Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

ELSEVIER

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 483–487

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Symétrie des grandes solutions d'équations elliptiques semi linéaires

Alessio Porretta [a,1] , Laurent Véron [b]

[a] *Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata", Via della Ricerca Scientifica 1, 00133 Roma, Italie*

[b] *Laboratoire de mathématiques et physique théorique, CNRS UMR 6083, faculté des sciences, 37200 Tours, France*

Reçu et accepté le 20 janvier 2006

Disponible sur Internet le 3 mars 2006

Présenté par Haïm Brezis

Résumé

Soit g une fonction localement lipschitzienne de la variable réelle. On suppose que g vérifie la condition de Keller et Osserman et qu'il existe un réel $a > 0$ tel que g est convexe sur $[a, +\infty[$. Alors toute solution u de $-\Delta u + g(u) = 0$ dans une boule B de $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, qui tend vers l'infini au bord de B, est une fonction radiale. ***Pour citer cet article : A. Porretta, L. Véron, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Symmetry of large solutions of semilinear elliptic equations. Let g be a locally Lipschitz continuous function defined on $\mathbb{R}$. We assume that g satisfies the Keller–Osserman condition and there exists a positive real number a such that g is convex on $[a, \infty)$. Then any solution u of $-\Delta u + g(u) = 0$ in a ball B of $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, which tends to infinity on ∂B, is spherically symmetric. ***To cite this article: A. Porretta, L. Véron, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Let $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ be a locally Lipschitz continuous function and $B_R(0)$ the open N-ball ($N \geqslant 2$) of center 0 and radius $R > 0$. A classical result due to Gidas, Ni and Nirenberg [3] asserts that any positive solution u of

$$-\Delta u + g(u) = 0 \tag{1}$$

in $B_R(0)$ which vanishes on $\partial B_R(0)$ is radial. A conjecture proposed by Brezis is that any *large solution* of (1), that is a solution which verifies

$$\lim_{|x| \to R} u(x) = \infty, \tag{2}$$

Adresses e-mail : porretta@mat.uniroma2.it (A. Porretta), veronl@univ-tours.fr (L. Véron).

[1] L'auteur a bénéficié du support du projet européen RTN : FRONTS-SINGULARITIES, RTN contract : HPRN-CT-2002-00274.

1631-073X/$ – see front matter © 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2006.01.020

is radial. The existence of such solution is ensured by the Keller–Osserman condition: there exists some $a > 0$ such that g is nondecreasing on $[a, \infty)$ and

$$\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{G(s)}} < \infty \quad \text{where } G(s) = \int_a^s g(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{3}$$

We prove two symmetry results dealing with this conjecture.

Theorem 1. *Assume g is locally Lipschitz continuous and let u be a large solution of* (1) *in a ball $B = B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$. If there holds*

$$\text{(i)}\ \lim_{|x|\to R} \frac{\partial u}{\partial r}(x) = \infty,$$

$$\text{(ii)}\ \left|\nabla_\tau u(x)\right| = \circ\left(\frac{\partial u}{\partial r}(x)\right) \quad \text{as } |x| \to R, \tag{4}$$

then u is radial and $\frac{\partial u}{\partial r}(x) > 0$ on $B_R(0) \setminus \{0\}$.

In this statement $\frac{\partial u}{\partial r}(x) = \langle Du(x), x/|x|\rangle$ is the radial derivative and $\nabla_\tau u(x) = Du(x) - |x|^{-2}\langle Du(x), x\rangle x$ is the tangential gradient. This result is settled upon an adaption of the key lemma of [3] in the framework of large solutions. Next we give a sufficient condition in order (4) to hold.

Theorem 2. *Assume g is locally Lipschitz continuous, convex on $[a, +\infty)$ for some $a > 0$ and satisfies* (3). *Then any large solution of* (1) *in a ball is a radial function.*

Remark. It is important to notice that this result is not related with uniqueness. For example, if $g(x) = x^2$ it is known that uniqueness may not hold if the radius of the ball is large enough. As a striking example, if g is any polynomial of degree larger than one with positive coefficient of higher order, any large solution of (1) in a ball is radial.

1. Résultats principaux

Soit $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne et $B_R(0)$ la boule de centre 0 et de rayon R dans $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$. Un résultat classique du à Gidas, Ni et Nirenberg [3] affirme que si u est une solution positive de

$$-\Delta u + g(u) = 0 \tag{1}$$

dans $B_R(0)$ qui s'annulle sur $\partial B_R(0)$ alors elle est radiale. Si u prend la valeur k au bord le résultat reste valable pourvu que $u - k$ ne change pas de signe dans $B_R(0)$. Partant de cette observation, H. Brezis a conjecturé que si u est une *grande solution*, c'est à dire une solution qui vérifie

$$\lim_{|x|\to R} u(x) = \infty, \tag{2}$$

alors elle est radiale. L'existence de grandes solutions est associée à la condition de Keller et Osserman [4,8] qui est satisfaite si g est positive et croissante sur $[a, +\infty[$ pour un $a > 0$ et y vérifie

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{G(s)}} < +\infty \quad \text{où } G(s) = \int_a^s g(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{3}$$

Nous donnons deux résultats qui confirment la validité de la conjecture de Brezis.

Théorème 1. *Supposons que g est localement lipschitzienne et soit u une grande solution de* (1) *dans la boule $B = B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$. Si on a*

$$\text{(i)}\ \lim_{|x|\to R}\frac{\partial u}{\partial r}(x)=\infty,$$
$$\text{(ii)}\ \left|\nabla_\tau u(x)\right|=\circ\left(\frac{\partial u}{\partial r}(x)\right)\quad \textit{as}\ |x|\to R, \tag{4}$$

alors u est radiale et $\frac{\partial u}{\partial r}(x)>0$ dans $B_R(0)\setminus\{0\}$.

Dans cet énoncé $\frac{\partial u}{\partial r}(x)=\langle Du(x),x/|x|\rangle$ est la dérivée radiale de u et $\nabla_\tau u(x)=Du(x)-|x|^{-2}\langle Du(x),x\rangle x$ son gradient tangentiel.

Théorème 2. *Supposons que g est localement lipschitzienne et qu'il existe $a>0$ tel que g est convexe sur $[a,+\infty[$ et y vérifie* (3). *Alors toute grande solution de* (1) *dans une boule est radiale.*

Remarque. Il est important de noter que ce résultat n'augure en rien de l'unicité des grandes solutions de (1). Ainsi, si $g(x)=x^2$, il est classique [1,7,9] que si le rayon de la boule est assez grand, il existe plusieurs grandes solutions, dont une seule positive. Par exemple, si g est un polynôme de degré >1 dont le coefficient du terme de plus haut degré est positif, alors le résultat du Théorème 2 s'applique.

Le résultat suivant étend aussi un autre théorème de [3].

Corollaire 1. *Supposons que g vérifie les hypothèses du Théorème* 2. *Si u est une solution de* (1) *dans $\Gamma_{R,r}=\{x\in\mathbb{R}^N\colon r<|x|<R\}$ qui vérifie* (2), *alors $\frac{\partial u}{\partial r}(x)>0$ pour tout $x\in\Gamma_{R,(r+R)/2}$.*

Principe de la démonstration du Théorème 1. On commence par noter que pour tout $P\in\partial B^+=\partial B_R(0)\cap\{x_1>0\}$, il existe $\delta\in]0,R[$ tel que

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)>0\quad \forall x\in B_R(0)\cap B_\delta(P). \tag{5}$$

Ceci découle immédiatement de (4). La suite de la démonstration du Théorème 1 repose sur la méthode des plans mobiles comme dans [3]. Soit $\mathcal{B}=\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_N\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^N$ et $(x_1,\dots,x_N)$ les coordonnées d'un point x dans cette base. Pour $0<\lambda<R$ on désigne par T_λ l'hyperplan $\{x\colon x_1=\lambda\}$, $\Sigma_\lambda=\{x\in B_R(0)\colon \lambda<x_1<R\}$, $\Sigma'_\lambda=\{x\in B_R(0)\colon 2\lambda-R<x_1<\lambda\}$, par x_λ le symétrique de x, par rapport à T_λ, de coordonnées $(2\lambda-x_1,x_2,\dots,x_N)$ et par u_λ la fonction réfléchie de u, définie par $u_\lambda(x)=u(x_\lambda)$. On applique (5) avec $P=P_0=R\mathbf{e}_1$, $\delta_0=\delta(P_0)$. On en déduit que pour tout $\lambda\in[\lambda_0,R[$ (où $\lambda_0=R-\delta_0^2/2R$) on a

$$u(x_\lambda)<u(x)\quad\text{et}\quad\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)>0\quad\forall x\in\Sigma_\lambda. \tag{6}$$

Soit $\mu=\inf\{\lambda>0\colon \text{t. q. (6) soit vérifiée}\}$. On suppose $\mu>0$. Par définition $u\geqslant u_\mu$ dans Σ_μ. Soit $K_\mu=T_\mu\cap\partial B_R(0)$. Comme K_μ est compact, grace à (5) il existe un ϵ-voisinage U_ϵ de K_μ tel que

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)>0\quad\forall x\in U_\epsilon\cap B_R(0). \tag{7}$$

On pose $D_\epsilon=B_{R-\epsilon/2}(0)\cap\Sigma_\mu$ et $a(x)=(g(u)-g(u_\mu))/(u-u_\mu)$. Comme $w=u-u_\mu$ vérifie

$$\Delta w-aw=0\quad\text{dans } D_\epsilon,\quad w\geqslant 0,\ w\not\equiv 0, \tag{8}$$

on en déduit $w>0$ par le principe du maximum fort, et $\partial u/\partial x_1>0$ sur $T_\mu\cap\partial D_\epsilon$ par le lemme de Hopf. La continuité de Du à l'intérieur et (7) impliquent qu'il existe $\sigma>0$ tel que

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)>0\quad\forall x\in B_R(0)\cap\{x\colon \mu-\sigma<x_1<\mu+\sigma\}. \tag{9}$$

De plus, comme ϵ est arbitrairement petit, $u>u_\mu$ dans Σ_μ. La définition de μ implique qu'il existe une suite positive croissante $\{\lambda_n\}$ convergeant vers μ et une suite de points $\{x_n\}$ convergeant vers $\bar{x}\in\overline{\Sigma_\mu}$ telles que $u(x_n)\leqslant u((x_n)_{\lambda_n})$. Comme $u>u_\mu$ dans Σ_μ, $\bar{x}$ ne peut appartenir à Σ_μ. Le théorème des accroissement fini et (9) impliquent que $\bar{x}$ ne peut appartenir non plus à T_μ. Enfin $\bar{x}$ ne peut appartenir à $\Sigma_\mu \setminus T_\mu$ puisque cela impliquerait que $u(x_n) - u((x_n)_{\lambda_n})$ tende vers $+\infty$. Par contradiction il s'ensuit que $\mu = 0$. Changeant x_1 en $-x_1$ puis permutant les directions, on en déduit que u est radiale.

Principe de la démonstration du Théorème 2. La clef est le résultat suivant.

Lemme 1. *Supposons que g vérifie les hypothèses du Théorème* 2, *et que u est une grande solution de* (1) *dans* $B_R(0)$. *Alors*

$$\text{(i)}\ \lim_{|x|\to R} \nabla_\tau u(x) = 0,$$

$$\text{(ii)}\ \lim_{|x|\to R} \frac{\partial u}{\partial r}(x) = \infty, \tag{10}$$

et les deux limites ont lieu uniformément par rapport à $\{x\colon\ |x| = r\}$.

Démonstration. Soient $(r, \sigma) \in \mathbb{R}_+ \times S^{N-1}$ les coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^N$, $\tilde{\sigma} \in S^{N-1}$ et $\{\gamma_j\}_{j=1}^{N-1}$ un ensemble de géodésiques de S^{N-1} se coupant orthogonalement en $\tilde{\sigma}$, par exemple $\gamma_j(t) = \mathrm{e}^{tA_j}(\tilde{\sigma})$ où les matrices $\{A_j\}_{j=1}^{N-1}$ sont anti-symétriques et vérifient $\langle A_j\tilde{\sigma}, A_k\tilde{\sigma}\rangle = \delta_j^k$. Si Δ_S est l'opérateur de Laplace–Beltrami sur S^{N-1}, on a

$$\Delta_S u(r, \tilde{\sigma}) = \sum_{j=1}^{N-1} \left.\frac{\mathrm{d}^2 u(r, \gamma_j(t))}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0}. \tag{11}$$

Par hypothèse $g = g_\infty + \tilde{g}$ où g_∞ est convexe et vérifie (3) et $\tilde{g}$ est localement lipschitzien et identiquement nul sur $[M, +\infty[$ pour un $M > 0$. Sans restriction on peut supposer g_∞ croissante. Il existe $r_0 \in\,]0, R[$ tel que $u(x) \geqslant M$ pour tout $|x| \geqslant r_0$. Ainsi

$$\bigl|\Delta u - g_\infty(u)\bigr| = \bigl|\tilde{g}(u)\bigr| = \bigl|\tilde{g}(u)\chi_{B_{r_0}(0)}\bigr| \leqslant K_0. \tag{12}$$

Soit $\phi(x) = (2N)^{-1}(R^2 - |x|^2)$. Comme $\Delta\phi = -1$ on déduit de (12)

$$\Delta(u - K_0\phi) \geqslant g_\infty(u) \geqslant g_\infty(u - K_0\phi),$$

et donc $u - K_0\phi$ est une sous-solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta v + g_\infty(v) = 0 & \text{in } B_R(0), \\ \lim_{|x|\to R} v(x) = \infty. \end{cases} \tag{13}$$

Par convexité (voir par exemple [2,5,6], même si il existe une démonstration plus directe dans le cas radial) ce problème admet une unique solution $v = U_R$. Comme $u + K_0\phi$ est une sur-solution, on en déduit

$$U_R - K_0\phi \leqslant u \leqslant U_R + K_0\phi. \tag{14}$$

Soit $h > 0$, $j = 1, \dots, N-1$ et $u^h(x) = u(\mathrm{e}^{hA_j}(x)) = u(r, \mathrm{e}^{hA_j}\sigma)$, où $x = (r, \sigma)$. Comme le problème est invariant par rotation, u^h vérifie aussi (14). Par suite

$$\lim_{|x|\to R} u(x) - u^h(x) = 0. \tag{15}$$

De plus $\Delta u^h = g_\infty(u^h)$ dans $\Gamma_{R,r_0} = B_R(0) \setminus B_{r_0}(0)$ et il existe $L > 0$, indépendant de h, tel que $|(u - u^h)(x)| \leqslant L|h|$ pour $|x| = r_0$. Si Ψ est la fonction harmonique dans Γ_{R,r_0}, nulle sur $\partial B_R(0)$ et valant 1 sur $\partial B_{r_0}(0)$, et $v^h = u^h + |h|L\Psi$, alors

$$\Delta\bigl(v^h - u\bigr) \leqslant g_\infty\bigl(v^h\bigr) - g_\infty(u) \quad \text{dans } \Gamma_{R,r_0}. \tag{16}$$

La relation (15) implique que $v^h(x) - u(x) \to 0$ si $|x| \to R$. Par monotonie $v^h = u^h + |h|L\Psi \geqslant u$. Si on définit la dérivée de Lie selon le champ de vecteurs $\sigma \mapsto A_j\sigma$ par

$$L_{A_j} u(r, \sigma) = \left.\frac{\mathrm{d}u(r, e^{tA_j\sigma})}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0},$$

alors

$$\left|L_{A_j} u(r,\tilde{\sigma})\right| \leqslant L\Psi(x) \leqslant C(R-r). \tag{17}$$

Cette relation implique (10)(i).

Pour démontrer (10)(ii), on pose $w^h = h^{-2}(u^h + u^{-h} - 2u)$. La convexité de g_∞ implique que w^h vérifie $\Delta w^h \geqslant \xi(x) w^h$ dans Γ_{R,r_0}, où $\xi(x) \geqslant 0$, et donc que w_+^h est sous-harmonique dans Γ_{R,r_0}. Comme u est de classe C^2, il existe $\tilde{L} > 0$, indépendant de h, tel que $w^h \leqslant \tilde{L}$ sur $\partial B_{r_0}(0)$. Comme w^h et Ψ s'annullent sur $\partial B_R(0)$, $w_+^h \leqslant \tilde{L}\Psi$ dans Γ_{R,r_0} et donc

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 u(r,\gamma_j(t))}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0} \leqslant \tilde{L}\Psi. \tag{18}$$

On déduit de (11) que $(\Delta_S u)_+(x) \to 0$ quand $|x| \to R$. En écrivant l'Éq. (1) en coordonnées sphériques, on obtient donc

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{N-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \geqslant r^{N-1} g_\infty(u) + \circ(1) \quad \text{uniformément quand } |x| \to R. \tag{19}$$

Clairement $u \geqslant z$ où z est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta z + g_\infty(z) = 0 & \text{dans } \Gamma_{R,r_0}, \\ \lim_{|x|\to R} z(x) = \infty, \\ z = \min_{\partial B_{r_0}(0)} u & \text{sur } \partial B_{r_0}(0). \end{cases} \tag{20}$$

Donc $g_\infty(u) \geqslant g_\infty(z)$. Comme $g_\infty(z) \notin L^1(\Gamma_{R,r_0})$, on a

$$\lim_{r\to R} \int_{r_0}^{r} g_\infty\big(u(s,\sigma)\big) s^{N-1}\,\mathrm{d}s = +\infty \quad \text{uniformément pour } \sigma \in S^{N-1}.$$

Ceci implique

$$\lim_{r\to R} \frac{\partial u}{\partial r}(r,\sigma) = +\infty \quad \text{uniformément pour } \sigma \in S^{N-1},$$

et donc (10)(ii) et le Lemme 1. □

Le Théorème 2 en découle. □

Références

[1] A. Aftalion, M. del Pino, R. Letelier, Multiple boundary blow-up solutions for nonlinear elliptic equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 133 (2) (2003) 225–235.

[2] Y. Du, Z. Guo, Uniqueness and layer analysis for boundary blow-up solutions, J. Math. Pures Appl. 83 (6) (2004) 739–763.

[3] B. Gidas, W.M. Ni, L. Nirenberg, Symmetry and related properties via the maximum principle, Comm. Math. Phys. 68 (1979) 209–243.

[4] J.B. Keller, On solutions of $\Delta u = f(u)$, Comm. Pure Appl. Math. 10 (1957) 503–510.

[5] M. Marcus, L. Veron, Uniqueness and asymptotic behaviour of solutions with boundary blow-up for a class of nonlinear elliptic equations, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 14 (1997) 237–274.

[6] M. Marcus, L. Véron, Existence and uniqueness results for large solutions of general nonlinear elliptic equations, J. Evolution Equations 3 (2003) 637–652.

[7] P.J. McKenna, W. Reichel, W. Walter, Symmetry and multiplicity for nonlinear elliptic differential equations with boundary blow-up, Nonlinear Anal. 28 (7) (1997) 1213–1225.

[8] R. Osserman, On the inequality $\Delta u \geqslant f(u)$, Pacific J. Math. 7 (1957) 1641–1647.

[9] S.I. Pohožaev, The boundary value problem for equation $\Delta U = U^2$, Dokl. Akad. Nauk SSSR 138 (1961) 305–308 (in Russian).