Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 295–300
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse complexe/Équations aux dérivées partielles

Fonctionnelles analytiques et problèmes de Cauchy

Stéphane Rigat

Centre de mathématiques et informatique, université de Provence Aix-Marseille I, 39, rue Frédéric-Joliot-Curie, 13453 Marseille cedex 13, France

Reçu le 14 octobre 2005 ; accepté après révision le 19 décembre 2005

Présenté par Jean-Pierre Demailly

Résumé

Dans cette Note, suivant les idées originales de Fantappiè ([L. Fantappiè, Sur les méthodes nouvelles d'intégration des équations aux dérivées partielles au moyen des fonctionnelles analytiques, in : La théorie des équations aux dérivées partielles, vol. 81, Coll. Int. CNRS, Nancy, 9–15 avril 1956. [2]], [F. Pellegrino, Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle, P. Levy (Ed.), Gauthier-Villars, Paris, 1951, pp. 357–484. [7]]), nous faisons un lien entre les problèmes de Cauchy, les fonctionnelles analytiques et le calcul fonctionnel. En particulier, utilisant les formules de représentation intégrale classiques de l'analyse complexe, nous obtenons une formule de représentation intégrale explicite des solutions de problèmes de Cauchy complexes. Enfin, les développements récents de l'analyse convexe complexe d'Andersson–Passare–Sigurdsson nous permettent d'obtenir un domaine de définition de la solution si les données de Cauchy sont définies dans un ensemble $\mathbb{C}$-convexe. ***Pour citer cet article : S. Rigat, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***
© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Analytic functionals and Cauchy problems. In this Note, following ideas first initiated by Fantappiè ([L. Fantappiè, Sur les méthodes nouvelles d'intégration des équations aux dérivées partielles au moyen des fonctionnelles analytiques, in : La théorie des équations aux dérivées partielles, vol. 81, Coll. Int. CNRS, Nancy, 9–15 avril 1956. [2]], [F. Pellegrino, Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle, P. Levy (Ed.), Gauthier-Villars, Paris, 1951, pp. 357–484. [7]]), we make a link between Cauchy problems, analytic functionals and functional calculus. In particular, using classical representation formulas from complex analysis, we obtain an integral representation formula for solutions to complex Cauchy problems. Moreover, recent developments in complex convex analysis of Andersson–Passare–Sigurdsson allow us to obtain a domain of definition of the solution if Cauchy data are defined in a $\mathbb{C}$-convex domain. ***To cite this article: S. Rigat, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***
© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Let $n \neq 0$ be a natural integer. If Ω is an open set in $\mathbb{C}^n$, we denote by $\mathcal{O}(\Omega)$ the space of holomorphic functions in Ω. If $F \subset \mathbb{C}^n$ is not open, then $\mathcal{O}(F)$ denotes the space of holomorphic functions in an open neighbourhood of $\overline{F}$. We denote by $\mathcal{O}(0)$ the space $\mathcal{O}(\{0\})$.

Adresses e-mail : Stephane.Rigat@cmi.univ-mrs.fr, rigat@cmi.univ-mrs.fr (S. Rigat).

1631-073X/$ – see front matter © 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2005.12.026

Let U be an open set in $\mathbb{C}^n$. We say that μ is an analytic functional on $\mathcal{O}(U)$ if μ is a continuous linear form on the space $\mathcal{O}(U)$ with the topology of uniform convergence on compact subsets of X. Therefore, there exists a compact set $K \subset U$ and there exists a constant C_K such that, for every $\varphi \in \mathcal{O}(U)$, $|\mu(\varphi)| = |\langle \mu, \varphi\rangle| \leqslant C_K \sup_K |\varphi|$. We write then $\mu \in \mathcal{O}'(U)$.

We denote by $z = (z_0, \ldots, z_n)$ the coordinates in $\mathbb{C}^{n+1}$ and we set $z = (z_0, z')$ where $z' = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. If $(z, w) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$, we let $\langle z, w\rangle = \sum_{k=0}^n z_k w_k = z_0 w_0 + \langle z', w'\rangle$ and $|z|^2 = \langle z, \bar{z}\rangle = |z_0|^2 + |z'|^2$.

We denote by $\mathbb{P}_n = \{z' \in \mathbb{C}^n\colon\ |z_1| < 1, \ldots, |z_n| < 1\}$ the unit polydisc in $\mathbb{C}^n$ and by $\mathbb{B}_n = \{z' \in \mathbb{C}^n\colon\ |z'| < 1\}$ the unit ball in $\mathbb{C}^n$.

Let us consider Ω an open set in $\mathbb{C}^{n+1}$ such that $\omega = \Omega \cap \{z_0 = 0\}$ is non-empty. We denote by $T_1, \ldots, T_n$ the n commuting operators defined on the space $\mathcal{O}(\omega)$ by $T_k = \frac{\partial}{\partial z_0^{-1}} \frac{\partial}{\partial z_k}$ where $\frac{\partial}{\partial z_0^{-1}} = \int_0^{z_0}$.

If $\varphi \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ is a polynomial of the form $\varphi(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$, then we denote by $\varphi(T) = \varphi(T_1, \ldots, T_n)$ the operator $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha T_1^{\alpha_1} \cdots T_n^{\alpha_n} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha T^\alpha$.

Definition 0.1 (*see* [1,4]). Let E be a set in $\mathbb{C}^n$. We say that E is $\mathbb{C}$-convex if and only if all its intersections with complex lines are connected and simply connected.

We denote by E^* the dual set of E defined by $E^* = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ \forall w \in E,\ \langle z, w\rangle \neq -1\}$.

Our first main result is an holomorphic functional calculus of those operators, defined in Fantappiè's spirit:

Theorem 0.2. *We have the following*

(i) *For every $f \in \mathcal{O}(\omega)$, every $\varepsilon > 0$ and every $z \in \Omega$ sufficiently close to ω, the mapping $\mu_{f,z} : \varphi \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n] \mapsto [\varphi(T) f](z)$ can be uniquely extended as an analytic functional on $\mathcal{O}(\varepsilon\mathbb{P}_n)$. We still denote, for all $\varphi \in \mathcal{O}(\varepsilon\mathbb{P}_n)$, $[\varphi(T) f](z) := \mu_{f,z}(\varphi)$. Moreover, for every $\varphi \in \mathcal{O}(\varepsilon\mathbb{P}_n)$ and every $f \in \mathcal{O}(\omega)$, we have $\varphi(T) f \in \mathcal{O}(\omega)$.*

(ii) *For $\varphi, \psi \in \mathcal{O}(\varepsilon\mathbb{P}_n)$, we have $\{[(\varphi\psi)(T)] f\}(z) = \{\varphi(T)[\psi(T) f]\}(z)$.*

(iii) *For every $\varepsilon > 0$, every $f \in \mathcal{O}(w)$, every $\zeta \in \mathbb{C}^n$ and every z sufficiently close to ω, we can define $F^\varepsilon_{f,z}(\zeta) := [\frac{1}{(\varepsilon^2 + \langle \zeta, T\rangle)^n} f](z)$, and, for every $\varphi \in \mathcal{O}(\varepsilon\overline{\mathbb{B}}_n)$, the following representation formula holds*:

$$\big[\varphi(T) f\big](z) = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^n} \int\limits_{|\zeta| = \varepsilon} \varphi(\zeta) F^\varepsilon_{f,z}(-\bar{\zeta}) \partial\big(|\zeta|^2\big) \wedge \big(\bar{\partial}\partial\big(|\zeta|^2\big)\big)^{n-1}.$$

(iv) *If moreover, φ is holomorphic in an open set $U \subset \mathbb{C}^n$ and f is holomorphic in $\mathbb{C} \times \omega$ where ω is $\mathbb{C}$-convex then we can prolongate $\varphi(T) f$ to the set $\check{\omega}$ which is the set of $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ such that $z' \in \omega$ and, for every $\zeta \in \mathbb{C}^n \setminus U$, the complex hyperplane with normal vector $(1, \zeta)$ in $\mathbb{C}^{n+1}$ passing through z meets ω.*

We apply this theorem in order to give explicit solutions to holomorphic and non-characteristic Cauchy problems.

Let Ω be a $\mathbb{C}$-convex open set in $\mathbb{C}^{n+1}$ with coordinates $z = (z_0, \ldots, z_n) = (z_0, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. We denote by ω the set $\Omega \cap \{z_0 = 0\}$.

Let $P \in \mathbb{C}[z_0, z_1, \ldots, z_n]$ be a polynomial of degree $m \geqslant 2$.

We say that a complex hyperplane $\{z \in \mathbb{C}^{n+1},\ \langle \zeta, z\rangle = p\}$ where $\zeta \in \mathbb{C}^{n+1}$ and $p \in \mathbb{C}$ is characteristic if and only if $P_m(\zeta) = 0$ where P_m denotes the homogeneous part of P of degree m.

We consider the following Cauchy problem:

$$\begin{cases} P\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right) f = g, \\ f(0, z') = h_0(z'), & \forall z' \in \omega, \\ \quad\vdots \\ \dfrac{\partial^{m-1} f}{\partial z_0^{m-1}}(0, z') = h_{m-1}(z'), & \forall z' \in \omega \end{cases}$$

and we assume that the hyperplane $\{z_0 = 0\}$ is non-characteristic.

We can assume that P is homogeneous. If we consider as before the n operators $T_1, \dots, T_n$, then letting $\partial/\partial z_0^{-1}$ act m times on the partial differential equation $P(\partial/\partial z)f = g$ and using the Cauchy data, we get that f is a solution if and only if $P(1,T)f = \tilde{g}$ or if and only if $f(z) = [\frac{1}{P(1,T)}]\tilde{g}(z)$, where $\tilde{g}$ can be computed explicitly. The theorem gives us the following

Theorem 0.3. *If Ω is $\mathbb{C}$-convex, the solution f is given by an explicit integral formula and is holomorphic in the set $\tilde{\omega}$ which is the set of $z \in \Omega$ such that every complex characteristic hyperplane passing through z meets ω.*

The extension result has been proved by Kiselman (cf. [6]) in the case where Ω is convex. A similar result has been proved by Sternin–Shatalov in [8] (Theorem 5.13).

Moreover, these technics can be adapted to the case where the Cauchy data are given on a piece of complex analytic non-singular hypersurfaces.

1. Calcul fonctionnel holomorphe

Soit $n \neq 0$ un entier naturel. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, nous notons $\mathcal{O}(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes dans Ω. Si $F \subset \mathbb{C}^n$ n'est pas ouvert, alors $\mathcal{O}(F)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes dans un voisinage ouvert de $\overline{F}$. Nous notons $\mathcal{O}(0)$ l'espace $\mathcal{O}(\{0\})$.

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Nous disons que μ est une fonctionnelle analytique sur $\mathcal{O}(U)$ si μ est une forme linéaire continue sur l'espace $\mathcal{O}(U)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de X. En particulier, il existe un compact $K \subset U$ et il existe une constante C_K telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{O}(U)$, $|\mu(\varphi)| = |\langle \mu, \varphi\rangle| \leqslant C_K \sup_K |\varphi|$. Nous écrirons alors $\mu \in \mathcal{O}'(U)$.

Nous notons $z = (z_0, \dots, z_n)$ les coordonnées dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et nous posons $z = (z_0, z')$ où $z' = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Si $(z, w) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$, nous posons $\langle z, w\rangle = \sum_{k=0}^n z_k w_k = z_0 w_0 + \langle z', w'\rangle$ et $|z|^2 = \langle z, \bar{z}\rangle = |z_0|^2 + |z'|^2$.

Nous notons $\mathbb{P}_n = \{z' \in \mathbb{C}^n\colon\ |z_1| < 1, \dots, |z_n| < 1\}$ le polydisque unité de $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{B}_n = \{z' \in \mathbb{C}^n\colon\ |z'| < 1\}$ la boule unité de $\mathbb{C}^n$.

Considérons un ouvert Ω de $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\omega = \Omega \cap \{z_0 = 0\}$ soit non vide. Nous notons $T_1, \dots T_n$ les n opérateurs commutant entre eux deux à deux définis sur l'espace $\mathcal{O}(\omega)$ par $T_k = \frac{\partial}{\partial z_0^{-1}} \frac{\partial}{\partial z_k}$ où $\frac{\partial}{\partial z_0^{-1}} = \int_0^{z_0}$.

Si $\varphi \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ est un polynôme de la forme $\varphi(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$, alors $\varphi(T) = \varphi(T_1, \dots, T_n)$ désigne l'opérateur $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha T_1^{\alpha_1} \cdots T_n^{\alpha_n} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha T^\alpha$.

Définition 1.1 (*voir* [1,4]). Soit E un ensemble de $\mathbb{C}^n$. On dit que E est $\mathbb{C}$-convexe si et seulement si l'intersection de E avec toute droite complexe affine est connexe et simplement connexe.

On note E^* le dual de E défini par $E^* = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ \forall w \in E,\ \langle z, w\rangle \neq -1\}$.

Notre premier résultat principal est un calcul fonctionnel holomorphe dans l'esprit de celui introduit par Fantappiè :

Théorème 1.2. *Nous avons les assertions suivantes* :

(i) *Pour tout $f \in \mathcal{O}(\omega)$, tout $\varepsilon > 0$ et tout $z \in \Omega$ suffisamment proche de ω, l'application $\mu_{f,z}\colon\ \varphi \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] \mapsto [\varphi(T)f](z)$ se prolonge de manière unique en une fonctionnelle analytique sur $\mathcal{O}(\varepsilon\mathbb{P}_n)$. Nous notons toujours, pour tout $\varphi \in \mathcal{O}(\varepsilon\mathbb{P}_n)$, $[\varphi(T)f](z) := \mu_{f,z}(\varphi)$. De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{O}(\varepsilon\mathbb{P}_n)$ et tout $f \in \mathcal{O}(\omega)$, nous avons $\varphi(T)f \in \mathcal{O}(\omega)$.*

(ii) *Pour $\varphi, \psi \in \mathcal{O}(\varepsilon\mathbb{P}_n)$, nous avons $\{[(\varphi\psi)(T)]f\}(z) = \{\varphi(T)[\psi(T)f]\}(z)$.*

(iii) *Pour tout $\varepsilon > 0$, tout $f \in \mathcal{O}(w)$, tout $\zeta \in \mathbb{C}^n$ et tout z suffisamment proche de ω, nous pouvons définir $F_{f,z}^{\varepsilon}(\zeta) := [\frac{1}{(\varepsilon^2 + \langle \zeta, T\rangle)^n} f](z)$, et, pour tout $\varphi \in \mathcal{O}(\varepsilon\overline{\mathbb{B}}_n)$, nous avons la formule de représentation suivante* :

$$\big[\varphi(T)f\big](z) = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^n} \int\limits_{|\zeta| = \varepsilon} \varphi(\zeta) F_{f,z}^{\varepsilon}(-\bar{\zeta})\partial\big(|\zeta|^2\big) \wedge \big(\bar{\partial}\partial\big(|\zeta|^2\big)\big)^{n-1}.$$

(iv) *Si de plus* φ *est holomorphe dans un ouvert* $U \subset \mathbb{C}^n$ *et* f *est holomorphe dans* $\mathbb{C} \times \omega$ *où* ω *est* $\mathbb{C}$*-convexe, alors nous pouvons prolonger* $\varphi(T)f$ *à l'ensemble* $\check{\omega}$ *qui est l'ensemble des* $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ *tels que* $z' \in \omega$ *et, pour tous* $\zeta \in \mathbb{C}^n \setminus U$*, l'hyperplan complexe ayant pour vecteur normal* $(1, \zeta)$ *dans* $\mathbb{C}^{n+1}$ *et passant par* z *rencontre* ω*.*

Remarque 1. Si nous notons $\mathcal{F}\mu_{f,z}(\zeta)$ la transformée de Fantappiè de la fonctionnelle analytique $\mu_{f,z}$, i.e. $\mathcal{F}\mu_{f,z}(\zeta) = [\frac{1}{1+\langle\zeta,T\rangle} f](z)$, alors

$$F^{\varepsilon}_{f,z}(\zeta) = \frac{1}{(n-1)!\,\varepsilon^{2n}} \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(t^{n-1}\mathcal{F}\mu_{f,z}\left(\frac{t\zeta}{\varepsilon^2}\right)\right)\right]_{t=1}.$$

Donc, pour calculer $\varphi(T)f$ pour tout φ holomorphe au voisinage de 0 il suffit de calculer $\mathcal{F}\mu_{f,z}(\zeta)$, i.e. il suffit de trouver la solution h du problème de Cauchy du premier ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial z_0} + \zeta_1 \dfrac{\partial h}{\partial z_1} + \cdots + \zeta_n \dfrac{\partial h}{\partial z_n} = \dfrac{\partial f}{\partial z_0}, \\ h(0, z') = f(0, z'). \end{cases}$$

Idée de la démonstration du Théorème 1.2. Soit $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in \mathcal{O}(\varepsilon\mathbb{P}_n)$. On développe en série entière $\varphi(\lambda) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha \lambda^\alpha$ dans $\varepsilon\mathbb{P}_n$ avec les notations multiindicielles usuelles. Soit f une fonction holomorphe définie dans un ouvert U contenant ω et contenu dans Ω. Des estimations de Cauchy élémentaires permettent de montrer que $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha [T^\alpha f](z)$ est convergente, ce qui nous donne le point (i).

Pour le point (ii), on remarque que c'est vrai si φ et ψ sont des polynômes. Un argument de densité permet de conclure.

Pour $\varepsilon > 0$ et $\zeta \in \mathbb{C}^n$ tel que $|\zeta| = \varepsilon$, l'application $\lambda \in \mathbb{C}^n \mapsto (\varepsilon^2 + \langle\zeta, \lambda\rangle)^{-n}$ est un élément de $\mathcal{O}(\varepsilon\mathbb{B}_n) \subset \mathcal{O}(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\mathbb{P}_n)$. Donc $F_{f,z}(\zeta)$ a bien un sens. Grâce au théorème de Riesz, il existe une mesure ν dont le support est inclus dans $\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}\overline{\mathbb{P}}_n$ telle que

$$\forall\varphi \in \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\mathbb{P}_n\right), \quad \mu_{f,z}(\varphi) = \int\limits_{w\in\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}\overline{\mathbb{P}}_n} \varphi(w)\,\mathrm{d}\nu(w).$$

Ecrivons la formule de Bochner (cas particulier de la formule de Cauchy–Fantappiè–Leray (cf. [3]) :

$$\forall w \in \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}\mathbb{P}_n, \quad \varphi(w) = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^n} \int\limits_{|\zeta|=\varepsilon} \varphi(\zeta) \frac{\partial(|\zeta|^2) \wedge (\bar\partial\partial|\zeta|^2)^{n-1}}{(\varepsilon^2 - \langle\bar\zeta, w\rangle)^n}$$

insérons la dans la formule précédente et intervertissons les intégrales. Nous obtenons le point (iii).

Pour le point (iv), on note que

$$\big[\varphi(T)\big]f(z) = \int\limits_\gamma \varphi(\zeta)\psi(w)\sigma(\zeta, w)$$

où $\gamma = \{(\zeta, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n, w = -\bar\zeta/|\zeta|^2 \text{ and } |\zeta| = \varepsilon\}$ est un $(2n-1)$-cycle dans $\Delta = \{(\zeta, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n, 1 + \langle\zeta, w\rangle = 0\}$, $\psi(w) = [\frac{1}{(1+\langle w,T\rangle)^n}]f(z)$ et $\sigma(\zeta, w) = \sum_{j=1}^n w_j\,\mathrm{d}\zeta_j \wedge (\sum_{j=1}^n \mathrm{d}w_j \wedge \mathrm{d}\zeta_j)^{n-1}$. Si $z = (z_0, z') \in \mathbb{C}^{n+1}$ est fixé et satisfait $z_0 \neq 0$, $z' \in \omega$, alors ψ est holomorphe dans un voisinage de $\frac{z'}{z_0} - \frac{1}{z_0}\omega$. Grâce au Théorème 3.1.7 d'Andersson–Passare–Sigurdsson [1] et en reprenant la terminologie employée dans ce théorème, on a

$$\big[\varphi(T)\big]f(z) = \langle\!\langle\varphi, \psi\rangle\!\rangle$$

et on en déduit que $[\varphi(T)f](z)$ a un sens si φ est holomorphe dans $(\frac{z'}{z_0} - \frac{1}{z_0}\omega)^*$ et donc si pour tout $\zeta \in \mathbb{C}^n \setminus U$, l'hyperplan complexe ayant pour vecteur normal $(1, \zeta)$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et passant par z rencontre ω. $\square$

2. Application aux problèmes de Cauchy complexes

Soit Ω un ouvert $\mathbb{C}$-convexe de $\mathbb{C}^{n+1}$. Pour $z \in \mathbb{C}^{n+1}$, on note $z = (z_0, \dots, z_n) = (z_0, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. On note ω l'ensemble $\Omega \cap \{z_0 = 0\}$.

Soit $P \in \mathbb{C}[z_0, z_1, \dots, z_n]$ un polynôme de degré $m \geqslant 2$. Nous disons qu'un hyperplan complexe $\{z \in \mathbb{C}^{n+1}, \langle \zeta, z\rangle = p\}$ où $\zeta \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $p \in \mathbb{C}$ est caractéristique si et seulement si $P_m(\zeta) = 0$ où P_m désigne la partie homogène de P de degré m.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} P\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right) f = g, & \\ f(0, z') = h_0(z'), & \forall z' \in \omega, \\ \quad\vdots & \\ \dfrac{\partial^{m-1} f}{\partial z_0^{m-1}}(0, z') = h_{m-1}(z'), & \forall z' \in \omega \end{cases}$$

et nous supposons que l'hyperplan $\{z_0 = 0\}$ est non caractéristique.

On peut supposer que P est homogène.

Si nous considérons les n opérateurs $T_1, \dots, T_n$, alors si on applique l'opérateur $\partial/\partial z_0^{-1}$ m fois à l'équation au dérivées partielles $P(\partial/\partial z) f = g$ et en utilisant les données de Cauchy, on obtient que f est une solution si et seulement si $P(1, T) f = \tilde{g}$ ou si et seulement si $f(z) = [\frac{1}{P(1,T)}]\tilde{g}(z)$, où $\tilde{g}$ peut-être calculée explicitement en fonction g et des h_i. Le théorème et la remarque nous donnent donc le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Si Ω est $\mathbb{C}$-convexe, la solution f est donnée par une formule de représentation intégrale explicite et est holomorphe dans l'ensemble $\tilde{\omega}$, ensemble des $z \in \Omega$ tels que tout hyperplan complexe caractéristique passant par z rencontre ω.*

Le résultat d'extension a été prouvé par Kiselman Ω (cf. [6]) dans le cas où Ω est convexe. Un théorème similaire a été obtenu par Sternin et Shatalov (cf. Théorème 5.13 de [8]).

Idée de la démonstration. Le théorème est évident si $m \leqslant 1$. Supposons donc que $m \geqslant 2$. Grâce au principe de Duhamel (cf. [5]), on peut supposer que $g = h_0 = \cdots = h_{m-2} = 0$. Notons $h = h_{m-1}$. Si on suit la preuve du point (iv) du théorème précédent, il suffit de prouver que

$$\psi(w) = \left[\frac{1}{(1 + \langle w, T\rangle)^n}\right]\left\{\frac{z_0^{m-1}}{(m-1)!} h(z')\right\}$$

est holomorphe dans un voisinage de $\frac{z'}{z_0} - \frac{1}{z_0}\omega$, indépendamment du fait que $z' \in \omega$. On peut montrer qu'on peut se ramener au cas $n \geqslant m$. Utilisant la remarque et la formule de Leibniz, nous avons

$$\begin{aligned} \psi(w) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{z_0} \frac{(z_0 - u)^{m-2}}{(m-2)!} \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \big(t^{n-1} h(z' - t w u)\big)\right]_{t=1} \mathrm{d}u \\ &= \int_0^{z_0} \frac{(z_0 - u)^{m-2}}{(m-2)!} \left(\frac{u^{n-1}}{(n-1)!} H(u)\right)^{(n-1)} \mathrm{d}u = \left(\frac{u^{n-1}}{(n-1)!} H(u)\right)^{(n-m)}_{u = z_0} \end{aligned}$$

où $H(u) = h(z' - wu)$. Donc, ψ est holomorphe dans un voisinage de $\frac{z'}{z_0} - \frac{1}{z_0}\omega$ indépendamment du fait que $z' \in \omega$. $\square$

3. Problèmes de Cauchy complexes avec données sur des hypersurfaces analytiques complexes non singulières

Dans cette section, Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, P est un polynôme homogène de degré $m \geqslant 2$. On considère une hypersurface analytique complexe V définie par $V = \{z \in \Omega,\ z_1 = \psi(z')\}$ où ψ est holomorphe dans $\omega = \{z' \in \mathbb{C}^{n-1},$

$(\psi(z'), z') \in \Omega\}$. Si $g \in \mathcal{O}(V)$ et $h_0, \ldots, h_{m-1} \in \mathcal{O}(V)$ sont des fonctions holomorphes dans un voisinage de V, nous voulons trouver $f \in \mathcal{O}(V)$ telle que

$$\begin{cases} P\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right) f = g \\ f = h_0, \ldots, \dfrac{\partial^{m-1} f}{\partial z_1^{m-1}} = h_{m-1} \quad \text{sur } V. \end{cases}$$

On peut supposer que $h_0 = \cdots = h_{m-1} = 0$.

Si on introduit comme auparavant les opérateurs $\partial/\partial z_1{}^{-1} = \int_{\psi(z')}^{z_1}$ et les opérateurs $T_k = \partial/\partial z_1^{-1} \partial/\partial z_k$, pour $k = 2, \ldots, n$, si on applique m fois l'opérateur $\partial/\partial z_1{}^{-1}$ à l'équation aux dérivées partielles et si on utilise le fait que les opérateurs T_j commutent entre eux deux à deux sur l'espace des fonctions holomorphes au voisinage de V nulles sur V alors on obtient un calcul fonctionnel analogue pour ces opérateurs ainsi qu'une formule de représentation de la solution f tout aussi analogue.

Remerciements

Je remercie Gennadi Henkin pour d'utiles conversations sur ce sujet. Je remercie aussi Mats Andersson qui a décelé une erreur dans une version préliminaire de ce travail.

Références

[1] M. Andersson, M. Passare, R. Sigurdsson, Complex convexity and Analytic Functionals, Birkhäuser, 2004.
[2] L. Fantappiè, Sur les méthodes nouvelles d'intégration des équations aux dérivées partielles au moyen des fonctionnelles analytiques, in : La théorie des équations aux dérivées partielles, vol. 81, Coll. Int. CNRS, Nancy, 9–15 avril 1956.
[3] G.M. Henkin, The method of integral representations in complex analysis, in: A.G. Vitushkin (Ed.), Several Complex Variables I, in: Encyclopaedia Math. Sci., vol. 7, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
[4] L. Hörmander, Notions of Convexity, Progr. Math., vol. 127, Birkhäuser, 1994.
[5] F. John, Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations, Interscience, New York, 1955.
[6] C. Kiselman, Prolongement des solutions d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants, Bull. Soc. Math. France 97 (1969) 329–356.
[7] F. Pellegrino, Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle, in : P. Levy (Ed.), Gauthier-Villars, Paris, 1951, pp. 357–484.
[8] B. Sternin, V. Shatalov, Differential Equations on Complex Manifolds, Math. Appl., Kluwer Academic Press, 1994.