Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 661–663
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse fonctionnelle

Bimodules de Kasparov non bornés équivariants pour les groupoïdes topologiques localement compacts

François Pierrot

Institut de mathématiques de Jussieu, université Paris VII, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

Reçu le 24 mai 2005 ; accepté après révision le 7 février 2006

Disponible sur Internet le 24 mars 2006

Présenté par Alain Connes

Résumé

Nous étendons la KK-théorie non bornée de S. Baaj et P. Julg au cadre des actions de groupes et de groupoïdes topologiques localement compacts, et construisons des exemples de tels éléments naturels dans le cas d'actions continues et conformes de groupes topologiques localement compacts sur des variétés Riemanniennes. ***Pour citer cet article : F. Pierrot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

Unbounded equivariant Kasparov bimodels for locally compact topological groupoids. We study the unbounded KK-theory of S. Baaj and P. Julg in the equivariant framework concerning the action of locally compact groups and groupoids, and give some geometrical examples. ***To cite this article: F. Pierrot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

1. Introduction

La KK-théorie non bornée pour les paires de C^*-algèbres définie par S. Baaj et P. Julg [1] est un foncteur classifiant des invariants attachés à des structures analytiques, nombreuses étant celles issues de la géométrie comme le sont les noyaux d'opérateurs différentiels. Ces objets admettent des généralisations dans le cadre des actions de groupoïdes topologiques localement compacts, qui s'adapte à la géométrie noncommutative et offre des perspectives sur la conjecture de Baum-Connes. Dans [4], les auteurs montrent que la théorie des opérateurs non bornés permet d'obtenir des formules d'indice locales (cf. [8], Théorème 10 p. 892), bien plus calculables que les formules obtenues à l'aide d'opérateurs bornés et adaptées au cadre équivariant. Nous commençons par étudier la notion d'opérateurs non bornés à adjoints dans la théorie des $C_0(X)$-algèbres (cf. [5]) qui est fondamental pour la KK-théorie non bornée équivariante par rapport au groupoïde spatial X. Nous étendons ensuite la KK-théorie non bornée au cadre des actions de groupes et de groupoïdes topologiques localement compacts, montrant qu'elle permet de comprendre la KK-théorie équivariante (« bornée ») particulièrement utile pour le calcul de la K-théorie des produits croisés par les tels groupes

Adresse e-mail : Francois.Pierrot@ens.fr (F. Pierrot).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.02.007

et groupoïdes. Enfin, nous traitons l'exemple géométrique des variétés Riemanniennes et des actions continues et conformes de groupes topologiques localement compacts sur ces variétés, et montrons comment leur associer deux opérateurs de nature géométrique presque invariants l'un borné et l'autre non borné fournissant le même élément de KK-théorie équivariante.

2. Opérateurs non bornés à adjoint dans des champs continus

Dans la perspective de l'étude de la KK-théorie équivariante par rapport à des groupoïdes dits « spatiaux » dont des générateurs sont définis par des opérateurs non bornés sur des modules sur des $C_0(X)$-algèbres, où X désigne un espace localement compact. Nous étudions la dualité entre opérateurs non bornés dans des champs et champs d'opérateurs non bornés, vis-à-vis des structures établies. Soit X un espace localement compact. Pour la notion de $C_0(X)$-algèbre, on renvoie à [2]. Soit A une $C_0(X)$-algèbre. Soit E un A-module hilbertien. Rappelons que le module hilbertien E s'identifie au module des sections $C_0(X, E^\sharp)$ (cf. [7]) où le faisceau $E^\sharp$ sur X est le faisceau dont la fibre en $x \in X$ est $(E^\sharp)_x = E_x = E \otimes_A A_x$ et dont la topologie est la topologie des sections de E (cf. [7]). Pour $x \in X$, notons ev_x l'application de E à valeur dans la fibre en x notée E_x. De même, on a :

Lemme 1. *Soit $E \subset F$ un morphisme isométrique de A-modules hilbertiens. Alors pour tout $x \in X$, on a un morphisme isométrique de A_x-modules hilbertiens de la fibre E_x dans la fibre F_x. De plus, on a :*

$$E = \left\{\xi \in F, ev_x(\xi) \in E_x, x \in X\right\}.$$

Définition 2. Soient E et F deux A-modules hilbertiens. Soit $(T_x)_{x\in X}$ une famille d'opérateurs fermés où, pour tout $x \in X$, l'opérateur T_x est un opérateur fermé de E_x dans F_x. Alors l'espace $\{(\xi, T\xi) \in E \oplus F, (\xi_x, (T\xi)_x) \in G(T_x), x \in X\}$ est le graphe d'un unique opérateur fermé de E dans F noté $Chc_{x\in X}(T_x)$.

Proposition 3. *Soient E et F deux A-modules hilbertiens. Soit T un opérateur fermé densément défini de E dans F ainsi que son adjoint. Alors, pour tout $x \in X$, il existe un opérateur canonique de E_x dans F_x densément défini de E_x dans F_x à adjoint densément défini noté T_x et on a $T = Chc_{x\in X}(T_x)$.*

3. Bimodules de Kasparov non bornés équivariants par rapport aux groupoïdes topologiques localement compacts

Soit G un groupoïde topologique localement compact. Soient A, B deux G-algèbres non graduées (pour la définition, cf. [7]).

Définition 4. On appelle A, B, G-bimodule de Kasparov non borné tout couple (E, D) où :

(1) la lettre E désigne un A, B, G-bimodule hilbertien gradué équivariant (cf. [7]) de U-structure ;
(2) D est un opérateur régulier autoadjoint sur E de degré 1 ;
(3) $a(1 + D^2)^{-1} \in \mathbf{K}(E)$, $a \in A$;
(4) L'ensemble des $a \in A$ tels que l'opérateur $[D, a]$ est défini sur $\mathrm{dom}(D)$ et se prolonge en un élément de $\mathbf{L}(E)$, et tels que pour tout $f \in C_c(G)$, l'opérateur $fr^*(a)(r^*(D) - Us^*(D)U^*)$ (resp. $fs^*(a)(s^*(D) - U^*r^*(D)U)$) se prolonge en un élément de $\mathbf{L}(r^*(E))$ est dense dans A ;
(5) Pour tout $f \in C_c(G)$, on a $\mathrm{dom}(r^*(D)f) = U(\mathrm{dom}(s^*(D)f))$.

Lemme 5. *Soit (E, D) un A, B, G-bimodule de Kasparov équivariant non borné. Alors le couple $((s \oplus r)^*E, D \otimes_s 1 \oplus D \otimes_r 1)$ est un $(A', s^*(B))$-bimodule de Kasparov non borné où la $C_0(G)$-algèbre A' est définie par $A' = \phi(s^*(A) \oplus r^*(A)) \subset \mathbf{L}((s \oplus r)^*(E))$ et où $\phi : s^*(A) \oplus r^*(A) \to \mathbf{L}((s \oplus r)^*(E))$ est canonique et $V = \left(\begin{smallmatrix} 0 & U^* \\ U & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{L}((s \oplus r)^*(E))$.*

Théorème 6. *Soit (E, D) un A, B, G-bimodule de Kasparov équivariant non borné. Soit $F = D(1 + D^2)^{-1/2} \in \mathbf{K}(E)$. Alors le bimodule (E, F) définit un élément de $E_G(A, B)$.*

Théorème 7. *Soit A une C^*-algèbre séparable. Soit $x \in KK_G(A, B)$ (représenté dans un module E si l'algèbre A est unitale). Alors il existe $(E, D) \in E_G(A, B)$ tel que $(E, Q(D))$ définit l'élément x.*

4. Exemples associés à des actions conformes en géométrie

En géométrie, on construit des opérateurs non bornés fournissant des éléments de *KK*-théorie (équivariante) et de cohomologie cyclique très intéressants.

On sait construire dans le cas d'une action propre d'un groupe par difféomorphismes isométriques (cf. [3]) des opérateurs différentiels classiques invariants par le groupe (opérateurs de De Rham, de Dirac). Dans le cas de métrique quasiinvariante, nous citerons également la construction de A. Connes and H. Moscovici (cf. [4,8]).

Dans cette Note, nous ne considèrerons en exemple que le cas d'action de groupes (pour le cas d'action de groupoïdes, ceci sera rédigé dans un article ultérieur). Soit M une variété Riemannienne et soit G un groupe topologique agissant de façon continue et conforme sur M. On définit une action unitaire (cf. [6]) sur les espaces de Hilbert associés aux fibrés hermitiens des formes différentielles. Dans ce cadre, G.G. Kasparov construit des éléments de *KK*-théorie équivariante à partir d'opérateurs différentiels d'ordre 2 qui ne sont pourtant pas « presque-invariants ».

Soit D un opérateur pseudodifférentiel presque-invariant d'ordre 0 de symbole celui de l'opérateur de de Rham rendu borné fermé sur l'espace de Hilbert associées aux formes différentielles. On note Δ le Laplacien agissant sur le même espace de Hilbert, qui est non borné régulier autoadjoint.

Théorème 8. *L'opérateur D définit un élément canonique de $KK_G(C_0(M), \mathbb{C})$.*
L'opérateur $D\,\mathrm{Log}(1 + \Delta)$ définit un élément de $\psi^1_G(C_0(M), \mathbb{C})$ de classe celle de D.

Références

[1] S. Baaj, P. Julg, Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C^*-modules hilbertiens, C. R. Acad. Sci. Paris 296 (1983) 875–878.
[2] E. Blanchard, Déformations de C^*-algèbres de Hopf, Bull. Soc. Math. France 124 (1) (1996) 141–215.
[3] A. Connes, Noncommutative Geometry, Academic Press, 1994.
[4] A. Connes, H. Moscovici, The local index formula in noncommutative geometry, Geom. Funct. Anal. 5 (2) (1995) 174–243.
[5] M.J. Dupré, R.M. Gillette, Banach Bundles, Banach Modules and Automorphisms of C^*-Algebras, Res. Notes Math., vol. 92, Pitman, Boston, MA, 1983 (Advanced Publishing Program).
[6] G.G. Kasparov, Lorentz groups : K-theory of unitary representations and crossed products, Dokl. Akad. Nauk 275 (3) (1984) 541–545.
[7] P.-Y. LeGall, Thèse de doctorat, Théorie de Kasparov équivariante et groupoïdes (paru à K-théorie 16, 1999).
[8] G. Skandalis, Géométrie noncommutative, opérateur de signature transverse et algèbre de Hopf, d'après A. Connes and H. Moscovici, Séminaire Bourbaki, 53ème année, 2000–2001, no. 892, juin 2001.