Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 161–164
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Algèbre/Théorie des nombres

La suite de Thue–Morse et la catégorie Rec

Roland Bacher

Institut Fourier, laboratoire de mathématiques, UMR 5582 (UJF-CNRS), 100, rue des Mathématiques, BP 74, 38402 St Martin d'Hères cedex, France

Reçu le 19 septembre 2005 ; accepté après révision le 18 novembre 2005

Disponible sur Internet le 20 décembre 2005

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Cette Note introduit la catégorie Rec($\mathbf{K}$) des matrices à récurrence sur un corps $\mathbf{K}$. Ceci permet de calculer certains déterminants reliés à la suite de Thue–Morse. ***Pour citer cet article : R. Bacher, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***
© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

The Thue–Morse sequence and the category Rec. We define the category Rec($\mathbf{K}$) of recurrence matrices over a field $\mathbf{K}$ and use it to calculate determinants of Hankel matrices related to the Thue–Morse sequence. ***To cite this article: R. Bacher, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***
© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

La fonction de (Prouhet–)Thue–Morse $\tau:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ compte la somme des chiffres $\tau(\sum_{j=0}^{l}\epsilon_j 2^j)=\sum_{j=0}^{l}\epsilon_j$ d'un entier binaire $\sum_{j=0}^{l}\epsilon_j 2^j\in\mathbb{N}$ (avec $\epsilon_0,\ldots,\epsilon_l\in\{0,1\}$). Pour $n\geqslant 1$, soit $H(n)$ la matrice de Hankel d'ordre n avec coefficients complexes $h_{s,t}=\mathrm{i}^{\tau(s+t)}\in\{\pm1,\pm\mathrm{i}\}$, $0\leqslant s,t<n$, associés à la série génératrice $\prod_{k=0}^{\infty}(1+\mathrm{i}x^{2^k})=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{i}^{\tau(n)}x^n$. Soit encore $f:\{1,2,\ldots\}\to\{\pm1\}$ la fonction du pliage régulier définie récursivement par $f(2^n)=1$, $n\in\mathbb{N}$ et $f(2^n+a)=-f(2^n-a)$ pour tout a tel que $1\leqslant a<2^n$ (voir [2] pour plus d'informations sur Thue–Morse et le pliage régulier, voir [1] pour des résultats apparentés).

Théorème 1.1. *On a l'égalité*

$$\det\bigl(H(n+1)\bigr)=\prod_{k=1}^{n}\bigl(1+\mathrm{i}\,f(k)\bigr)\in\mathbb{Z}[\mathrm{i}]\quad \textit{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

La preuve, qui consiste à calculer la décomposition LU de $H(2^n)$, fait intervenir une curieuse algèbre liée aux suites automatiques, aux automates finis et aux groupes correspondants.

Adresse e-mail : Roland.Bacher@ujf-grenoble.fr (R. Bacher).

1631-073X/$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2005.11.025

On pourrait en fait montrer le développement en fraction continue de type Jacobi

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\mathrm{i}x^{2^k}\right)=\cfrac{1}{1-u_0x-v_1x^2\cfrac{1}{1-u_1x-v_2x^2\cfrac{1}{1-\cdots}}}$$

avec $u_n=(-1)^n\,\mathrm{i}$, $n\geqslant 0$ et où la suite $v_1,v_2,\ldots$ est définie par $v_1=1+\mathrm{i}$, $v_2=1$, $v_3=-\mathrm{i}$, $v_4=\mathrm{i}$, $v_5=1$, $v_6=-\mathrm{i}$, $v_7=1$ et pour v_n, $n=2^l+a\geqslant 8$, $0\leqslant a<2^l$, $l\geqslant 3$ récursivement par $v_n=\mathrm{i}$ si $a\in\{0,2^{l-1}+1=\frac{n+2}{3}\}$, $v_n=1$ si $a\in\{1,2^{l-1}=\frac{n}{3}\}$ et $v_n=v_a$ autrement.

Des résultats similaires existent également pour les suites $\beta_1,\beta_2,\beta_2,\ldots$ et $\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\ldots$ à valeurs dans $\{0,\pm1,\pm\mathrm{i},\pm1\pm\mathrm{i}\}$ définies par $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_nx^n=\frac{1-x}{\mathrm{i}-1}\prod_{k=0}^{\infty}(1+\mathrm{i}x^{2^k})$ et $\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_nx^n=\frac{1-x^2}{\mathrm{i}-1}\prod_{k=0}^{\infty}(1+\mathrm{i}x^{2^k})$. Les déterminants des matrices de Hankel associées ne prennent que les valeurs ±1, $\pm\mathrm{i}$.

2. Les catégories $\mathbf{K}^{\mathcal{M}}$ et Rec(K)

Pour deux entiers naturels $p,q\in\mathbb{N}$ donnés, $\mathcal{M}_{p\times q}$ désigne l'ensemble des paires de mots (U,W) de même longueur $l=l(U)=l(W)$ avec $U\in\{0,\ldots,p-1\}^l$, $W\in\{0,\ldots,q-1\}^l$. L'ensemble $\mathcal{M}_{p\times q}$ est donc simplement le monoïde libre engendré par les pq paires de mots (s,t), $0\leqslant s<p$, $0\leqslant t<q$ de longueur 1 pour la loi de composition $(U,W)(U',W')=(UU',WW')$. Dorénavant, $\mathcal{M}^l_{p\times q}$ désigne les paires de mots de longueur l dans $\mathcal{M}_{p\times q}$. Pour $\mathbf{K}$ un corps commutatif, fixé dans la suite, une fonction $A\in\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}}$ de $\mathcal{M}_{p\times q}$ dans $\mathbf{K}$ définit une suite de matrices de tailles $p^l\times q^l$, $l\in\mathbb{N}$, car on peut interpréter les valeurs prises par A sur l'ensemble fini $\mathcal{M}^l_{p\times q}$ comme coefficients d'une matrice de taille $p^l\times q^l$ dont les indices parcourent $\mathcal{M}^l_{p\times q}$.

Ceci suggère de définir le *produit matriciel* $A\cdot B\in\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}}$ de $A\in\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times r}}$ et $B\in\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{r\times q}}$ de la manière usuelle en posant

$$(A\cdot B)[U,W]=\sum_{V\in\{0,\ldots,r-1\}^l}A[U,V]B[V,W]$$

pour l'évaluation de $A\cdot B$ en $(U,W)\in\mathcal{M}^l_{p\times q}$.

Dans la suite, $\mathbf{K}^{\mathcal{M}}$ désigne la catégorie dont chaque objet est un espace vectoriel $\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{q\times 1}}$ et s'identifie à l'ensemble $\mathbf{K}^{\mathcal{M}_q}$ des fonctions sur le monoïde libre $\mathcal{M}_q=\{0,\ldots,q-1\}$ à q générateurs. Les morphismes de $\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{q\times 1}}$ vers $\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times 1}}$ sont les éléments de l'espace vectoriel $\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}}$.

Un élément $(S,T)\in\mathcal{M}_{p\times q}$ détermine une application linéaire $\rho(S,T)\in\mathrm{End}(\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}})$ en faisant correspondre à $A\in\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}}$ la fonction $\rho(S,T)A$ donnée par $(\rho(S,T)A)[U,W]=A[US,WT]$. Le petit calcul

$$\rho(S,T)\big(\rho\big(S',T'\big)A\big)[U,W]=\rho\big(S',T'\big)A[US,WT]=A\big[USS',TT'\big]=\rho\big(SS',TT'\big)A[U,W]$$

montre qu'on obtient un morphisme de monoïdes $\rho:\mathcal{M}_{p\times q}\to\mathrm{End}(\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}})$ d'image le *monoïde de décalage* $\rho(\mathcal{M}_{p\times q})$.

Définition 2.1. Un sous-espace $\mathcal{A}\subset\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}}$ est *récursivement clos* s'il est invariant par $\rho(\mathcal{M}_{p\times q})$. La clôture récursive $\bar{A}^{\mathrm{rec}}$ d'un élément $A\in\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}}$ est le plus petit sous-espace récursivement clos contenant A. De manière équivalente, $\bar{A}^{\mathrm{rec}}$ est également le sous-espace engendré par l'orbite $\rho(\mathcal{M}_{p\times q})A$ de A. La *complexité* de A est la cardinalité $a=\dim(\bar{A}^{\mathrm{rec}})\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ d'une base de $\bar{A}^{\mathrm{rec}}$. Un élément $A\in\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}}$ de complexité finie $\dim(\bar{A}^{\mathrm{rec}})<\infty$ est une *matrice à récurrence*.

On vérifie facilement que l'ensemble

$$\mathrm{Rec}_{p\times q}(\mathbf{K})=\big\{A\in\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}}\mid\dim\big(\bar{A}^{\mathrm{rec}}\big)<\infty\big\}$$

des matrices à récurrence est un espace vectoriel récursivement clos.

Proposition 2.2. *Le produit $A\cdot B$ de deux matrices a récurrence $A\in\mathrm{Rec}_{p\times r}(\mathbf{K})$, $B\in\mathrm{Rec}_{r\times q}(\mathbf{K})$ est une matrice à récurrence.*

Démonstration. On choisit des générateurs $A_1, \ldots, A_a$ et $B_1, \ldots, B_b$ de $\bar{A}^{\mathrm{rec}}$ et $\overline{B}^{\mathrm{rec}}$. L'identité

$$(A_i \cdot B_j)[Us, Wt] = \sum_{v=0}^{r-1} \big(\big(\rho(s,v)A_i\big) \cdot \big(\rho(v,t)B_j\big)\big)[U, W],$$

$(U, V) \in \mathcal{M}_{p\times q}$, $(s,t) \in \mathcal{M}^1_{p\times q}$, montre que l'espace vectoriel engendré par les ab produits $A_i \cdot B_j$, $1 \leqslant i \leqslant a$, $1 \leqslant j \leqslant b$, est récursivement clos. □

Définition 2.3. La catégorie $\mathrm{Rec}(\mathbf{K})$ des matrices à récurrence est la sous-catégorie de $\mathbf{K}^{\mathcal{M}}$ n'ayant que des flèches dans $\mathrm{Rec}_{p\times q}(\mathbf{K})$. Les objets de $\mathrm{Rec}(\mathbf{K})$ sont les espaces $\mathrm{Rec}_{q\times 1}(\mathbf{K})$ des *vecteurs à récurrence*.

Remarque 1. L'espace vectoriel $\mathrm{Rec}_{p\times q}(\mathbf{K})$ est un anneau pour le produit fonctionnel $AB[U, W] = A[U, W]B[U, W]$ car le plongement « diagonal » de $\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}}$ dans $\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{pq\times pq}}$ préserve la complexité.

L'espace $\mathrm{Rec}_{p\times q}(\mathbf{K})$ est aussi un anneau (non-commutatif si $pq > 1$) pour le produit de convolution

$$(A * B)[U, W] = \sum_{(U,W)=(U_1,W_1)(U_2,W_2)} A[U_1, W_1]B[U_2, W_2]$$

obtenu en identifiant $\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}} \sim \mathbf{K}^{\mathcal{M}_{(pq)}}$ avec l'anneau des séries formelles en pq variables non-commutatives (ceci résulte de l'identité $\rho(s,t)(A * B) = (\rho(s,t)A)(B[\emptyset, \emptyset]) + A * (\rho(s,t)B)$ pour $(s,t) \in \mathcal{M}^1_{p\times q}$).

Un sous-espace $\mathcal{A} \subset \mathrm{Rec}_{p\times q}(\mathbf{K})$ récursivement clos est complètement caractérisé par l'action de $\rho(\mathcal{M}_{p\times q})$ sur $\mathcal{A}$ et par les évaluations $A \mapsto A[\emptyset, \emptyset]$ en $(\emptyset, \emptyset) \in \mathcal{M}^0_{p\times q}$ pour $A \in \mathcal{A}$. Une matrice à récurrence A de complexité a peut donc se décrire à l'aide de *a valeurs initiales* $(A_1[\emptyset, \emptyset], \ldots, A_a[\emptyset, \emptyset]) \in \mathbf{K}^a$ (pour $A_1 = A, \ldots, A_a \in \mathrm{Rec}_{p\times q}(\mathbf{K})$ une base de $\bar{A}^{\mathrm{rec}}$) et de *pq matrices de décalage* (abusivement notées) $\rho(s,t) \in \mathrm{End}(\bigoplus_{h=1}^a \mathbf{K}A_h)$ définies par $\rho(s,t)A_j = \sum_{k=1}^a \rho(s,t)_{k,j} A_k$ et décrivant l'action du monoïde de décalage par rapport à la base $A_1, \ldots, A_a$ de $\bar{A}^{\mathrm{rec}}$. Par dualité, une telle *présentation minimale* permet de calculer une évaluation $A[U, W]$ de $A = A_1 \in \mathrm{Rec}_{p\times q}(\mathbf{K})$ en utilisant la formule

$$\begin{pmatrix} A_1[s_1\cdots s_n, t_1\cdots t_n] \\ \vdots \\ A_a[s_1\cdots s_n, t_1\cdots t_n] \end{pmatrix} = \rho(s_n, t_n)^t \cdots \rho(s_1, t_1)^t \begin{pmatrix} A_1[\emptyset, \emptyset] \\ \vdots \\ A_a[\emptyset, \emptyset] \end{pmatrix}.$$

Soit $A[\mathcal{M}^{\leqslant n}_{p\times q}] \in \mathbf{K}^{\mathcal{M}^{\leqslant n}_{p\times q}}$ la restriction de $A \in \mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}}$ à l'ensemble fini $\mathcal{M}^{\leqslant n}_{p\times q}$ des mots de longueur au plus n dans $\mathcal{M}_{p\times q}$. Pour $\mathcal{A} \subset \mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}}$ un espace vectoriel, la notation $\mathcal{A}[\mathcal{M}^{\leqslant n}_{p\times q}] \subset \mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}}$ désigne le sous-espace vectoriel évident obtenu par la projection $A \mapsto A[\mathcal{M}^{\leqslant n}_{p\times q}]$.

Définition 2.4. Le *niveau de saturation* d'un espace vectoriel $\mathcal{A}$ est le plus petit élément $N \in \mathbb{N} \cup \infty$ tel que la projection naturelle $\mathcal{A}[\mathcal{M}^{\leqslant N+1}_{p\times q}] \to \mathcal{A}[\mathcal{M}^{\leqslant N}_{p\times q}]$ est un isomorphisme.

Proposition 2.5. *Soit $\mathcal{A} \subset \mathrm{Rec}_{p\times q}(\mathbf{K})$ un espace vectoriel récursivement clos de niveau de saturation fini $N < \infty$. Alors $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}[\mathcal{M}^{\leqslant N}_{p\times q}]$ sont isomorphes.*

Idée de la démonstration. Notant $K_l \subset \mathcal{A}$ le noyau de la projection évidente $\mathcal{A} \to \mathcal{A}[\mathcal{M}^{\leqslant l}_{p\times q}]$, on a l'égalité $K_N = K_{N+1}$ qui implique $K_n = K_N = \{0\}$ pour tout $n \geqslant N$. □

La Proposition 2.5 permet de construire des présentations minimales de $A + B$ et $A \cdot B$ pour A, B des matrices à récurrence convenables (données par des présentations minimales) en utilisant un nombre fini d'opérations dans des espaces vectoriels de dimensions finies. Plus précisément, étant données des bases $A_1 = A, \ldots, A_a$ et $B_1 = B, \ldots, B_b$ de $\bar{A}^{\mathrm{rec}}$ et $\overline{B}^{\mathrm{rec}}$, le calcul du niveau de saturation de $\mathcal{C} = \sum \mathbf{K}A_i + \sum \mathbf{K}B_j$ permet de déterminer le sous-espace $\overline{A_1 + B_1}^{\mathrm{rec}} \subset \mathcal{C}$ et d'en donner une base. Pour le produit, on procède similairement avec $\overline{A_1 \cdot B_1}^{\mathrm{rec}} \subset \sum \mathbf{K}A_i \cdot B_j$.

Remarque 2. L'algèbre $\mathrm{Rec}_{p\times p}(\mathbf{K})$ contient des éléments inversibles (pour le produit matriciel) dans $\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times p}}$ mais sans inverse dans $\mathrm{Rec}_{p\times p}(\mathbf{K})$. Un exemple est la matrice à récurrence diagonale définie par $A[U,W]=1+n$ si $U=W=s_1\cdots s_n$, $n\in\mathbb{N}$, et $A[U,W]=0$ sinon.

3. Idée de la démonstration du Théorème 1.1

On exhibe des éléments $L,U\in\mathrm{Rec}_{2\times 2}$ (où $L[\mathcal{M}^l_{2\times 2}], U[\mathcal{M}^l_{2\times 2}]$ sont respectivement une matrice triangulaire unipotente inférieure et une matrice triangulaire supérieure) tels que le produit $H=L\cdot U\in\mathrm{Rec}_{2\times 2}$ est donné par $H[s_1\cdots s_n,t_1\cdots t_n]=\prod_{j=1}^n \mathrm{i}^{s_j+t_j}$ pour $s_1\cdots s_n,t_1\cdots t_n\in\{0,1\}^n$. Une inspection des « coefficients diagonaux » de U termine alors la preuve. (Pour le développement en fraction continue de Jacobi, on procède de la même façon en calculant la matrice de Stieltjes associée.)

Plus précisément, on montre que la matrice H ci-dessus admet la présentation minimale $H_1=H$, H_2 avec valeurs initiales $H_1[\emptyset,\emptyset]=1$, $H_2[\emptyset,\emptyset]=\mathrm{i}$ et matrices de décalage

$$\rho(0,0)=\begin{pmatrix}1&\mathrm{i}\\0&0\end{pmatrix},\quad \rho(0,1)=\rho(1,0)=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\\1&1+\mathrm{i}\end{pmatrix},\quad \rho(1,1)=\begin{pmatrix}\mathrm{i}&\mathrm{i}\\0&0\end{pmatrix}.$$

De même, L peut se décrire par rapport à la base $L_1=L, L_2, L_3, L_4$ par la présentation minimale avec valeurs initiales $(L_1,\dots,L_4)[\emptyset,\emptyset]=(1,\mathrm{i},1,0)$ et les matrices de décalage

$$\rho(0,0)=\begin{pmatrix}1&\mathrm{i}&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \rho(0,1)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix},$$

$$\rho(1,0)=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&-1+\mathrm{i}&-\mathrm{i}\\1&1+\mathrm{i}&-\mathrm{i}&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \rho(1,1)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1+\mathrm{i}&1&\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0&\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

La matrice à récurrence U est le produit matriciel $U=D\cdot L^t$ avec $L^t[V,W]=L[W,V]$ et $D\in\mathrm{Rec}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ diagonal. Une présentation minimale de D est donnée par $D_1=D$, D_2, D_3, $(D_1,D_2,D_3)[\emptyset,\emptyset]=(1,1+\mathrm{i},1+\mathrm{i})$ et les matrices de décalage

$$\rho(0,0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},\quad \rho(0,1)=\rho(1,0)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \rho(1,1)=\begin{pmatrix}0&2&0\\1&1&1\\0&-2&0\end{pmatrix}.$$

Une inspection des coefficients de D termine la démonstration.

Remarque 3. Le résultat du Théorème 1.1 semble également vrai pour les séries génératrices $\prod_{k=0}^{\infty}(1+\sigma_k\,\mathrm{i}x^{2^k})$ avec $\sigma_0,\sigma_1,\ldots\in\{\pm 1\}$ arbitraires en remplaçant la suite du pliage régulier par la suite d'un pliage généralisé définie par $f(2^k)=\sigma_{k+1}$ et $f(2^k+a)=-f(2^k-a)$, $1\leqslant a<2^k$.

Références

[1] J.-P. Allouche, J. Peyrière, Z.-X. Wen, Z.-Y. Wen, Hankel determinants of the Thue–Morse sequence, Ann. Inst. Fourier 48 (1) (1998) 1–27.
[2] J.-P. Allouche, J. Shallit, Automatic Sequences. Theory, Applications, Generalizations, Cambridge University Press, 2003.