Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 479–482
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Solutions globales des équations d'Einstein–Maxwell avec jauge harmonique et jauge de Lorenz

Julien Loizelet

Laboratoire de mathématiques et physique théorique (UMR CNRS 6083), faculté des sciences et techniques, université François-Rabelais, parc de Grandmont, 37200 Tours, France

Reçu le 22 septembre 2005 ; accepté après révision le 17 janvier 2006

Disponible sur Internet le 3 mars 2006

Présenté par Yvonne Choquet-Bruhat

Résumé

En adaptant une méthode de Lindblad et Rodnianski, on prouve l'existence de solutions globales pour les équations d'Einstein–Maxwell avec des données initiales C^∞ asymptotiquement euclidiennes suffisamment petites. On utilise la jauge harmonique et la jauge de Lorenz. ***Pour citer cet article : J. Loizelet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

Global solutions for the Einstein–Maxwell equations in harmonic gauge and Lorenz gauge. Adapting a method of Lindblad and Rodnianski, we prove existence of global solutions for the Einstein–Maxwell equations with small enough smooth and asymptotically flat initial data. We use harmonic gauge and Lorenz gauge. ***To cite this article: J. Loizelet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

1. Introduction

Dans [2], l'existence de solutions globales des équations d'Einstein couplées à un champ scalaire a été prouvée pour des données initiales C^∞, suffisamment petites et asymptotiquement euclidiennes en choisissant de travailler avec la jauge harmonique (4). Ici, on utilise à la fois la jauge harmonique (4) et la jauge de Lorenz (5) pour montrer que la méthode de [2] peut être généralisée afin d'obtenir l'existence de solutions globales des équations d'Einstein–Maxwell[1] suivantes :

$$\begin{cases} R_{\mu\nu} - \dfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}, \\ D_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Adresse e-mail : Julien.Loizelet@lmpt.univ-tours.fr (J. Loizelet).

[1] On utilise les indices grecs $\alpha, \beta, \mu, \nu, \ldots = 0, \ldots, 3$, la convention de sommation sur les indices répétés et la notation $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$. Le symbole D dénote la dérivation covariante de Levy-Civita par rapport à la métrique g, $\delta_{\mu\nu}$ désigne le symbole de Kronecker et m est la métrique de Minkowski.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.01.018

Ces équations donnent une relation entre le tenseur gravitationnel $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ (exprimé en fonction de la courbure de Ricci $R_{\mu\nu}$ et de la courbure scalaire $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ d'une métrique Lorentzienne $g_{\mu\nu}$ inconnue) et le tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}(\mathcal{F}_{\mu\lambda}\mathcal{F}_\nu{}^\lambda - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\lambda\rho}\mathcal{F}_{\lambda\rho})$ d'un champ électromagnétique $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, A étant une 1-forme (4-potentiel électromagnétique).

On considère alors le problème de Cauchy suivant : on se donne une variété Σ_0 (de dimension 3) avec une métrique Riemannienne g_0, un 2-tenseur symétrique k_0 et des données initiales $(\tilde{A}_0, \tilde{A}_1)$ pour le potentiel électromagnétique. On veut trouver une variété $\mathcal{M}$ (de dimension 4) avec une métrique Lorentzienne g et un potentiel électromagnétique A qui vérifient (1) telle que Σ_0 soit plongé dans $\mathcal{M}$, g_0 soit la restriction de g sur Σ_0, k_0 soit la seconde forme fondamentale de Σ_0 dans $\mathcal{M}$ et que $(\tilde{A}_0, \tilde{A}_1)$ soit la restriction de $(A, \partial_t A)$ sur Σ_0.

On suppose les conditions initiales C^∞ et asymptotiquement euclidiennes : pour $r = |x| \to +\infty$, $\alpha > 0$ et M la masse ADM on a :

$$\forall i, j = 1, \ldots, 3 \quad \begin{cases} g_{0ij} = \left(1 + \dfrac{2M}{r}\right)\delta_{ij} + \mathrm{O}\big(r^{-1-\alpha}\big), \quad \tilde{A}_0 = \mathrm{O}\big(r^{-1-\alpha}\big), \\ k_{0ij} = \mathrm{O}\big(r^{-2-\alpha}\big), \quad \tilde{A}_1 = \mathrm{O}\big(r^{-2-\alpha}\big). \end{cases} \tag{2}$$

De plus, on impose que les données initiales vérifient les équations de contraintes :

$$\forall i, j = 1, \ldots, 3 \quad \begin{cases} R_0 - k^i_{0j} k^j_{0i} + k^i_{0i} k^j_{0j} = 2\mathcal{F}_{0i}\mathcal{F}_0{}^i + \mathcal{F}_{ij}\mathcal{F}^{ij}, \\ \nabla^j k_{0ij} - \nabla_i k^j_{0j} = 2\mathcal{F}_{0j}\mathcal{F}_i{}^j, \\ \nabla_i \mathcal{F}^{0i} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

où R_0 désigne la courbure scalaire de g_0 et ∇ la dérivée covariante par rapport à g_0.

Enfin, on choisit deux jauges particulières : la jauge de coordonnées harmoniques

$$\partial_\mu\big(g^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}\big) = 0 \quad \forall \nu = 0, \ldots, 3 \tag{4}$$

et la jauge de Lorenz

$$\partial_\mu\big(\sqrt{|\det g|}A^\mu\big) = 0. \tag{5}$$

En supposant (4) et (5) vérifiés, on peut réécrire (1) sous la forme du système d'équations d'ondes quasi-linéaires (6) suivant :[2]

$$\widetilde{\Box}_g \begin{pmatrix} h^1_{\mu\nu} \\ A_\sigma \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_{\mu\nu} + \widetilde{F}_{\mu\nu} \\ F^A_\sigma \end{pmatrix}}_{F_M} - \begin{pmatrix} \widetilde{\Box}_g h^0_{\mu\nu} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

où $F_{\mu\nu}(h)(\partial h, \partial h)$ est défini dans le Lemme 3.2 de [1], et :

$$\widetilde{F}_{\mu\nu}(h)(\partial A, \partial A) = -4m^{\alpha\beta}(\partial_\mu A_\beta - \partial_\beta A_\mu)(\partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu) + m^{\mu\nu}m^{\alpha\sigma}m^{\beta\sigma}(\partial_\sigma A_\tau - \partial_\tau A_\sigma)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\sigma) + \mathrm{O}\big(|h||\partial A|^2\big), \tag{7}$$

$$F^A_\sigma(h)(\partial h, \partial A) = m^{\nu\beta}m^{\mu\alpha}\partial_\mu h_{\nu\sigma}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) + m^{\rho\mu}m^{\lambda\alpha}\partial_\sigma h_{\rho\lambda}\partial_\mu A_\alpha + \mathrm{O}\big(|h||\partial h||\partial A|\big). \tag{8}$$

2. Existence globale

Théorème 2.1 *(Théorème d'existence globale). Soient* $(\Sigma_0, g_0, k_0, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1)$ *les données initiales du système d'équations d'Einstein–Maxwell* (1). *Supposons que* Σ *soit difféomorphe à* $\mathbb{R}^3$, *que* $(g_0, k_0, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1)$ *soient* C^∞ *et vérifient les conditions* (2) *et* (3).

Soit $g_0 = \delta + h^0_0 + h^1_0$ *où* $h^0_{0ij} = \chi(r)\frac{M}{r}\delta_{ij}$ *avec* $\chi \in C^\infty$ *valant* 1 *pour* $s \geqslant 3/4$ *et* 0 *pour* $s \geqslant 1/2$. *Posons*

[2] $\widetilde{\Box}_g = g^{\alpha\beta}\partial^2_{\alpha\beta}$, $h^1_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - h^0_{\mu\nu}$, avec $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - m_{\mu\nu}$ et $h^0_{\mu\nu}(t) = \chi(r/t)\chi(r)\frac{2M}{r}\delta_{\mu\nu}$ pour $\chi \in C^\infty$ valant 1 quand $s \geqslant 3/4$ et 0 quand $s \leqslant 1/2$.

$$E_N(0)=\sum_{0\leqslant|I|\leqslant N}\big(\big\|(1+r)^{1/2+\gamma}\nabla\nabla^I h_0^1\big\|_{L^2}^2+\big\|(1+r)^{1/2+\gamma}\nabla^I k_0\big\|_{L^2}^2$$
$$+\big\|(1+r)^{1/2+\gamma}\nabla\nabla^I\tilde A_0\big\|_{L^2}^2+\big\|(1+r)^{1/2+\gamma}\nabla^I\tilde A_1\big\|_{L^2}^2\big). \tag{9}$$

On suppose qu'il existe une constante $\varepsilon_0>0$ telle que, pour tout $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, les données initiales vérifient

$$\sqrt{E_N(0)}+M\leqslant\varepsilon \tag{10}$$

pour un certain $\gamma>\gamma_0(\varepsilon_0)$ avec $\gamma_0(\varepsilon_0)\to 0$ quand $\varepsilon_0\to 0$ et $N\geqslant 10$.

Alors le système (1) *possède une solution C^∞ globale (g,A) avec $(\mathbb{R}^4,g)$ géodésiquement complète.*

2.1. Idée de la preuve

On note[3]

$$\mathcal{E}_N(t)=\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\sum_{Z\in\mathcal{Z},\ |I|\leqslant N}\int_{\Sigma_\tau}\big(\big|\partial Z^I h^1\big|^2+\big|\partial Z^I A\big|^2\big)w(q)\,\mathrm{d}^3x. \tag{11}$$

Il est standard de montrer que toute solution h^1 du système (6) avec des données initiales vérifiant (3), (4) et (5) définit une solution $g=m+h^1+h^0$ du système (1). Et puisqu'on peut toujours construire des données initiales vérifiant (3), (4) et (5) à partir des données initiales du Théorème 2.1, on est ramené à chercher des solutions globales de (6). De plus, on sait que si les données initiales vérifient (3), (4) et (5) alors il existe une solution locale en temps (h,A) de (6) telle que $g=m+h$ et A vérifient (4) et (5) pour tout t dans un intervalle maximal d'existence $[0,T_0]$. On note que T_0 peut être caractérisé par le fait que $\mathcal{E}_N(t)\to\infty$ quand $t\to T_0^-$.

Soit $0<T<T_0$ le temps maximal tel que pour $0\leqslant t\leqslant T$ on ait (pour $\delta<1/4$) :

$$\mathcal{E}_N(t)\leqslant 2C_N\varepsilon^2(1+t)^{2\delta}. \tag{12}$$

En utilisant (12) et la Proposition 14.1 de [2], on montre des estimations de décroissance faibles : Pour $i=0,1$ avec $\delta'=\delta$ si $i=0$ et $\delta'=\gamma>\delta$ si $i=1$, on a pour $0\leqslant t\leqslant T$:

$$\big|\partial Z^I A(t,x)\big|+\big|\partial Z^I h^i(t,x)\big|\leqslant\begin{cases}C\varepsilon\big(1+t+|q|\big)^{-1+\delta}\big(1+|q|\big)^{-1-\delta'}, & q>0,\\ C\varepsilon\big(1+t+|q|\big)^{-1+\delta}\big(1+|q|\big)^{-1/2}, & q<0,\end{cases}\qquad |I|\leqslant N-2. \tag{13}$$

Le Corollaire 7.2 de [2] appliqué à $\phi=(h^1,A)$ et $F=F_M$ entraîne, en utilisant le Lemme 2.2 ci-dessous, les estimations fortes de décroissance : pour tout $\mu'>\delta>0$ et $\gamma'<\gamma-\mu'$, il existe des constantes M_k et C_k dépendant de (γ',μ') telles que pour $0\leqslant t\leqslant T$:

$$\big|\partial Z^I A\big|+\big|\partial Z^I h^1\big|\leqslant\begin{cases}C_k\varepsilon\big(1+t+|q|\big)^{-1+M_k\varepsilon}\big(1+|q|\big)^{-1-\gamma'}, & q>0,\\ C_k\varepsilon\big(1+t+|q|\big)^{-1+M_k\varepsilon}\big(1+|q|\big)^{-1/2+\mu'}, & q<0,\end{cases}\qquad |I|=k\leqslant N/2+2. \tag{14}$$

Lemme 2.2. *Si g et A vérifient les conditions* (4) *et* (5) *alors*[4]

$$\big|F(h)(\partial h,\partial h)\big|_{\mathcal{TU}}\lesssim|\bar\partial h||\partial h|+\mathrm{O}\big(|h||\partial h|^2\big)\quad\text{et}\quad\big|F(h)(\partial h,\partial h)\big|\lesssim|\partial h|^2_{\mathcal{TU}}+|\bar\partial h||\partial h|+\mathrm{O}\big(|h||\partial h|^2\big), \tag{15}$$
$$\big|\widetilde F(h)(\partial A,\partial A)\big|_{\mathcal{TU}}\lesssim|\bar\partial A||\partial A|+\mathrm{O}\big(|h||\partial A|^2\big)\quad\text{et}\quad\big|\widetilde F(h)(\partial A,\partial A)\big|\lesssim|\partial A|^2+\mathrm{O}\big(|h||\partial A|^2\big), \tag{16}$$
$$\big|F^A_\sigma(h)(\partial h,\partial h)\big|\lesssim|\bar\partial h||\partial A|+|\bar\partial A||\partial h|+\mathrm{O}\big(|h||\partial h||\partial A|\big). \tag{17}$$

Ce Lemme découle uniquement de la structure des termes F, $\widetilde F$, F^A et des conditions (4)–(5).

[3] $w(q)=\begin{cases}1+(1+|q|)^{1+2\gamma}, & q>0\\ 1+(1+|q|)^{-2\mu}, & q<0\end{cases}$ avec $q=r-t$ et $\mu>0$; $\mathcal{Z}=\{\partial_\alpha, x_\alpha\partial_\beta-x_\beta\partial_\alpha, x^\alpha\partial_\alpha\}$, $I=(i_1,\dots,i_k)$ est un multi-index de longueur k, $Z^I=Z^{i_1}\cdots Z^{i_k}$ dénote le produit de $|I|$ termes de $\mathcal{Z}$; Σ_τ désigne l'hyper surface $\tau=$ constante.

[4] Les notations $\bar\partial$, $|\partial.|_{\mathcal{TU}}$ et $\lesssim$ sont les mêmes que dans [1] et [2].

Le Corollaire 7.2 de [2] appliqué à $\phi = A$ et $F = F^A$ et le Lemme 2.2 entraînent que pour $0 \leqslant t \leqslant T$, on a $|\partial A| \leqslant C\varepsilon(1+t+|q|)^{-1}$. Ce dernier résultat et le Lemme 2.2 impliquent que pour $0 \leqslant t \leqslant T$ et $|I| \leqslant N$:

$$\begin{aligned} \left|Z^I F_M\right| \leqslant C \sum_{|J|\leqslant|I|} &\left(\frac{\varepsilon|\partial Z^J(h^1,A)|}{1+t} + \frac{\varepsilon(1+|q|)^{\mu'-1/2}|\bar\partial Z^J(h^1,A)|}{(1+t+|q|)^{1-C\varepsilon}} + \frac{\varepsilon^2|Z^J(h^1,A)|}{(1+t+|q|)(1+|q|)}\right) \\ &+ C \sum_{|J|\leqslant|I|-1} \frac{\varepsilon|\partial Z^J(h^1,A)|}{(1+t)^{1-C\varepsilon}} + \frac{\varepsilon^2}{(1+t+|q|)^4}. \end{aligned} \tag{18}$$

On peut alors montrer, par des arguments analogues à ceux de [2], que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, l'inégalité (12) entraîne la même inégalité avec $2C_N$ remplacée par C_N pour $t \leqslant T$. Puisque $\mathcal{E}_N$ est une fonction continue, cela contredit la maximalité de T et implique que (12) est vraie pour $T \leqslant T_0$. De plus, puisque l'énergie $\mathcal{E}_N(t)$ est maintenant finie en $t = T_0$, on peut étendre la solution (h, A) au delà de T_0, contredisant ainsi la maximalité de T_0 et montrant que $T_0 = +\infty$. Ceci entraîne l'existence globale d'une solution g. Le fait que $(\mathbb{R}^4, g)$ est alors géodésiquement complète peut être établi par des arguments identiques à ceux de [1].

Références

[1] H.Lindblad, I.Rodnianski, Global existence for the Einstein vacuum equations in wave coordinates, pré-publication, 2004.
[2] H.Lindblad, I.Rodnianski, The global stability of Minkowski space–time in harmonic gauge, pré-publication, 2004.