Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006) 23–25
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse mathématique

Équations paraboliques du type de Von Kármán sur les variétés kählériennes

Pascal Cherrier [a], Albert Milani [b]

[a] *26, avenue du Château, 92340 Bourg la Reine, France*
[b] *Department of Mathematics, University of Wisconsin – Milwaukee, P.O. Box 413, Milwaukee, WI 53201, États-Unis*

Reçu le 10 mars 2006 ; accepté le 25 mars 2006

Présenté par Thierry Aubin

Résumé

Étude d'un problème parabolique associé à un système elliptique de type Von Kármán sur une variété kählérienne compacte. Existence de solutions locales en temps admettant divers types de régularité. Prolongement en solutions globales bornées si les données du problème sont suffisamment petites. ***Pour citer cet article : P. Cherrier, A. Milani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***
© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Parabolic equations of Von Kármán type on Kähler manifolds. Study of a parabolic version of a system of Von Kármán type on a compact Kähler manifold. Existence of local in time regular solutions, which can be extended to global bounded ones if the data of the problem are sufficiently small. ***To cite this article: P. Cherrier, A. Milani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***
© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Notations et position du problème

Soit (V_{2m}, g) une variété kählérienne compacte C^∞, de dimension complexe $m \geqslant 2$, sans bord. Si $u_1, \dots, u_m$ et $u \in C^\infty(V)$, on pose $N(u_1, \dots, u_m) := \delta^{\alpha_1 \cdots \alpha_m}_{\beta_1 \cdots \beta_m} \nabla^{\beta_1}_{\alpha_1} u_1 \cdots \nabla^{\beta_m}_{\alpha_m} u_m$, $M(u) := N(u, \dots, u) = m! \det(\nabla^\beta_\alpha u)$, $\Delta u := -\nabla^\alpha_\alpha u$. Si $k_1 + \cdots + k_p = m$, on convient que $N(u_1^{(k_1)}, \dots, u_p^{(k_p)}) = N(u_1, \dots, u_1, \dots, u_p, \dots, u_p)$, ($k_1$ facteurs $u_1, \dots, k_p$ facteurs u_p).

Soit $T > 0$. Si φ et u_0 sont des fonctions définies respectivement sur $[0, T] \times V$ et V, on cherche à déterminer deux fonctions u et $f : [0, T] \times V \to \mathbb{R}$, vérifiant le problème

$$u_t + \Delta^m u = N\big(f, u^{(m-1)}\big) + N\big(\varphi^{(m-1)}, u\big), \quad \Delta^m f = -M(u), \quad u(0, \cdot) = u_0. \tag{1}$$

On étudie (1) dans différents cadres fonctionnels. On considère aussi le cas $T = +\infty$, en remplaçant $[0, T]$ par $[0, +\infty[$ partout. Le problème stationnaire correspondant à (1) est examiné dans [1].

Adresses e-mail : cherrier@ccr.jussieu.fr (P. Cherrier), ajmilani@uwm.edu (A. Milani).

1631-073X/$ – see front matter © 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2006.03.030

Pour tout entier $k \geqslant 0$, H^k est constitué des fonctions u de l'espace de Sobolev $W^{k,2}(V)$ dont l'intégrale sur V est nulle. Si $p \in [1, +\infty]$, $|\cdot|_p$ est la norme sur $L^p(V)$. On munit H^k de la norme hilbertienne $\|u\|_k = |\Delta^{k/2}u|_2$ ou $|\nabla\Delta^{(k-1)/2}u|_2$, selon la parité de k. Si $T > 0$, on pose $X_k(T) := \{u \in L^2(0, T; H^{2m+k}) \mid u_t \in L^2(0, T; H^k)\}$ et $Y_k(T) := L^2(0, T; H^{2m+k}) \cap L^\infty(0, T; H^{m+k})$. On a $X_k(T) \hookrightarrow Y_k(T)$. Soient $u \in X_k(T)$, $v \in Y_k(T)$ et $R > 0$; on note

$$\|u\|^2_{X_k(T)} := \int_0^T \left(\|u\|^2_{2m+k} + \|u_t\|^2_k\right) \mathrm{d}t + \left(\sigma_{k,T}(u)\right)^2,$$

où $\sigma_{k,T}(u) := \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t)\|_{m+k}$, $B_k(T, R) := \{u \in X_k(T) \mid \|u\|_{X_k(T)} \leqslant R\}$, et

$$\|v\|^2_{Y_k(T)} := \int_0^T \|v\|^2_{2m+k} \,\mathrm{d}t + \left(\sigma_{k,T}(v)\right)^2.$$

(P_k) est le problème suivant. Soit $(\varphi, u_0) \in Y_k(T) \times H^{m+k}$; trouver un couple $(u, f) \in X_k(\tau) \times Y_k(\tau)$, vérifiant (1) pour une valeur $\tau \in]0, T]$. On note (PL_k) la linéarisation qui suit de (P_k) : si $w \in X_k(\tau)$, trouver $(u, f) \in X_k(\tau) \times Y_k(\tau)$, solution de

$$u_t + \Delta^m u = N\left(f, w^{(m-2)}, u\right) + N\left(\varphi^{(m-1)}, u\right), \quad \Delta^m f = -M(w), \quad u(0, \cdot) = u_0.$$

Proposition 1. *Pour tout $k \geqslant 0$, (PL_k) admet une solution et une seule. On pose $u := \Phi_k(w)$.*

2. (P_k), $k \geqslant 0$, est bien posé

Théorème 2. *Soient $T > 0$, $u_0, \tilde{u}_0 \in H^m$, $\varphi, \tilde{\varphi} \in Y_0(T)$. Supposons que (P_0) admette deux solutions $(u, f), (\tilde{u}, \tilde{f}) \in X_0(T) \times Y_0(T)$, correspondant aux données (u_0, φ), $(\tilde{u}_0, \tilde{\varphi})$. Alors,*

$$\|u - \tilde{u}\|^2_{X_0(T)} + \|f - \tilde{f}\|^2_{Y_0(T)} \leqslant C\left(\|u_0 - \tilde{u}_0\|^2_m + Q(\varphi - \tilde{\varphi})\right),$$

où, pour tout $\chi \in Y_0(T)$, $Q(\chi) := (\sigma_0(\chi))^{2(1-1/m)}(\int_0^T \|\chi\|^2_{2m} \,\mathrm{d}t)^{1/m}$, et où C dépend de u, $\tilde{u}$, f, $\tilde{f}$, φ et $\tilde{\varphi}$. En particulier, (P_0) admet au plus une solution.

3. Solutions locales de (P_k), $k \geqslant 1$

Théorème 3. *Soient $k \geqslant 1$, $T > 0$, $u_0 \in H^{m+k}$, $\varphi \in Y_k(T)$. Il existe un réel $\tau \in]0, T]$, et un couple unique $(u, f) \in X_k(\tau) \times Y_k(\tau)$, solution du (P_k). En outre, $\|u\|_{X_k(\tau)} \leqslant R := \max\{2\sqrt{2}\,\|u_0\|_{m+k}\mathrm{e}^{Q_k(\varphi)}, 1\}$, où*

$$Q_k(\varphi) := \left(\sigma_{k,T}(\varphi)\right)^{2(m-1-1/m)} \left(\int_0^T \|\varphi\|^2_{2m+k} \,\mathrm{d}t\right)^{1/m} + \left(\sigma_{k,T}(\varphi)\right)^{2m}.$$

Preuve. Suivant Kato, [2], on détermine d'abord un réel τ, ne dépendant que de V et R, tel que l'application Φ_k, définie à la Proposition 1, envoie la boule $B_k(\tau, R)$ dans elle même. On cherche ensuite un point fixe de Φ_k par une méthode itérative. □

Les estimations obtenues à la première étape ne permettent pas de traiter le cas $k = 0$.

4. Régularité

Théorème 4. *Soient $k \geqslant 0$ et $T > 0$. Supposons que (P_k) admette une solution $u \in X_k(\tau)$, pour un $\tau \in]0, T]$. Si les données u_0 et φ appartiennent respectivement à H^{m+k+1} et $Y_{k+1}(T)$, alors en fait $u \in X_{k+1}(\tau)$ et $f \in Y_{k+1}(\tau)$.*

Preuve. On majore a priori $\|u\|_{X_{k+1}(\tau)}$ en fonction de $\|u\|_{X_k(\tau)}$, $\|u_0\|_{m+k+1}$ et $\|\varphi\|_{Y_{k+1}(T)}$. □

Corollaire 5. *Si $u_0 \in C^\infty(V)$ et $\varphi \in C^\infty([0,T]\times V)$, (1) admet une, et une seule, solution $(u,f) \in (C^\infty([0,\tau]\times V))^2$, pour un $\tau \in]0,T]$.*

5. Existence globale

Théorème 6. *Soient $u_0 \in H^m$ et $\varphi \in Y_0(\infty)$. On pose*

$$Q_0(\varphi) := \big(\sigma_{0,\infty}(\varphi)\big)^{2(m-1)} \int_0^{+\infty} \|\varphi\|_{2m}^2 \,\mathrm{d}t, \qquad \Lambda(u_0,\varphi) := 2\|u_0\|_m^2 \exp\big(C_0\, Q_0(\varphi)\big).$$

(i) *Il existe des constants positives C_0, Λ_0 et R_0, indépendants de u_0 et φ, telles que, si $\Lambda(u_0,\varphi) \leqslant \Lambda_0$, (P_0) admet une unique solution $u \in X_0(\infty)$. u vérifie $\|u\|_{X_0(\infty)} \leqslant R_0$.*
(ii) *Il existe $\Lambda_1 \leqslant \Lambda_0$ tel que, si $\Lambda(u_0,\varphi) \leqslant \Lambda_1$, on a $2\,\|u(t)\|_m^2 \leqslant \Lambda(u_0,\varphi)\,\mathrm{e}^{-t/4}$ pour tout $t \geqslant 0$.*
(iii) *Si les données (u_0,φ) sont dans $H^{m+k} \times Y_k(\infty)$, et si $\|u_0\|_m + \|\varphi\|_{Y_k(\infty)}$ est suffisamment petit, la solution (u,f) appartient à $X_k(\infty) \times Y_k(\infty)$.*

Preuve. 1. On détermine d'abord C_0, Λ_0 et R_0 de sorte que, si $\Lambda(u_0,\varphi) \leqslant \Lambda_0$, l'application Φ_0, définie en 1, envoie la boule $B_0(T,R_0)$ dans elle-même, quel que soit $T>0$. Soient $w \in B_0(T,R)$ et $u = \Phi_0(w)$. On multiplie la première équation (1) par $\Delta^m u + u_t$, et on intègre sur V :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_m^2 + \|u\|_{2m}^2 + \|u_t\|_0^2 = \big\langle N\big(f, w^{(m-2)}, u\big) + N\big(\varphi^{(m-1)}, u\big), \Delta^m u + u_t\big\rangle_0. \tag{2}$$

Pour majorer le second membre de (2), on utilise des inégalités de Sobolev et d'interpolation, ainsi que l'existence, pour tout entier $h \geqslant 0$, d'un réel A_h tel que l'équation $\Delta^m f = -M(u)$, où $u \in H^{m+h}$, admet une unique solution $f \in H^{m+h}$, qui vérifie $\|f\|_{m+h} \leqslant A_h \|u\|_m^{m-1}\|u\|_{m+h}$. C_0 désignant une constante ne dépendant que de V, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_m^2 + \frac{1}{2}\big(\|u\|_{2m}^2 + \|u_t\|_0^2\big) \leqslant C_0\big(R^{2(2m-1)}\|w\|_{2m}^2 + \big(\sigma_{0,\infty}(\varphi)\big)^{2(m-1)}\|\varphi\|_{2m}^2\big)\|u\|_m^2.$$

On déduit de l'inégalité de Gronwall que $\|u\|_{X_0(T)}^2 \leqslant \Lambda(u_0,\varphi)\,\mathrm{e}^{C_0 R^{4m}}$. On conclut en notant qu'il existe $R_0>0$ tel que, pour $\Lambda(u_0,\varphi)$ assez petit, $\Lambda(u_0,\varphi)\,\mathrm{e}^{C_0 R_0^{4m}} \leqslant R_0^2$.

2. Soit $T>0$. On définit par récurrence les suites $(u^n)_{n\geqslant 0}$, $(f^n)_{n\geqslant 0}$, comme suit :

$$u^0 := u_0, \qquad u^{n+1} := \Phi_0\big(u^n\big), \qquad \Delta^m f^n = -M\big(u^n\big); \tag{3}$$

u^n appartient à $B_0(T,R_0)$ pour tout n. On prouve qu'il existe $u \in B_0(T,R_0)$ tel que u^n et u_t^n convergent faiblement vers u et u_t, respectivement dans $L^2(0,T;H^{2m})$ et $L^2(0,T;H^0)$, la suite $(u^n)_{n\geqslant 0}$ convergeant aussi vers u dans $L^2(0,T;H^{2m-1})$ et $C([0,T];H^{m-1})$. Puis on établit que $M(u^n) \to M(u)$ dans $L^2(0,T;L^p)$, où $p = \frac{2m}{m-1}$, et que, si $f \in Y_0(T)$ est la solution de $\Delta^m f = -M(u)$, $f^n \to f$ dans $L^2(0,T;H^{m+1})$. On montre enfin que $N(f,(u^n)^{(m-2)},u^{n+1}) \to N(f,u^{(m-1)})$ dans $L^2(0,T;L^p)$. On conclut alors, par passage à la limite dans (3), que la couple $(u,f) \in B_0(T,R_0) \times Y_0(T)$ est solution de (P_0) sur $[0,T]$. Les estimées étant indépendantes de T, on obtient une solution globale bornée de (P_0) sur $[0,+\infty[$. □

Références

[1] P. Cherrier, A. Milani, Equations of Von Kármán type on compact Kähler manifolds, Bull. Sci. Math., 2e série 116 (1992) 325–352.
[2] T. Kato, Abstract Differential Equations and Nonlinear Mixed Problems, Fermian Lectures, Pisa, 1985.