kinetic entropy correctors. A parallel can also be made with Bernstein method for the heat equation and $\gamma^{[k]}$ can also be associated with Fisher information.

Adresse e-mail : vincent.giovangigli@polytechnique.fr (V. Giovangigli).

1631-073X/$ – see front matter © 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2006.06.018

We investigate higher order kinetic entropy estimators in the situation of incompressible flows spanning the whole space (1)–(3) with temperature dependent thermal conductivity λ and viscosity η. The cases of compressible flows or zero Mach number flows are beyond the scope of the present work. The temperature dependence of viscosity and thermal conductivity is assumed to be that given by the kinetic theory (4). That is, away from small temperatures, these coefficients essentially behave like a power of temperature with a common exponent $\varkappa$ [5,6]. In addition, we only consider smooth solutions (5) and the momentum equation is considered as projected onto the space of divergence free functions (6).

In this situation, we derive in Proposition 2.1 a balance equation (8) for kinetic entropy deviation estimators $\gamma^{[k]}$ of arbitrary order (7). These quantities are quadratic in the velocity and temperature derivatives with temperature dependent coefficients. We obtain in Propositions 2.2 a priori estimates and positivity of higher order derivative source terms when $\|\log T\|_{\mathrm{BMO}} + \|v/\sqrt{T}\|_{L^\infty}$ is small enough [7]. The convective terms are also majorized thanks to the temperature dependence of transport coefficients as given by the kinetic theory of gases, that is, only when $\varkappa \geqslant 1/2$. In order to establish these estimates, we use the Coifman–Meyer inequalities for multilinear operators and weighted interpolation inequalities for intermediate derivatives with weights in Muckenhoupt classes [2,11,7]. Very similar results are also obtained for the estimators $\tilde{\gamma}^{[k]}$. It is finally found in Theorem 2.3 that when $\varkappa \geqslant 1/2$, the kinetic entropy estimators $\Gamma^{[k]} = \gamma^{[0]} + \cdots + \gamma^{[k]}$ and $\widetilde{\Gamma}^{[k]} = \tilde{\gamma}^{[0]} + \cdots + \tilde{\gamma}^{[k]}$, $k \geqslant 0$, satisfy entropic principles [7].

As a consequence, new a priori estimates are obtained for solutions of inhomogeneous Navier–Stokes equations such that $\chi = \|\log T\|_{\mathrm{BMO}} + \|v/\sqrt{T}\|_{L^\infty}$ is small enough. The quantity χ is invariant by the scaling of Remark 1 and we also have $\chi = \mathcal{O}(\mathrm{Ma})$, where Ma is the Mach number, which is of the same order than the Knudsen number [8]. As a typical application, we establish in Theorem 3.1 a global existence result provided that $\log(T_0/T_\infty)$ and $v_0/\sqrt{T_0}$ are small enough in appropriate spaces.

1. Introduction

La notion d'entropie joue un rôle fondamental dans la modélisation des fluides d'un point de vue à la fois physique et mathématique [1,4–6,8–10]. Nous introduisons dans cette note des estimateurs d'entropie cinétique d'ordre supérieur que nous utilisons pour estimer les solutions d'un modèle fluide [7].

L'état d'un gaz monoatomique est décrit par une distribution de particules $f(t,x,c)$—régie par une équation de Boltzmann—où t désigne le temps, x les coordonnées d'espace à n dimensions, et c la vitesse des particules [1,4–6]. Les grandeurs physiques que nous considérons sont supposées avoir été adimensionées. L'entropie cinétique $\mathcal{S}^{\mathrm{kin}} = -\int_{\mathbb{R}^n} f(\log f - 1)\,\mathrm{d}c$ vérifie un théorème H [1,4–6,8]. Le développement de Enskog de $\mathcal{S}^{\mathrm{kin}}$ induit par celui de f s'écrit $\mathcal{S}^{\mathrm{kin}} = S^{(0)} + \varepsilon^2 S^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$ où $S^{(0)}$ est l'entropie macroscopique évaluée à partir de la distribution Maxwellienne $f^{(0)} = \rho(\pi T)^{-n/2}\exp(-(c-v)^2/T)$, ε le paramètre formel du développement de Enskog, ρ la densité, T la température et v la vitesse. On établit également que $S^{(2)} = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(\phi^{(1)})^2 f^{(0)}\,\mathrm{d}c$ où $\phi^{(1)}$ la perturbation associée au régime de Navier–Stokes et que $-\rho S^{(2)} = \bar{\lambda}|\partial_x T|^2 + \frac{1}{2}\bar{\eta}|d|^2$ où d est le tenseur des taux de déformation $d = \partial_x v + \partial_x v^t - \frac{2}{n}(\partial_x \cdot v)I$. Les coefficients scalaires $\bar{\lambda}$ et $\bar{\eta}$ ne dépendent que de T et en première approximation $\bar{\lambda} = c_\lambda \lambda^2/T^3$ et $\bar{\eta} = c_\eta \eta^2/T^2$ où λ est la conductivité thermique, η la viscosité et $c_\lambda > 0$, $c_\eta > 0$ des constantes [7].

Plus généralement, un développement $f/f^{(0)} = 1 + \varepsilon\phi^{(1)} + \cdots + \epsilon^{2k}\phi^{(2k)} + \mathcal{O}(\varepsilon^{2k+1})$ induit un développement $\mathcal{S}^{\mathrm{kin}} - S^{(0)} = \varepsilon^2 S^{(2)} + \varepsilon^3 S^{(3)} + \cdots + \varepsilon^{2k} S^{(2k)} + \mathcal{O}(\varepsilon^{2k+1})$ où $S^{(l)}$ est une somme de termes de la forme $\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{1\leqslant i\leqslant l}(\phi^{(i)})^{\nu_i} f^{(0)}\,\mathrm{d}c$ où les $\nu_i \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant l$, sont des entiers tels que $l = \sum_{1\leqslant i\leqslant l} i\nu_i$. A partir d'une expression générale de $\phi^{(l)}$, on établit alors que

$$S^{(2k)} = \left(\frac{\eta}{\rho\sqrt{T}}\right)^{2k} \sum_{\nu} c_\nu \prod_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2k} \left(\frac{\partial^\alpha T}{T}\right)^{\nu_\alpha} \left(\frac{\partial^\beta \rho}{\rho}\right)^{\nu'_\alpha} \left(\frac{\partial^\delta v}{\sqrt{T}}\right)^{\nu''_\alpha}$$

où la sommation s'étend aux multiindices α, et aux entiers ν_α, ν'_α, ν''_α, tels que $\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2k}|\alpha|(\nu_\alpha + \nu'_\alpha + \nu''_\alpha) = 2k$ et où les coefficients c_ν sont des fonctions scalaires lisses de $\log T$ d'ordre unité. Après intégration par partie pour éliminer les dérivations d'ordre supérieur à k dans $\int_{\mathbb{R}^n} S^{(2k)}\,\mathrm{d}x$, et par interpolation, on observe que la quantité $|\int_{\mathbb{R}^n} S^{(2k)}\,\mathrm{d}x|$ est essentiellement contôlée par l'intégrale de

$$\gamma^{[k]} = \rho\left(\frac{\eta}{\rho\sqrt{T}}\right)^{2k}\left(\left|\frac{\partial^k T}{T}\right|^2 + \left|\frac{\partial^k v}{\sqrt{T}}\right|^2 + \left|\frac{\partial^k \rho}{\rho}\right|^2\right).$$

Ceci suggère d'étudier des grandeurs de la forme $\gamma^{[k]}$ comme défaut d'entropie cinétique d'ordre $2k$, l'expression générale de $S^{(2k)}$ semblant difficilement utilisable. Diverses généralisations des $\gamma^{[k]}$ sont également considérées dans la section suivante. Des études similaires pour l'information de Fisher conduisent à introduire les mêmes quantités comme estimateurs d'information. Un parallèle peut être aussi fait avec la méthode de Bernstein pour l'équation de la chaleur $\partial_t u - \Delta u = 0$, car en définissant $\zeta^{[k]} = |\partial^k u|^2$ on obtient l'équation de bilan $\partial_t \zeta^{[k]} - \Delta\zeta^{[k]} + 2\zeta^{[k+1]} = 0$, et $\zeta^{[k]}$ peut être considérée comme une entropie d'ordre $2k$.

Nous nous intéressons dans la suite aux propriétés d'entropicité des estimateurs d'entropie cinétique $\Gamma^{[l]} = \gamma^{[0]} + \cdots + \gamma^{[l]}$, avec $0 \leqslant l \leqslant k$, pour les solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles modélisant un fluide. Pour ce système d'équations aux dérivées partielles, il existe une unique entropie d'ordre zero compatible avec sa structure hyperbolique–parabolique et qui sert à définir $\gamma^{[0]}$ [9,6]. On ne considère donc les grandeurs $\gamma^{[0]} + \cdots + \gamma^{[l]}$, $0 \leqslant l \leqslant k$, que comme une famille d'estimateurs entropiques mathématiques—d'origine cinétique—qui doit nous fournir des estimations à priori sur les solutions des équations fluides. Ce point de vue diffère notamment de ceux la thermodynamique étendue ou des modèles de type Burnett qui considèrent des équations aux dérivées partielles d'ordre plus élevés.

2. Estimations entropiques d'ordre supérieur

Nous nous intéressons aux solutions des équations des fluides incompressibles, les cas compressibles ou zero-Mach sortant du cadre de cette note. Ces équations, une fois adimensionées, s'écrivent [10]

$$\partial_x \cdot v = 0, \tag{1}$$

$$\partial_t v + \partial_x \cdot (v \otimes v + pI) - \partial_x \cdot \big(\eta(T) d\big) = 0, \tag{2}$$

$$\partial_t T + \partial_x \cdot (vT) - \partial_x \cdot \big(\lambda(T)\partial_x T\big) = \frac{1}{2}\eta(T) d : d, \tag{3}$$

où v est la vitesse, p la pression, $d = \partial_x v + \partial_x v^t$ le tenseur des déformations, $\eta(T)$ la viscosité, T la température et $\lambda(T)$ la conductivité thermique. Toutes ces grandeurs sont sans dimensions et nous avons supposé pour simplifier que l'énergie interne est proportionnelle à la température. La théorie cinétique [5–7] et le principe du minimum conduisent par ailleurs à supposer que λ et η sont $C^\infty(0, \infty)$ et telles qu'il existe $\varkappa$, $\underline{\mathfrak{a}} > 0$, $\bar{\mathfrak{a}} > 0$, et $\bar{\mathfrak{a}}_\sigma > 0$, pour tout entier $\sigma \geqslant 1$, avec

$$\underline{\mathfrak{a}} T^\varkappa \leqslant \lambda \leqslant \bar{\mathfrak{a}} T^\varkappa, \qquad \underline{\mathfrak{a}} T^\varkappa \leqslant \eta \leqslant \bar{\mathfrak{a}} T^\varkappa, \qquad T^\sigma \big(\big|\partial_T^\sigma \lambda\big| + \big|\partial_T^\sigma \eta\big|\big) \leqslant \bar{\mathfrak{a}}_\sigma T^\varkappa. \tag{4}$$

La théorie cinétique suggère que $1/2 \leqslant \varkappa \leqslant 1$ mais les cas $0 \leqslant \varkappa < 1/2$ ou $\varkappa > 1$ sont aussi intéressants d'un point de vue mathématique. On ne s'intéresse qu'aux solutions régulières de (1)–(3) dans $\mathbb{R}^n$ où $n \geqslant 2$ qui sont « constantes à l'infini ». Pour l entier tel que $l \geqslant [n/2] + 2$ et $\bar{t} > 0$, on suppose

$$v, T - T_\infty \in C\big([0, \bar{t}\,], H^l\big) \cap C^1\big([0, \bar{t}\,], H^{l-2}\big) \cap L^2\big([0, \bar{t}\,], H^{l+1}\big), \tag{5}$$

et ces solutions sont lisses en fonction des conditions initiales. La viscosité η n'étant pas constante, la conservation du mouvement s'écrit $\partial_t v = \mathbb{P}(\partial_x \cdot (-v \otimes v + \eta(T) d))$, où $\mathbb{P}$ est le projecteur de Leray défini sur $L^2(\mathbb{R}^n)^n$ par $\mathbb{P} = \mathbb{I} + R \otimes R$ avec $R = (R_1, \ldots, R_n)^t$ où $R_i = (-\Delta)^{-1/2}\partial_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont les transformations de Riesz. Ceci revient à définir

$$p = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} R_i R_j (v_i v_j - \eta d_{ij}), \tag{6}$$

et on a alors $p \in C([0, \bar{t}\,], H^l) \cap C^1([0, \bar{t}\,], H^{l-2}) \cap L^2([0, \bar{t}\,], H^{l+1})$ avec $\partial_k p = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} R_k R_j (v_i \partial_i v_j - 2\partial_T \eta \partial_i T \partial_j v_i)$.

Remarque 1. Dans le cas particulier où $\lambda = \mathfrak{a}_\lambda T^\varkappa$ et $\eta = \mathfrak{a}_\eta T^\varkappa$, $\mathfrak{a}_\lambda$ et $\mathfrak{a}_\eta$ étant des constantes, si $v(t, x)$ et $T(t, x)$ sont solutions de (1)–(3), alors $\xi v(\xi^{2(1-\varkappa)} t, \xi^{(1-2\varkappa)} x)$ et $\xi^2 T(\xi^{2(1-\varkappa)} t, \xi^{(1-2\varkappa)} x)$ sont aussi solutions pour tout $\xi > 0$.

On généralise maintenant les correcteurs entropiques suggérés par la théorie cinétique. On considère d'une part de nouveaux correcteurs $\tilde{\gamma}^{[k]}$ d'ordre $2k$—dont on établira qu'ils ont des propriétés voisines des $\gamma^{[k]}$—et on suppose d'autre part que ces correcteurs $\gamma^{[k]}$ et $\tilde{\gamma}^{[k]}$ ont des facteurs de renormalisation faisant intervenir des puissances quelconques de la température a_k, $k \geqslant 0$, avec

$$\gamma^{[k]} = \frac{|\partial^k T|^2}{T^{1+a_k}} + \frac{|\partial^k v|^2}{T^{a_k}}, \qquad \tilde{\gamma}^{[k]} = \frac{1}{T^{a_k-1}}\big(\big|\partial^k \log T\big|^2 + \big|\partial^k (v/\sqrt{T})\big|^2\big), \tag{7}$$

où $|\partial^k T|^2 = \sum_{|\alpha|=k} (k!/\alpha!)(\partial^\alpha T)^2$ et $|\partial^k v|^2 = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\partial^k v_i|^2$, et où $k!/\alpha!$ sont les coefficients multinomiaux [3].

Proposition 2.1. *Soit $k \geqslant 1$ un entier et (v, T) une solution lisse des équations de Navier–Stokes incompressible* (1)–(3) *où λ est la conductivité thermique et η la viscosité . On a alors l'équation de bilan*

$$\partial_t \gamma^{[k]} + \partial_x\cdot\big(v\gamma^{[k]}\big) + \partial_x\cdot\varphi_\gamma^{[k]} + \pi_\gamma^{[k]} + \Sigma_\gamma^{[k]} + \omega_\gamma^{[k]} = 0, \tag{8}$$

où $\varphi_\gamma^{[k]}$ est un flux et $\pi_\gamma^{[k]} + \Sigma_\gamma^{[k]} + \omega_\gamma^{[k]}$ un terme source. Les termes $\pi_\gamma^{[k]}$ et $\Sigma_\gamma^{[k]}$ s'écrivent

$$\pi_\gamma^{[k]} = 2\lambda \frac{|\partial^{k+1} T|^2}{T^{1+a_k}} + 2\eta \frac{|\partial^{k+1} v|^2}{T^{a_k}}, \tag{9}$$

$$\Sigma_\gamma^{[k]} = \sum_{\sigma\nu\mu} \big(c_{\sigma\nu\mu}\partial_T^\sigma \lambda + c'_{\sigma\nu\mu}\partial_T^\sigma \eta\big) T^{\sigma-\varkappa} \Pi_\nu^{(k+1)} \Pi_\mu^{(k+1)} + \sum_{\sigma\nu\mu\mathcal{R}} c_{\sigma\nu\mu\mathcal{R}} \Pi_\nu^{(k+1)} \mathcal{R}\big(T^{\sigma-\varkappa}\partial_T^\sigma \eta \Pi_\mu^{(k+1)}\big), \tag{10}$$

où l'on somme sur $0 \leqslant \sigma \leqslant k$, $\nu = (\nu_\alpha, \nu'_\alpha)_{1\leqslant|\alpha|\leqslant k+1}$, $\mu = (\mu_\alpha, \mu'_\alpha)_{1\leqslant|\alpha|\leqslant k+1}$, $\nu_\alpha, \nu'_\alpha, \mu_\alpha, \mu'_\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, et pour $\mathcal{R}$ opérateur singulier de la forme $T^{-\theta} R_i R_j T^\theta$ avec $\theta = (a_k + \varkappa)/2$ et $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Les produits $\Pi_\nu^{(k+1)}$ et $\Pi_\mu^{(k+1)}$ sont définis par

$$\Pi_\nu^{(k+1)} = T^{(1-a_k+\varkappa)/2} \prod_{1\leqslant|\alpha|\leqslant k+1} \left(\frac{\partial^\alpha T}{T}\right)^{\nu_\alpha} \left(\frac{\partial^\alpha v}{\sqrt{T}}\right)^{\nu'_\alpha}$$

où v représente—par un léger abus de notation—une quelconque de ses composantes $v_1, \ldots, v_n$, et μ et ν sont tels que

$$\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant k+1} |\alpha|(\nu_\alpha + \nu'_\alpha) = k+1,$$

$$\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant k+1} |\alpha|(\mu_\alpha + \mu'_\alpha) = k+1,$$

$$\sum_{|\alpha|=k+1} (\nu_\alpha + \nu'_\alpha + \mu_\alpha + \mu'_\alpha) \leqslant 1,$$

de telle sorte qu'il y a au plus une dérivée d'ordre $k+1$ dans le produit $\Pi_\nu^{(k+1)}\Pi_\mu^{(k+1)}$, et les coefficients $c_{\sigma\nu\mu}$, $c'_{\sigma\nu\mu}$, et $c_{\sigma\nu\mu\mathcal{R}}$ sont des constantes. Enfin, le terme $\omega_\gamma^{[k]}$ s'écrit

$$\omega_\gamma^{[k]} T^{-(1-2\varkappa+a_{k-1}-a_k)/2} = \sum_{\nu\mu} c_{\nu\mu} \Pi_\nu^{(k)} \Pi_\mu^{(k+1)} + \sum_{\nu\mu\mathcal{R}} c_{\nu\mu\mathcal{R}} \Pi_\nu^{(k)} \mathcal{R}\big(\Pi_\mu^{(k+1)}\big), \tag{11}$$

où l'on somme sur

$$\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant k} |\alpha|(\nu_\alpha + \nu'_\alpha) = k, \qquad \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant k} |\alpha|(\mu_\alpha + \mu'_\alpha) = k+1,$$

avec en particulier $\sum_{|\alpha|=k+1} (\mu_\alpha + \mu'_\alpha) = 0$ et il y a toujours au moins deux facteurs dans le produit $\Pi_\mu^{(k+1)}$, et où $\mathcal{R}$ est un opérateur sigulier de la forme $T^{-\theta} R_i R_j T^\theta$ avec $\theta = (1 + a_k - \varkappa)/2$ and $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

On introduit maintenant $\chi = \|\log T\|_{\mathrm{BMO}} + \|v/\sqrt{T}\|_{L^\infty}$ et on va établir diverses estimations des termes de l'équation de bilan de $\gamma^{[k]}$ lorsque χ est assez petite.

Proposition 2.2. *On considère une solution lisse* (v,T) *des équations de Navier–Stokes. Il existe des constantes* $\delta(k,n)$ *et* $c(k,n)$ *telles que pour* $\chi<\delta$ *on ait*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\Sigma_\gamma^{[k]}\right| \mathrm{d}x \leqslant c\chi \int_{\mathbb{R}^n} \pi_\gamma^{[k]}\,\mathrm{d}x, \tag{12}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\omega_\gamma^{[k]}\right| \mathrm{d}x \leqslant c\chi \sup_{\mathbb{R}^n}\left\{T^{(1-2\varkappa+a_{k-1}-a_k)/2}\right\}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \pi_\gamma^{[k-1]}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \pi_\gamma^{[k]}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}. \tag{13}$$

Ces estimations impliquent notamment que $(1-c\chi)\int_{\mathbb{R}^n}\pi_\gamma^{[k]}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}(\pi_\gamma^{[k]}+\Sigma_\gamma^{[k]})\,\mathrm{d}x \leqslant (1+c\chi)\int_{\mathbb{R}^n}\pi_\gamma^{[k]}\,\mathrm{d}x$ dès lors que χ est assez petite. La démonstration de la Proposition 2.2 repose essentiellement sur les propriétés des opérateurs de Calderón–Zygmund avec poids dans les classes de Muckenhoupt et sur les estimations multilinéaires de Coifman–Meyer avec poids [2,11,7]. Pour les entropies d'ordre supérieur $\tilde\gamma^{[k]}$ on établit par ailleurs que $\int_{\mathbb{R}^n}|\gamma^{[k]}-\tilde\gamma^{[k]}|\,\mathrm{d}x \leqslant c\chi\int_{\mathbb{R}^n}\gamma^{[k]}\,\mathrm{d}x$ et donc que $\int_{\mathbb{R}^n}\gamma^{[k]}\,\mathrm{d}x$ et $\int_{\mathbb{R}^n}\tilde\gamma^{[k]}\,\mathrm{d}x$ sont asymptotiquement équivalentes pour $\chi\to 0$, justifiant ainsi leur utilisation. On établit aussi pour $\tilde\gamma^{[k]}$ des équations de bilan et des estimations tout à fait analogues à celles des Propositions 2.1 et 2.2 [7].

On définit

$$\gamma^{[0]} = \frac{T-T_\infty}{T_\infty} - \log\left(\frac{T}{T_\infty}\right) + \frac{1}{2}\frac{v^2}{T_\infty} \quad \text{si } a_0=1,$$

$$\gamma^{[0]} = \frac{T-T_\infty}{T_\infty^{a_0}} - \frac{T^{1-a_0}-T_\infty^{1-a_0}}{1-a_0} + \frac{1}{2}\frac{v^2}{T_\infty^{a_0}} \quad \text{si } 0<a_0<1,$$

$$\tilde\gamma^{[0]} = \gamma^{[0]},$$

et on peut facilement écrire une équation de bilan pour $\gamma^{[0]}$ à partir du bilan entropique classique d'ordre zero. On introduit alors les estimateurs d'entropie cinétique d'ordre $2k$ définis par $\Gamma^{[k]}=\gamma^{[0]}+\cdots+\gamma^{[k]}$, $k\geqslant 0$, et $\widetilde\Gamma^{[k]}=\tilde\gamma^{[0]}+\cdots+\tilde\gamma^{[k]}$, $k\geqslant 0$. D'un point de vue terminologie, on devrait appeler $\gamma^{[k]}$ et $\tilde\gamma^{[k]}$ « estimateurs entropiques mathématiques partiels d'ordre $2k$ » et $\Gamma^{[k]}$ et $\widetilde\Gamma^{[k]}$ « estimateurs entropiques mathématiques d'ordre $2k$ » ou « estimateurs d'entropie cinétique d'ordre $2k$ ». On les appelera informellement « entropies d'ordre supérieur » pour plus de simplicité.

On doit maintenant préciser l'échelle des puissances de la température a_k, $k\geqslant 0$, qui renormalisent les dérivées successives de v et T dans (7). Afin de supprimer les facteurs $\sup_{\mathbb{R}^n} T^{1-2\varkappa+a_{k-1}-a_k}$ des estimations (13) des termes convectifs, un première possibilité est d'imposer que $1-2\varkappa+a_{k-1}-a_k=0$, $k\geqslant 1$, et donc que $a_k=a_0+k(1-2\varkappa)$, $k\geqslant 0$. Cette échelle de température satisfait à l'exigence naturelle que des estimations pour $\gamma^{[k-1]}$ et $\pi_\gamma^{[k-1]}$ associées aux inégalités (12) et (13) donnent des estimations pour $\gamma^{[k]}$ et $\pi_\gamma^{[k]}$. Cette échelle correspond aussi à celle suggérée par la théorie cinétique des gaz car le facteur $(\eta/\sqrt{T})^{2k}$ de $S^{(2k)}$ redonne l'exposant $k(1-2\varkappa)$. Cette échelle peut donc être appelée l'échelle naturelle, et alors a_k décroit avec k pour les valeurs physiques $\varkappa\geqslant 1/2$, alors que, au contraire, a_k croit avec k pour les valeurs non physiques $0\leqslant\varkappa<1/2$.

Une autre échelle de puissances de la température possible est l'échelle uniforme $a_k=a_0$, $k\geqslant 0$. Cette échelle n'a d'intérêt que lorsque $\varkappa\geqslant 1/2$ de telle sorte que les facteurs $\sup_{\mathbb{R}^n} T^{1-2\varkappa+a_{k-1}-a_k}$ des estimations (13) des termes convectifs ont une puissance négative et sont donc majorés en fonction des données par le principe du minimum appliqué à T. Cette échelle est très pratique pour obtenir des estimations des dérivées successives de $\log T$ et $v/\sqrt{T}$, et c'est l'échelle que l'on utilise ci-dessous. On obtient des résultat très semblables avec l'échelle naturelle de puissances de la température [7].

Théorème 2.3. *Soit* (v,T) *une solutions lisse des équations de Navier–Stokes incompressible* (1)–(3). *Supposons que* $\varkappa\geqslant 1/2$ $a_l=a_0$, $l\geqslant 0$, $T_{\min}\leqslant T$, *soit* $k\geqslant 1$ *fixé et soit* $\underline{b}=\underline{\mathfrak{a}}/\rho$. *Il existe une constante positive* $\delta_U(k,n,T_{\min})$ *telles que pour* $\chi<\delta_U$ *on ait*

$$\partial_t\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma^{[k]}\,\mathrm{d}x + \underline{b}\int_{\mathbb{R}^n}T^\varkappa\left(\Gamma^{[k+1]}-\gamma^{[0]}\right)\mathrm{d}x \leqslant 0, \qquad \partial_t\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde\Gamma^{[k]}\,\mathrm{d}x + \underline{b}\int_{\mathbb{R}^n}T^\varkappa\left(\widetilde\Gamma^{[k+1]}-\tilde\gamma^{[0]}\right)\mathrm{d}x \leqslant 0. \tag{14}$$

Ce théorème montre que les estimateurs d'entropie cinétique $\Gamma^{[k]} = \gamma^{[0]} + \gamma^{[1]} + \cdots + \gamma^{[k]}$ et $\widetilde{\Gamma}^{[k]} = \tilde{\gamma}^{[0]} + \tilde{\gamma}^{[1]} + \cdots + \tilde{\gamma}^{[k]}$ d'ordre $2k$ obéissent effectivement à des principes entropiques pour les solutions des équations (1)–(3). Ces principes entropiques conduisent donc à de nouvelles estimations dès lors que la quantité $\chi = \|\log T\|_{\mathrm{BMO}} + \|v/\sqrt{T}\|_{L^\infty}$ est suffisamment petite. On note que χ est invariante par les transformations de changement d'échelle de la Remarque 1 et fait intervenir les variables naturelles $\log T$ et $v/\sqrt{T}$ qui apparaissent dans les distributions Maxwelliennes. Une contrainte de la forme $\chi < \delta$ peut aussi être interprétée heuristiquement—selon les variables réduites utilisées—comme une contrainte sur le nombre de Mach car on a formellement $\log(T/T_\infty) = \mathcal{O}(\mathrm{Ma})$ et $v/\sqrt{rT} = \mathcal{O}(\mathrm{Ma})$. On sait par ailleurs que les nombres de Knudsen et de Mach sont du même ordre de grandeur et supposer que le nombre de Mach est faible est compatible avec le cadre cinétique [8].

3. Application à la stabilité asymptotique

Avec un théorème d'existence local et les estimations entropiques d'ordre supérieur, on établit le résultat suivant de stabilité asymptotique [7].

Théorème 3.1. *Soient $n \geqslant 2$ et $l \geqslant [n/2] + 2$. Supposons que les coefficients λ et η vérifient les hypothèses* (4) *avec un exposant $\varkappa \geqslant 1/2$. Il existe $\delta_\Gamma(l, n, T_{\min}) > 0$ tel que pour T_0 et v_0 vérifiant $T_{\min} \leqslant \inf_{\mathbb{R}^n} T_0$, $\partial_x \cdot v_0 = 0$, $v_0, T_0 - T_\infty \in H^k$, $k \in \mathbb{N}$, et $\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\Gamma}_0^{[l]} \,\mathrm{d}x \leqslant \delta_\Gamma$ il existe une unique solution globale lisse telle que $v, T - T_\infty \in C([0,\infty), H^l(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,\infty), H^{l-2}(\mathbb{R}^n))$, $\lim_{t\to\infty}(T, v) = (T_\infty, 0)$ et on a les estimations*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\Gamma}^{[l]} \,\mathrm{d}x + \underline{b} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} T^{\varkappa} \big(\widetilde{\Gamma}^{[l+1]} - \tilde{\gamma}^{[0]}\big) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\Gamma}_0^{[l]} \,\mathrm{d}x. \tag{15}$$

Remarque 2. Les idées présentées dans cette Note peuvent être adaptées aux cas compressibles ou zero Mach mutatis mutandis.

Références

[1] C. Cercignani, The Boltzmann Equation and Its Applications, Applied Mathematical Sciences, vol. 67, Springer-Verlag, 1988.
[2] R.R. Coifman, C. Fefferman, Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, Studia Mathematica LI (1974) 241–250.
[3] L. Comtet, Analyse Combinatoire, Tomes I et II, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.
[4] L. Desvillettes, C. Villani, On the trend to global equilibrium for spatially inhomogeneous kinetic systems: the Boltzmann equation, Inventiones Mathematicae 159 (2005) 245–316.
[5] J.H. Ferziger, H.G. Kaper, Mathematical Theory of Transport Processes in Gases, North-Holland, 1972.
[6] V. Giovangigli, Multicomponent Flow Modeling, Birkhäuser, Boston, 1999.
[7] V. Giovangigli, Higher order entropies, Rapport Interne CMAP 592, 2005, soumis pour publication.
[8] F. Golse, From kinetic to macroscopic models, in: B. Perthame, L. Desvillettes (Eds.), Kinetic Equations and Asymptotic Theory, in: Series in Applied Mathematics, Gauthier-Villars/Elsevier, 2000.
[9] S. Kawashima, Systems of a hyperbolic-parabolic composite type, with applications to the equations of magnetohydrodynamics, Doctoral Thesis, Kyoto University, 1984.
[10] P.L. Lions, Mathematical Topics in Fluid Mechanics, vols. 1 and 2, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Oxford Univ. Press, Oxford, 1996, and 1998.
[11] Y. Meyer, R. Coifman, Ondelettes et Opérateurs, volume 3 : Opérateurs Multilinéaires, Hermann, Paris, 1991.