Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 147–150
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Probabilités

Un théorème limite pour les covariances des spins en deux sites dans le modèle de Sherrington–Kirkpatrick avec champ externe

Albert Hanen [1]

69, rue Barrault, 75013 Paris, France

Reçu le 26 septembre 2005 ; accepté le 15 novembre 2005

Disponible sur Internet le 13 décembre 2005

Présenté par Michel Talagrand

Résumé

On établit quelques propriétés des covariances des spins dans le cas du modèle de Sherrington–Kirkpatrick avec champ externe et l'on montre un théorème limite les concernant, pour lequel la loi limite est non gaussienne. ***Pour citer cet article : A. Hanen, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***
© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

A limit theorem for spin covariances in the Sherrington–Kirkpatrick model with an external field. We give some properties of spin covariances in the case of the Sherrington–Kirkpatrick model with an external field; a non Gaussian limit theorem for those covariances is proved. ***To cite this article: A. Hanen, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***
© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Talagrand, dans le chapitre 2 de son livre [2], a étudié, à la suite du travail [1] de Sherrington et Kirkpatrick, le modèle suivant :

Soient N un entier positif, β et $h \in \mathbf{R}^+$, $(g_{i,j})_{1\leqslant i<j}$ un ensemble de variables i.i.d. gaussiennes standards, définissant le désordre du modèle. Soit $\sigma = (\sigma_i)_{i=1}^{i=N} \in \{-1,+1\}^N \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_N$; σ_i est appelé le spin au site i de la configuration σ. Considérons l'hamiltonien du modèle S.K. avec champ externe h, i.e. la quantité :

$$-H_N(\sigma,\beta,h) = \frac{\beta}{\sqrt{N}} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} g_{i,j}\sigma_i\sigma_j + h\left(\sum_{i\leqslant N}\sigma_i\right).$$

Adresse e-mail : AHanen3752@aol.com (A. Hanen).

[1] Professeur émérite à l'université Paris X.

1631-073X/$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2005.11.026

La probabilité sur Σ_N, notée $G_N(\beta,h)$ ou G_N, associée à la fonction de poids $\exp(-H_N(\sigma))$, $\sigma \in \Sigma_N$, est la mesure de Gibbs du modèle ; f étant une fonction numérique définie sur Σ_N^n, l'intégrale de f relative à la probabilité produit $G_N^{\otimes n}$ est notée $\langle f\rangle$, l'espérance de cette intégrale $\nu(f)$.

Soient u et $v \in \mathbf{R}^N$, $R(u,v) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=N} u_i v_i$; $R(\sigma^1,\sigma^2)$ est le recouvrement des configurations (ou répliques) σ^1 et $\sigma^2 \in \Sigma_N$. Soit $\gamma_{i,j}$ la covariance, pour la mesure de Gibbs G_N, des spins σ_i et σ_j aux sites i et j. Son comportement est fortement lié à celui des recouvrements et l'on sait que le moment d'ordre 2 de $\sqrt{N}\gamma_{i,j}$ a, si $\beta \leqslant \beta_0$, une limite (connue) si $N \to +\infty$ (voir [2], Corollaire 2.6.2). Comme pour les recouvrements, nous allons nous intéresser aux moments d'ordre entier p quelconque de cette variable.

Soit z une variable gaussienne standard, indépendante du désordre ; z induit les objets suivants :

$$Y = \beta\sqrt{q_2}\,z + h, \quad \text{avec (voir [2] (2.148))}\ E\big(th^2(Y)\big) = q_2; \quad U = 1 - th^2(Y); \quad C = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2 E(U^2)}}. \tag{1}$$

Nous montrerons le

Théorème 1.1. *Si $\beta \leqslant \beta_0$, pour tout entier p, le moment d'ordre p de $\sqrt{N}\,\gamma_{i,j}$ converge, si $N \to +\infty$, vers celui de la variable CzU_1U_2, avec U_1 et U_2 i.i.d., de loi celle de U, et indépendants de z.*

Remarque 1. Contrairement aux recouvrements (voir [2] Section 2.7), la loi limite n'est pas gaussienne.

2. Notations et outils préliminaires

Dans [2] Section 2.4, est introduite une famille continue d'hamiltoniens $-H_{N,t}$, $t \in [0,1]$, avec $-H_{N,1} = -H_N$, induisant des mesures de Gibbs $G_{N,t}$ et des intégrales $\langle f\rangle_t$ d'espérances $\nu_t(f)$ dérivables en t (voir [2] Proposition 2.4.5). $-H_{N,t}$ dépend du désordre associé à $-H_N$ et d'une variable gaussienne standard z qui lui est orthogonale, induisant par les relations (1) une variable Y.

Nous devrons dans la suite, pour évaluer certains $\nu(f)$, utiliser un développement de Taylor de $\nu_t(f)$ pour $t = 1$ en $t = 0$ à un ordre $l > 1$ et donc calculer les dérivées d'ordre $l > 1$ de $\nu_t(f)$. Introduisons les notations suivantes :

$B \subset \mathbf{N}$, de cardinal noté $|B|$, indexant des répliques $(\sigma^r)_{r\in B}$, $\epsilon^r = \sigma_N^r$, $\epsilon^B = \prod_{r\in B}\epsilon^r$, $J = \{r,s\}$ $(r < s)$ un doublet d'entiers, indexant les répliques σ^r et σ^s, $\dot{R}_J = R(\sigma^r,\sigma^s) - q_2 \stackrel{\text{def}}{=} \dot{R}_J^- + \epsilon^J/N$.

Soit $\mathrm{O}(k)$ ([2] (2.99)) une quantité qui est un $\mathrm{O}(N^{-k/2})$, uniforme en β pour $\beta \leqslant \beta_0$. Alors $\dot{R}_J$ et $\dot{R}_J^-$ vérifient les inégalités exponentielles $\nu(\dot{R}_J^{2l}) = \mathrm{O}(2l) = \nu((\dot{R}_J^-)^{2l})$ ([2] (2.237) et (2.242)).

Désignant dorénavant par $[a,b]$ un intervalle de $\mathbf{N}$, on montre alors, par recurrence sur l'ordre de dérivation l, en utilisant pour la dernière partie les inégalités de Hölder, le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Soit f une fonction numérique de n répliques et l un entier $\geqslant 1$. Soit $J' = (J_1, J_2, \ldots, J_l)$ une suite de l doublets de l'intervalle $[1, n+2l]$.*

(a) *On a : $\prod_{i=1}^{i=l}\epsilon^{J_i} = \epsilon^{B'}$, où $B' = J_1 \triangle \cdots \triangle J_l$ est la différence symétrique de ces doublets.*
(b) *Posons $h_{J'}^- = \prod_{i=1}^{i=l}\dot{R}_{J_i}^-$, $T_{J'} = \beta^{2l}\nu_t(f\epsilon^{B'}h_{J'}^-)$. Alors $\nu_t^{(l)}(f)$ est une combinaison linéaire de tous les $T_{J'}$, à coefficients $c_{J'}$ valant 1 pour les suites J' telles que, pour tout $i = 1,\ldots,l$, $J_i \subset [1,n]$.*
(c) $\nu_t^{(l)}(f) = \mathrm{O}(l)\sqrt{\nu(f^2)}$.

Remarque 2. On sait que $\sigma_N \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon$, le spin au site N d' une configuration σ, vérifie $\langle\epsilon\rangle_0 = th(Y)$ et sous $G_{N,0}$ est indépendant des spins aux $N-1$ premiers sites, qui ont alors pour loi la mesure de Gibbs sur Σ_{N-1} $G_{N-1}(\beta\sqrt{\frac{N-1}{N}}, h)$ (mesure induisant des intégrales notées $\langle\cdot\rangle_-$ d'espérances $\nu_-(\cdot)$). Il en résulte que si la fonction de n répliques $f = f^-h_0$, où f^- dépend seulement des spins de ces répliques aux $N-1$ premiers sites et h_0 de leurs spins au site N, on obtient successivement pour de tels f les relations :

$$\langle f\rangle_0 = \langle f^-\rangle_0\langle h_0\rangle_0 = \langle f^-\rangle_-\langle h_0\rangle_0, \qquad \nu_0(f) = \nu_0(f^-)\nu_0(h_0) = \nu_-(f^-)\nu_0(h_0). \tag{2}$$

Lorsque $t=0$, on a aussi

$$T_{J'}=\beta^{2l}\nu_0\big(h_0\epsilon^{B'}\big)\nu_-\big(f^-h_{J'}^-\big)\quad\text{et}\quad\big\langle h_0\epsilon^{B'}\big\rangle_0=\big\langle h_0\epsilon^{\widehat{B}}\big\rangle_0\big\langle\epsilon^{C}\big\rangle_0,\tag{3}$$

si $\widehat{B}\stackrel{\text{def}}{=}B'\cap[1,n]$, $C\stackrel{\text{def}}{=}B'\cap[1,n]^c$, $|\widehat{B}|\leqslant|B'|\leqslant 2l$.

3. Expression des moments d'ordre p de la covariance : premières études

Soit $(\sigma^1,\sigma^2)\in\Sigma_N^{\otimes 2}$ un couple de répliques, $\tilde\sigma=\sigma^1-\sigma^2$ leur différence, $\tilde\epsilon=\epsilon^1-\epsilon^2=\sigma_N^1-\sigma_N^2$. On peut introduire la covariance « symétrisée »

$$\tilde\gamma_{i,j}\stackrel{\text{def}}{=}\big\langle\tilde\sigma_i\tilde\sigma_j\big\rangle=2\gamma_{i,j}.\tag{4}$$

Soit $(\sigma^l)_{l=1}^{l=2p}\in\Sigma_N^{\otimes 2p}$, $\tilde\sigma^r=\sigma^{2r-1}-\sigma^{2r}$, $\tilde\sigma_i^{\otimes p}=\prod_{r=1}^{r=p}\tilde\sigma_i^r$, $\tilde\epsilon^{\otimes p}=\tilde\sigma_N^{\otimes p}$. On a $\tilde\gamma_{i,j}^p=\langle\tilde\sigma_i^{\otimes p}\tilde\sigma_j^{\otimes p}\rangle$, par le théorème de Fubini. Par symétrie de sites, on obtient :

Théorème 3.1. *$E(\tilde\gamma_{i,j}^p)=E(\tilde\gamma_{1,N}^p)=\nu(\tilde\epsilon^{\otimes p}f^-)$ avec $f^-=\tilde\sigma_1^{\otimes p}$.*

Le moment d'ordre p de la covariance symétrisée a donc la forme $\nu(h_0f^-)$, avec $h_0=\tilde\epsilon^{\otimes p}$, $n=2p$, $f^-=\tilde\sigma_1^{\otimes p}$. Remarquons que, en appliquant les relations (2), on a $\nu_0(\tilde\epsilon^{\otimes p}f^-)=0$ pour tout f^-, car $\langle\tilde\epsilon^{\otimes p}\rangle_0=0$. Ceci conduit à tenter d'utiliser un développement de Taylor et donc à étudier les dérivées $\nu_0^{(l)}(\tilde\epsilon^{\otimes p}f^-)$, tout d'abord pour toute fonction f^- de $2p$ répliques, puis pour $f^-=\tilde\sigma_1^{\otimes p}$. Leurs propriétés sont régies par le lemme de nature combinatoire suivant :

Lemme 3.2. *Soit $\mathcal{C}$ la classe des parties de $[1,2p]$ de cardinal p, ayant un seul élément dans chaque doublet $\{2r-1,2r\}$ de l'intervalle $[1,2p]$. Soit $\widehat{B}\subset[1,2p]$, $r(\widehat{B})=\sum_{x\in\widehat{B}}(x+1)$, U définie par (1). On a :*

$$\big\langle\tilde\epsilon^{\otimes p}\epsilon^{\widehat{B}}\big\rangle_0=\begin{cases}0 & \text{si } \widehat{B}\notin\mathcal{C},\\ (-1)^{r(\widehat{B})}U^p & \text{si } \widehat{B}\in\mathcal{C}.\end{cases}$$

Corollaire 3.3. *Si $2l<p$, on a $\nu_0^{(l)}(\tilde\epsilon^{\otimes p}f^-)=0$.*

La démonstration repose sur les relations (3) et (2) avec $h_0=\tilde\epsilon^{\otimes p}$, $n=2p$. Dans ce cas, $\forall J'$, $\widehat{B}\notin\mathcal{C}$.

Soit q un entier, $\hat\pi_q$ une partition non ordonnée de $[1,2q]$ en q doublets $\{r_i,s_i\}$ (on compte en tout $E(z^{2q})$ telles partitions), $\hat\pi_{q,0}$ la partition « canonique » en q doublets $\{2i-1,2i\}$. Soit $R_{\hat\pi_q}=\prod_{i=1}^{i=q}R(\tilde\sigma^{r_i},\tilde\sigma^{s_i})$ (resp. $R_{\hat\pi_q}^-=\prod_{i=1}^{i=q}R^-(\tilde\sigma^{r_i},\tilde\sigma^{s_i})$). En utilisant la seconde égalité du Lemme 3.2, on parvient à montrer le résultat suivant :

Corollaire 3.4. *Soit q un entier positif.*

$$\frac{\nu_0^{(q)}(f^-\tilde\epsilon^{\otimes 2q})}{q!}=\beta^{2q}E\big(U^{2q}\big)\sum_{\hat\pi_q}\nu_-\big(f^-R_{\hat\pi_q}^-\big)\tag{5}$$

$$=\beta^{2q}E\big(z^{2q}\big)E\big(U^{2q}\big)\nu_-\big(\tilde\sigma_1^{\otimes 2q}R_{\hat\pi_{q,0}}^-\big)\quad\text{si } f^-=\tilde\sigma_1^{\otimes 2q}.\tag{6}$$

En étudiant, pour $2l>p$, les termes $\nu_-(f^-h_{J'}^-)$ de la relation (3), on parvient au résultat suivant :

Corollaire 3.5. *Si $2l>p$, $\nu_0^{(l)}(\tilde\epsilon^{\otimes p}f^-)=\mathrm{O}(p+1)$ lorsque $f^-=\tilde\sigma_1^{\otimes p}$.*

Par un développement de Taylor à l'ordre p de $\nu_1(\tilde\epsilon^{\otimes p}\tilde\sigma_1^{\otimes p})$ en $t=0$, on obtient :

Théorème 3.6. *Le moment d'ordre p de la covariance symétrisée est donné par les relations* :

$$E(\tilde{\gamma}_{i,j}^{p}) = \mathrm{O}(p+1) \quad \textit{si } p \textit{ est impair}, \tag{7}$$

$$= \beta^{2q} E\big(z^{2q}\big) E\big(U^{2q}\big) \nu_{-}\big(\tilde{\sigma}_1^{\otimes 2q} R^{-}_{\hat{\pi}_{q,0}}\big) + \mathrm{O}(2q+1) \quad \textit{si } p = 2q. \tag{8}$$

Ce théorème résoud le cas p impair et conduit, dans le cas $p = 2q$, à l'évaluation de la quantité $\nu_{-}(\tilde{\sigma}_1^{\otimes 2q} R^{-}_{\hat{\pi}_{q,0}})$, qui n'est autre que le moment d'ordre q de la variable $\langle \tilde{\sigma}_1^1 \tilde{\sigma}_1^2 R^{-}(\tilde{\sigma}^1, \tilde{\sigma}^2)\rangle_{-} \overset{\text{def}}{=} W^{-}$.

4. Une application d'un T.C.L. sur les recouvrements

On montre que les variables W^{-} et $W \overset{\text{def}}{=} \langle \tilde{\sigma}_1^1 \tilde{\sigma}_1^2 R(\tilde{\sigma}^1, \tilde{\sigma}^2)\rangle$ ont la même évaluation asymptotique de leurs moments d'ordre q ; l'on a, par symétrie des sites, $E(W^q) = \nu(\tilde{\epsilon}^{\otimes 2q} \prod_{i=1}^{i=q} (R^{-}(\tilde{\sigma}^{2i-1}, \tilde{\sigma}^{2i}) + \frac{\tilde{\epsilon}^{2i-1}\tilde{\epsilon}^{2i}}{N}))$. En développant ce produit, puis en utilisant une variante du Corollaire 3.4, on obtient :

Lemme 4.1. *Soient $k' = q - k$, $S_{0,k} = \sum_{\hat{\pi}_{k'}} \nu_{-}(R^{-}_{\hat{\pi}_{k',0}} . R^{-}_{\hat{\pi}_{k'}})$. On a la relation* :

$$E\big(W^q\big) = \sum_{k=0}^{k=q} C_q^k \left(\frac{4}{N}\right)^k \beta^{2(q-k)} S_{0,k} E\big(U^{2q}\big) + \mathrm{O}(2q+1). \tag{9}$$

On montre que l'évaluation de $S_{0,k}$ se ramène à celle de chaque quantité $\nu(R_{\hat{\pi}_{k',0}} R_{\hat{\pi}_{k'}})$. On peut exprimer $R_{\hat{\pi}_{k',0}} R_{\hat{\pi}_{k'}}$ comme somme de produits de puissances entières de termes du type $T_{l,l'} = R(\sigma^l - b, \sigma^{l'} - b)$, avec $b_i = \langle \sigma_i \rangle$ (voir [2] relation (2.265)), et l'on dispose d'évaluations asymptotiques précises ([2] Théorème 2.7.1) de l'intégrale pour ν de tels produits. On obtient finalement, grâce à ces évaluations et à l'Éq. (9) le résultat suivant :

Théorème 4.2. *On a* :

$$E\big(W^q\big) = E\big(U^{2q}\big) \left(\frac{4}{N(1 - \beta^2 E(U^2))}\right)^q + \mathrm{O}(2q+1).$$

Théorème 4.3. *Le moment d'ordre $2q$ de la covariance des spins aux sites i et j vaut* :

$$E\big(\gamma_{i,j}^{2q}\big) = \frac{1}{N^q} E(CzU_1U_2)^{2q} + \mathrm{O}(2q+1) \quad \textit{où } C = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2 E(U^2)}}.$$

La démonstration repose sur la relation (4), le Théorème 3.1, la relation (8) et le Théorème 4.2.
On déduit aisément de ce théorème et des Éqs. (7) et (8) le Théorème 1.1.

Remerciements

Je suis très reconnaissant à M. Talagrand de l'attention soutenue qu'il a portée à ce travail.

Références

[1] D. Sherrington, S. Kirkpatrick, Solvable model of a spin glass, Phys. Rev. Lett. 35 (1972) 1792–1796.
[2] M. Talagrand, Spin Glasses: A Challenge for Mathematicians, Springer, 2003.