Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 639–641
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des nombres

Sur une question d'équirépartition de nombres algébriques

Pascal Autissier

I.R.M.A.R., Université de Rennes I, campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France

Reçu le 2 septembre 2005 ; accepté après révision le 7 février 2006

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

On donne un contre-exemple élémentaire à une conjecture de Pineiro, Szpiro et Tucker concernant l'équidistribution de nombres algébriques de petite hauteur. ***Pour citer cet article : P. Autissier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

About a question of the equidistribution of algebraic numbers. We give an elementary counter-example for a conjecture of Pineiro, Szpiro and Tucker about the uniform distribution of algebraic numbers with small height. ***To cite this article: P. Autissier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

1. Introduction

On désigne ici par $\mathcal{P}$ l'ensemble des éléments irréductibles non constants de $\mathbb{Z}[X]$ et par λ la mesure de Haar (de masse 1) sur le cercle unité.

Soit $P \in \mathcal{P}$ de degré d, de racines complexes $\alpha_1; \cdots; \alpha_d$ (avec multiplicité), et de coefficient dominant c. On note $\hat{\mathrm{h}}(P)$ la hauteur de Mahler–Weil de P, i.e.

$$\hat{\mathrm{h}}(P) = \frac{1}{d}\left[\log|c| + \sum_{i=1}^{d} \log\max\bigl(1; |\alpha_i|\bigr)\right].$$

On pose aussi $\delta_P = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} \delta_{\alpha_i}$, où δ_z désigne la masse de Dirac au point z de $\mathbb{C}$. La mesure δ_P est donc de probabilité sur $M = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Bilu [1] a démontré le théorème d'équidistribution suivant :

Théorème 0. *Soit $(P_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}$ distincts deux à deux telle que $\lim_{n\to+\infty} \hat{\mathrm{h}}(P_n) = 0$. Alors la suite de mesures $(\delta_{P_n})_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers λ, ce qui signifie que pour toute fonction continue $f : M \to \mathbb{R}$, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_M f\delta_{P_n} = \int_M f\lambda$.*

Adresse e-mail : pascal.autissier@univ-rennes1.fr (P. Autissier).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.02.021

Pineiro, Szpiro et Tucker conjecturent dans [2] p. 241 que l'énoncé est encore valable lorsqu'il existe $a \in \mathbb{Q}$ tel que f soit la fonction $f: z \mapsto -\log|z-a|$. On donne ici un contre-exemple élémentaire à cette conjecture.

2. Le contre-exemple

Commençons par un lemme simple :

Lemme 1. *Soit $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $d \geqslant 1$. On suppose que $p = |a_0|$ est premier et que $p - 2 \geqslant |a_1| + \cdots + |a_{d-1}|$. Alors P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ et $\hat{\mathrm{h}}(P)$ vaut $\frac{\log p}{d}$.*

Démonstration. Observons d'abord que toutes les racines complexes de P sont de module > 1 : en effet, si $|z| \leqslant 1$, alors $|P(z)| \geqslant 1$.

Supposons maintenant que P s'écrive $P = Q_1Q_2$ avec Q_1 et Q_2 unitaires non constants à coefficients entiers. En notant $b_i = |Q_i(0)|$, on a $p = b_1b_2$.

Par ailleurs, toutes les racines complexes de Q_i sont de module > 1 ; on a en particulier $b_1 > 1$ et $b_2 > 1$. D'où une contradiction.

Pour finir, la valeur de $\hat{\mathrm{h}}(P)$ s'obtient aisément en remarquant que le produit des racines complexes de P vaut $(-1)^d a_0$. □

Présentons maintenant le contre-exemple :

On pose $P_n = (X^n - 1)(X - 2) + 3$ pour tout entier $n \geqslant 1$. D'après le Lemme 1, P_n est irréductible pour tout $n \geqslant 1$, et $\hat{\mathrm{h}}(P_n) = \frac{\log 5}{n+1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Posons aussi $f_1(z) = -\log\min(1; |z-2|)$, de sorte que f_1 est une fonction de Green relativement à 2. On remarque que f_1 est positive sur M et nulle sur le cercle unité ; on a en particulier $\int_M f_1\lambda = 0$.

On va montrer que $\int_M f_1\delta_{P_n}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Plus précisément :

Proposition 2. *On a l'inégalité* $\liminf_{n\to+\infty} \int_M f_1\delta_{P_n} \geqslant \log 2$.

Démonstration. Soit $n \geqslant 6$ fixé. On a $P_n(2) = 3 > 0$ et $P_n(2 - 2^{2-n}) = 3 + 2^{2-n} - 4(1 - 2^{1-n})^n < 0$. On en déduit que P_n admet une racine réelle β_n telle que $2 - 2^{2-n} < \beta_n < 2$.

On a alors les inégalités

$$\int_M f_1\delta_{P_n} \geqslant \frac{f_1(\beta_n)}{n+1} > \frac{n-2}{n+1}\log 2.$$

D'où le résultat. □

Remarque 3. On peut en fait montrer que $\int_M f_1\delta_{P_n}$ converge vers $\log 2$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Pineiro, Szpiro et Tucker demandent dans [2] p. 241 ce qui se passe si on remplace f_1 par $f_2: z \mapsto -\log|z-2|$. On observe le même phénomène :

Proposition 4. *On a la relation* $\lim_{n\to+\infty} \int_M f_2\delta_{P_n} = \log 2 + \int_M f_2\lambda$.

Démonstration. D'une part, on a $\int_M f_2\lambda = -\log 2$. D'autre part, pour tout $n \geqslant 1$, on trouve

$$\int_M f_2\delta_{P_n} = -\frac{\log|P_n(2)|}{n+1} = -\frac{\log 3}{n+1}.$$

On en déduit le résultat. □

Références

[1] Y. Bilu, Limit distribution of small points on algebraic tori, Duke Math. J. 89 (1997) 465–476.
[2] J. Pineiro, L. Szpiro, T.J. Tucker, Mahler measure for dynamical systems on $\mathbb{P}^1$ and intersection theory on a singular arithmetic surface, Prog. Math. 235 (2005) 219–250.