Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 223–227

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des nombres

Principe de Hasse pour les intersections de deux quadriques

Olivier Wittenberg

Laboratoire de mathématiques, bâtiment 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France

Reçu le 29 novembre 2005 ; accepté le 6 décembre 2005

Disponible sur Internet le 5 janvier 2006

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Admettant l'hypothèse de Schinzel et la finitude des groupes de Tate–Shafarevich des courbes elliptiques sur les corps de nombres, toute intersection lisse de deux quadriques dans l'espace projectif de dimension n satisfait au principe de Hasse si $n \geqslant 5$. Le même résultat vaut pour $n = 4$, c'est-à-dire pour les surfaces de del Pezzo de degré 4, lorsque le groupe de Brauer est réduit aux constantes et que la surface est suffisamment générale. Les preuves détaillées des résultats annoncés dans cette Note seront publiées ultérieurement. ***Pour citer cet article : O. Wittenberg, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

Hasse principle for intersections of two quadrics. Assuming Schinzel's hypothesis and the finiteness of Tate–Shafarevich groups of elliptic curves over number fields, smooth intersections of two quadrics in n-dimensional projective space satisfy the Hasse principle if $n \geqslant 5$. The same result holds for $n = 4$, i.e., for del Pezzo surfaces of degree 4, provided the Brauer group is reduced to constants and the surface is sufficiently general. Detailed proofs of the results announced herein will be published later on. ***To cite this article: O. Wittenberg, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abridged English version

Let q_1 and q_2 be homogeneous quadratic forms in five variables, with coefficients in a number field k. Assume that the projective variety $X \subset \mathbf{P}^4_k$ defined by $q_1 = q_2 = 0$ is a smooth surface; it is then a del Pezzo surface of degree 4, and all del Pezzo surfaces of degree 4 are obtained in this way. The homogeneous polynomial $f(\lambda, \mu) = \det(\lambda q_1 + \mu q_2) \in k[\lambda, \mu]$ is separable and has degree 5. Let $\mathcal{S} \subset \mathbf{P}^1_k$ be the closed subscheme defined by $f = 0$ and let $\{t_0, \ldots, t_4\}$ be the set of its $\bar{k}$-points. The residue field of a closed point $t \in \mathcal{S}$ is denoted $\kappa(t)$.

For $t \in \mathcal{S}$, if $[\lambda : \mu]$ are homogeneous coordinates for t with $\lambda, \mu \in \kappa(t)$ and if L is a $\kappa(t)$-rational hyperplane of $\mathbf{P}^4_k$ which does not contain the unique singular point of the quadric $\lambda q_1 + \mu q_2 = 0$, the discriminant of the restriction of $\lambda q_1 + \mu q_2$ to the vector space underlying L does not depend on L. We shall denote it by $\varepsilon_t \in \kappa(t)^\star/\kappa(t)^{\star 2}$.

The following proposition gives a practical recipe for computing the cohomological Brauer group $\mathrm{Br}(X) = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_\mathrm{m})$ of X.

Adresse e-mail : olivier.wittenberg@ens.fr (O. Wittenberg).

1631-073X/$ – see front matter © 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2005.12.005

Proposition 0.1. *The group* $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ *is a* $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$*-vector space of dimension* $\max(0, n-d-1)$, *where* $n = \#\{t \in \mathcal{S};\ \varepsilon_t \neq 1\}$ *and* d *is the dimension of the sub-*$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$*-vector space of* $k^\star/k^{\star 2}$ *spanned by the norms* $N_{\kappa(t)/k}(\varepsilon_t)$ *for* $t \in \mathcal{S}$.

We now state the core technical result of this Note. The reader is referred to [7] for more details on Schinzel's hypothesis.

Theorem 0.2. *Assume Schinzel's hypothesis and the finiteness of Tate–Shafarevich groups of elliptic curves over* k. *Assume moreover that* $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) = 0$, *that* t_0 *is* k*-rational, that* $\varepsilon_t \neq 1$ *for each* $t \in \mathcal{S} \setminus \{t_0\}$ *which has degree at most* 3 *over* k, *and that either* $\varepsilon_{t_0} = 1$ *or there exists* $t \in \mathcal{S}$ *such that the image of* ε_{t_0} *in* $\kappa(t)^\star/\kappa(t)^{\star 2}$ *is distinct from* 1 *and from* ε_t. *Then* X *satisfies the Hasse principle.*

The most striking consequences of Theorem 0.2 for the arithmetic of del Pezzo surfaces of degree 4 are summarized below.

Corollary 0.3. *Assume Schinzel's hypothesis and the finiteness of Tate–Shafarevich groups of elliptic curves over number fields. The surface* X *satisfies the Hasse principle as soon as one of the following conditions holds*:

(i) *the group* Γ *acts* 3*-transitively on* $\mathcal{S}(\bar{k})$ (i.e. *by the symmetric group or by the alternating group*);
(ii) *one of the* t_i*'s is* k*-rational and* Γ *acts* 2*-transitively on the other four* t_i*'s*;
(iii) *exactly two of the* t_i*'s are* k*-rational and* $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) = 0$;
(iv) *all of the* t_i*'s are* k*-rational and* $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) = 0$.

It was conjectured by Colliot-Thélène and Sansuc that X should satisfy the Hasse principle as soon as $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) = 0$ (see [3]). Under Schinzel's hypothesis and the finiteness of Tate–Shafarevich groups of elliptic curves, Corollary 0.3 establishes this conjecture for a very large class of del Pezzo surfaces of degree 4. It should be noted that a sufficiently general del Pezzo surface of degree 4 falls into case (i) above, and that case (iv) occurs exactly when q_1 and q_2 are simultaneously diagonalizable over k.

Corollary 0.4. *Assume Schinzel's hypothesis and the finiteness of Tate–Shafarevich groups of elliptic curves over number fields. Smooth intersections of two quadrics in* $\mathbf{P}^n_k$ *with* $n \geqslant 5$ *satisfy the Hasse principle.*

The conclusion of Corollary 0.4 is a well-known conjecture of Colliot-Thélène and Sansuc (see [5, §16] and [9]). Corollary 0.4 is deduced from Corollary 0.3 by induction on n and a reduction to hyperplane sections. When $n = 5$, a monodromy argument is needed to ensure that the first hypothesis of Corollary 0.3 is satisfied for a sufficiently general hyperplane section.

1. Notations

Soient k un corps de nombres et $\bar{k}$ une clôture algébrique de k. Notons Γ le groupe de Galois de $\bar{k}$ sur k. On désigne par $\mathbf{P}^n_k$ l'espace projectif de dimension n sur k et par $(\mathbf{P}^n_k)^\star$ l'espace projectif dual. Si X est un schéma, on note $\kappa(x)$ le corps résiduel d'un point $x \in X$ et $\mathrm{Br}(X) = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_\mathrm{m})$ le groupe de Brauer cohomologique de X. Si X est un k-schéma, on note abusivement $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ le conoyau de la flèche naturelle $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X)$; si de plus K/k est une extension de corps, on note $X(K)$ l'ensemble des points K-rationnels de X. Enfin, on dit qu'une variété X sur k *satisfait au principe de Hasse* lorsque $\prod_{v \in \Omega} X(k_v) \neq \varnothing \Rightarrow X(k) \neq \varnothing$, où Ω désigne l'ensemble des places de k et k_v est le complété de k en v.

2. Surfaces de del Pezzo de degré 4

Soient q_1 et q_2 deux formes quadratiques homogènes en cinq variables, à coefficients dans k. Notons $X \subset \mathbf{P}^4_k$ la variété projective définie par le système $q_1 = q_2 = 0$ et supposons que X soit une surface lisse. La surface X est une surface de del Pezzo de degré 4 ; réciproquement, toute surface de del Pezzo de degré 4 est isomorphe à X pour des choix appropriés de q_1 et q_2. Le polynôme $f(\lambda,\mu) = \det(\lambda q_1 + \mu q_2) \in k[\lambda,\mu]$ est homogène, séparable, de degré 5. Notons $\mathcal{S} \subset \mathbf{P}^1_k$ le sous-schéma fermé d'équation $f = 0$ et $\{t_0,\dots,t_4\}$ l'ensemble de ses $\bar{k}$-points.

Pour $t \in \mathcal{S}$, définissons une classe $\varepsilon_t \in \kappa(t)^\star/\kappa(t)^{\star 2}$ comme suit. Soient $[\lambda:\mu]$ des coordonnées homogènes pour t, avec $\lambda,\mu \in \kappa(t)$. Comme X est lisse, la quadrique d'équation $\lambda q_1 + \mu q_2 = 0$ possède un unique point singulier. Soit L un hyperplan $\kappa(t)$-rationnel de $\mathbf{P}^4_k$ ne contenant pas ce point. La restriction de $\lambda q_1 + \mu q_2$ à l'espace vectoriel sous-jacent à L est une forme quadratique non dégénérée en quatre variables, à coefficients dans $\kappa(t)$. Son discriminant ne dépend pas de L ; on le note ε_t.

Proposition 2.1. *Le groupe* $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ *est un* $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$*-espace vectoriel de dimension* $\max(0, n-d-1)$*, où* $n = \mathrm{Card}\{t \in \mathcal{S};\ \varepsilon_t \neq 1\}$ *et d est la dimension du sous-*$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$*-espace vectoriel de $k^\star/k^{\star 2}$ engendré par les normes $N_{\kappa(t)/k}(\varepsilon_t)$ pour $t \in \mathcal{S}$.*

Le principe de la démonstration est le même que pour [4, Theorem 3.19].

Nous aurons à considérer la condition suivante :

($\star$) le groupe $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ est trivial, le point t_0 est k-rationnel, on a $\varepsilon_t \neq 1$ pour tout $t \in \mathcal{S} \setminus \{t_0\}$ de degré au plus 3 sur k, et enfin soit $\varepsilon_{t_0} = 1$, soit il existe $t \in \mathcal{S}$ tel que l'image de ε_{t_0} dans $\kappa(t)^\star/\kappa(t)^{\star 2}$ soit distincte de 1 et de ε_t.

Théorème 2.2. *Admettons l'hypothèse de Schinzel et la finitude des groupes de Tate–Shafarevich des courbes elliptiques sur k. Si la condition ($\star$) est vérifiée, la surface X satisfait au principe de Hasse.*

Nous renvoyons à [7] pour l'énoncé de l'hypothèse de Schinzel et pour plus de détails sur le rôle qu'elle joue dans ce type de questions. Le Théorème 2.2 constitue le cœur technique de cette Note. Avant d'en esquisser la démonstration, citons-en quelques conséquences intéressantes pour l'arithmétique des surfaces de del Pezzo de degré 4.

Corollaire 2.3. *Admettons l'hypothèse de Schinzel et la finitude des groupes de Tate–Shafarevich des courbes elliptiques sur les corps de nombres. La surface X satisfait au principe de Hasse dès que l'une des conditions suivantes est remplie* :

(i) *le groupe Γ agit* 3*-transitivement sur* $\mathcal{S}(\bar{k})$ (i.e. *par le groupe symétrique ou le groupe alterné*) ;
(ii) *l'un des t_i est k-rationnel et Γ agit* 2*-transitivement sur les quatre autres* ;
(iii) *exactement deux des t_i sont k-rationnels et* $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) = 0$;
(iv) *tous les t_i sont k-rationnels et* $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) = 0$.

Les surfaces de del Pezzo de degré 4 pour lesquelles tous les t_i sont k-rationnels sont celles qui sont isomorphes à des intersections de deux quadriques *simultanément diagonales*, c'est-à-dire définies par l'annulation de deux formes quadratiques diagonales.

Si l'on admet l'hypothèse de Schinzel et la finitude des groupes de Tate–Shafarevich, le Théorème 2.2 et le Corollaire 2.3 prouvent une grande partie de la conjecture de Colliot-Thélène et Sansuc selon laquelle toute surface de del Pezzo de degré 4 telle que $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) = 0$ satisfait au principe de Hasse (cf. [3]). Colliot-Thélène, Skorobogatov et Swinnerton-Dyer [6, §3.2] l'avaient déjà démontrée pour des intersections de deux quadriques *simultanément diagonales* « suffisamment générales » (en un sens explicite), sous l'hypothèse de Schinzel et la finitude des groupes de Tate–Shafarevich. Le Corollaire 2.3, restreint au cas (iv), généralise ce résultat. Les autres cas sont entièrement nouveaux. Il est à noter qu'une surface de del Pezzo de degré 4 « suffisamment générale » vérifie (i).

La preuve du Corollaire 2.3 à partir du Théorème 2.2 repose sur les trois faits suivants. Tout d'abord, il résulte de la démonstration de la Proposition 2.1 que $\prod_{t \in \mathcal{S}} N_{\kappa(t)/k}(\varepsilon_t) = 1$ dans $k^\star/k^{\star 2}$. Ensuite, Coray [8] a établi que s'il existe une extension finie K/k de degré impair telle que $X(K) \neq \emptyset$, alors $X(k) \neq \emptyset$. En particulier, le cas (i) se ramène immédiatement au cas (ii). Enfin, s'il existe $t \in \mathcal{S}$ de degré impair sur k tel que $\varepsilon_t = 1$ et si $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) = 0$, alors X satisfait au principe de Hasse. En effet, vu le résultat de Coray, il suffit de montrer que $X \otimes_k \kappa(t)$ satisfait au principe de Hasse sur $\kappa(t)$; or les hypothèses entraînent d'une part que l'obstruction de Brauer–Manin à l'existence d'un point K-rationnel s'évanouit et d'autre part que $X \otimes_k \kappa(t)$ contient un pinceau de coniques, et Salberger [11] a démontré que les surfaces de del Pezzo de degré 4 admettant un pinceau de coniques satisfont au principe de Hasse dès que l'obstruction de Brauer–Manin ne s'y oppose pas.

2.1. Principe de la démonstration du Théorème 2.2

Le point de départ est la construction suggérée par Swinnerton-Dyer dans [1, §6] et que l'on peut résumer comme suit. Pour $i \in \{0, \ldots, 4\}$, notons $P_i \in \mathbf{P}^4(\bar{k})$ l'unique point singulier de la quadrique d'équation $\lambda q_1 + \mu q_2 = 0$, où $[\lambda : \mu]$ sont des coordonnées homogènes pour $t_i \in \mathbf{P}^1(\bar{k})$. D'après $(\star)$, le point P_0 est k-rationnel. L'hyperplan $H \subset \mathbf{P}^4_k$ contenant $P_1, \ldots, P_4$ est donc lui aussi k-rationnel. Posons $H^0 = H \setminus ((X \cap H) \cup \{P_1, \ldots, P_4\})$ et $Y = \{(x, h) \in X \times_k H^0;\ x \in T_h Q_h\}$, où Q_h désigne l'unique quadrique contenant X et h et $T_h Q_h$ est l'espace tangent à Q_h en h. La seconde projection $\pi : Y \to H^0$ est propre et plate ; on peut donc parler de fibration en courbes de genre 1. Cette fibration jouit des propriétés remarquables suivantes : la jacobienne de sa fibre générique admet un point rationnel d'ordre 2, sa base est une variété k-rationnelle et ses fibres sont des sections hyperplanes de X. Par ailleurs, la première projection $Y \to X$ admet une section rationnelle.

Swinnerton-Dyer et ses collaborateurs ont développé une technique pour étudier les points rationnels de certaines surfaces fibrées en courbes de genre 1 au-dessus de $\mathbf{P}^1_k$, lorsque la jacobienne de la fibre générique admet un point rationnel d'ordre 2 (cf. [13,6,1,2]). À quelques hypothèses techniques près, la variante étudiée dans [1, §1–§5] et [2] s'applique à la restriction de π au-dessus d'une droite suffisamment générale de H. Reprenant les arguments de [1] et de [2] en termes de modèles de Néron, nous obtenons d'abord un énoncé dans lequel ces hypothèses techniques n'apparaissent plus. Il en résulte, dans la situation qui nous intéresse, que pour établir l'existence d'un point rationnel sur Y (et donc sur X) en admettant l'hypothèse de Schinzel et la finitude des groupes de Tate–Shafarevich des courbes elliptiques sur k, il suffit d'exhiber une droite suffisamment générale $L \subset H$ et un point $h \in L(k)$ tels que la surface $\pi^{-1}(L)$ remplisse une condition du type « condition (D) » (cf. [6, §4]) et que la fibre $\pi^{-1}(h)$ admette un k_v-point pour tout $v \in \Omega$.

Pour les variétés munies d'un morphisme vers $\mathbf{P}^1_k$ dont chaque fibre singulière possède une composante irréductible de multiplicité 1 déployée par une extension abélienne du corps de base, il est connu qu'en l'absence d'obstruction de Brauer–Manin à l'existence d'un point rationnel, on peut trouver des fibres au-dessus de points rationnels de $\mathbf{P}^1_k$ comportant un k_v-point pour tout $v \in \Omega$, si l'on admet l'hypothèse de Schinzel (cf. [7, Theorem 1.1]). Nous généralisons ce théorème au cas de variétés fibrées au-dessus de $\mathbf{P}^n_k$; la démonstration utilise de manière essentielle un résultat récent d'Harari (cf. [10]). Dans la situation considérée ici, on obtient ainsi l'existence de $h_0 \in H^0(k)$ tel que la fibre $\pi^{-1}(h_0)$ soit lisse et admette un k_v-point pour tout $v \in \Omega$.

Nous définissons ensuite une version de la « condition (D) » pour la fibration π, dite *condition* (D) *générique*, adaptée à l'ensemble des points de H^0 de codimension $\leqslant 1$. À l'aide du théorème d'irréductibilité de Hilbert, nous prouvons qu'elle implique l'existence de droites $L \subset H$ passant par h_0 et telles qu'une version arithmétique de la « condition (D) » soit satisfaite pour la surface $\pi^{-1}(L)$. Une étude délicate du lieu des fibres singulières de π permet enfin d'établir que sous l'hypothèse de k-rationalité de t_0 (qui est de toute manière nécessaire à la définition de π), la condition (D) générique équivaut à $(\star)$.

3. Intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}^n_k$ pour $n \geqslant 5$

Théorème 3.1. *Admettons l'hypothèse de Schinzel et la finitude des groupes de Tate–Shafarevich des courbes elliptiques sur les corps de nombres. Soit $n \geqslant 5$. Toute intersection lisse de deux quadriques dans $\mathbf{P}^n_k$ satisfait au principe de Hasse.*

La conclusion de ce théorème est une conjecture de Colliot-Thélène et Sansuc (cf. [5, §16], [9]). Elle fut notamment établie par Mordell (1959) pour $n \geqslant 12$ et $k = \mathbf{Q}$, par Swinnerton-Dyer (1964) pour $n \geqslant 10$ et $k = \mathbf{Q}$ et par Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer (1987) pour $n \geqslant 8$ (cf. [4]).

Nous déduisons le Théorème 3.1 du Corollaire 2.3, cas (i), par la méthode des fibrations (cf. [4,12]). Le résultat suivant, appliqué à $n = 5$, constitue le point clé de la démonstration ; il montre que l'action de Γ sur l'ensemble $\mathcal{S}(\bar{k})$ associé à une section hyperplane suffisamment générale d'une intersection lisse et de dimension 3 de deux quadriques dans $\mathbf{P}^5_k$ est 3-transitive (et même 5-transitive).

Proposition 3.2. *Soit $X \subset \mathbf{P}^n_k$ une intersection lisse de deux quadriques, de codimension 2 dans $\mathbf{P}^n_k$. Notons $D \simeq \mathbf{P}^1_k$ le pinceau des quadriques contenant X et $Z = \{(q, h) \in D \times_k (\mathbf{P}^n_k)^\star;\ q \cap h \text{ est singulier}\}$. La seconde projection*

$Z \to (\mathbf{P}^n_k)^\star$ fait de Z un revêtement intègre, fini et plat de $(\mathbf{P}^n_k)^\star$. Son groupe de monodromie est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

Remerciements

Mes plus vifs remerciements vont à Jean-Louis Colliot-Thélène, qui me suggéra le problème et me fit généreusement part de ses idées pour le résoudre. Les résultats annoncés ici doivent beaucoup à Sir Peter Swinnerton-Dyer, puisqu'il est aussi bien à l'origine de la construction utilisée dans la preuve du Théorème 2.2 que de la technique employée pour étudier l'arithmétique des pinceaux de courbes de genre 1 (cf. [13]). Je tiens également à le remercier pour ses encouragements et pour son aide à la compréhension d'un détail important de [1, §6]. Enfin, je remercie David Harari d'avoir rédigé et de m'avoir transmis [10], dont le théorème principal joue un rôle capital dans la démonstration du Théorème 2.2.

Références

[1] A.O. Bender, Sir P. Swinnerton-Dyer, Solubility of certain pencils of curves of genus 1, and of the intersection of two quadrics in $\mathbf{P}^4$, Proc. London Math. Soc. (3) 83 (2) (2001) 299–329.
[2] J.-L. Colliot-Thélène, Hasse principle for pencils of curves of genus one whose Jacobians have a rational 2-division point, close variation on a paper of Bender and Swinnerton-Dyer, in: Rational Points on Algebraic Varieties, in: Progr. Math., vol. 199, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 117–161.
[3] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, La descente sur les variétés rationnelles, in : Journées de Géométrie Algébrique d'Angers, Juillet 1979, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, pp. 223–237.
[4] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, Sir P. Swinnerton-Dyer, Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces, I, J. reine angew. Math. 373 (1987) 37–107.
[5] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, Sir P. Swinnerton-Dyer, Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces, II, J. reine angew. Math. 374 (1987) 72–168.
[6] J.-L. Colliot-Thélène, A.N. Skorobogatov, Sir P. Swinnerton-Dyer, Hasse principle for pencils of curves of genus one whose Jacobians have rational 2-division points, Invent. math. 134 (3) (1998) 579–650.
[7] J.-L. Colliot-Thélène, A.N. Skorobogatov, Sir P. Swinnerton-Dyer, Rational points and zero-cycles on fibred varieties: Schinzel's hypothesis and Salberger's device, J. reine angew. Math. 495 (1998) 1–28.
[8] D. Coray, Points algébriques sur les surfaces de del Pezzo, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 284 (24) (1977) 1531–1534.
[9] D. Harari, Méthode des fibrations et obstruction de Manin, Duke Math. J. 75 (1) (1994) 221–260.
[10] D. Harari, Variétés fibrées au-dessus de l'espace projectif, prépublication.
[11] P. Salberger, Some new Hasse principles for conic bundle surfaces, in: Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1987–1988, in: Prog. Math., vol. 81, Birkhäuser, Boston, MA, 1990, pp. 283–305.
[12] A.N. Skorobogatov, On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation, in: Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1988–1989, in: Prog. Math., vol. 91, Birkhäuser, Boston, MA, 1990, pp. 205–219.
[13] Sir P. Swinnerton-Dyer, Rational points on certain intersections of two quadrics, in: Abelian Varieties, Egloffstein, 1993, de Gruyter, Berlin, 1995, pp. 273–292.