

Analyse numérique

# Estimations d'erreur a priori de la méthode de Lagrange–Galerkin pour les systèmes de type Kazhikhov–Smagulov

Jocelyn Étienne<sup>1</sup>, Pierre Saramito

*LMC-IMAG, BP 53, 38041 Grenoble cedex, France*

Reçu le 21 avril 2005 ; accepté après révision le 11 octobre 2005

Disponible sur Internet le 11 novembre 2005

Présenté par Olivier Pironneau

## Résumé

Les systèmes de type Kazhikhov–Smagulov correspondent aux équations de Navier–Stokes non-homogènes et incompressibles lorsque la densité obéit à une loi de diffusion, comme dans les mélanges de gaz de densités différentes. Nous proposons un algorithme pour ces systèmes qui s'appuie sur la discrétisation en temps par un schéma d'Euler rétrograde de la méthode des caractéristiques, et sur une méthode d'éléments finis mixtes ( $P_k, P_k, P_{k-1}$ ) pour la discrétisation en espace dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , des densités–vitesses–pressions. Sous la contrainte  $k > d - 1$  et  $\Delta t = Ch^r$ , avec  $r \in ]d, 2k + 2 - d[$ , nous donnons une estimation d'erreur optimale  $O(\Delta t + h^k)$  pour le pas de temps  $\Delta t$  et le pas de maillage  $h$ . **Pour citer cet article :** J. Étienne, P. Saramito, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005)*.

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**A priori error estimates of the Lagrange–Galerkin method for Kazhikhov–Smagulov type systems.** Kazhikhov–Smagulov type systems are a subclass of non-homogeneous, incompressible Navier–Stokes equations where density is subject to diffusion, as in mixtures of gases of different densities. An algorithm is devised for these systems, the time discretization being based on a backward-Euler scheme together with the method of characteristics, and a mixed density–velocity–pressure ( $P_k, P_k, P_{k-1}$ ) finite element method is used for the space discretization in  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ . Under the constraint that  $k > d - 1$  and  $\Delta t = Ch^r$ , with  $r \in ]d, 2k + 2 - d[$ , we give optimal error bounds  $O(\Delta t + h^k)$  for the time step  $\Delta t$  and the mesh size  $h$ . **To cite this article :** J. Étienne, P. Saramito, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005)*.

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abridged English version

Let us consider a flow of two miscible, incompressible Newtonian fluids. The density of each of these fluids will be supposed constant, and denoted respectively  $\rho_d$  and  $\rho_l$ ,  $\rho_d > \rho_l > 0$ . In this Note, we address the case when no assumption is made on the order of magnitude of the density contrast  $\alpha = (\rho_d - \rho_l)/\rho_l$ . This departs from the common framework of  $\alpha \ll 1$ , and allows to apply the results of this work to gas-mixtures and suspension flows of

Adresses e-mail : J.Etienne@damtp.cam.ac.uk (J. Étienne), pierre.saramito@imag.fr (P. Saramito).

<sup>1</sup> Adresse actuelle : DAMTP, University of Cambridge, Wilberforce Road, Cambridge CB3 0EZ, Grande-Bretagne.

industrial and environmental relevance [7]. Let  $\Omega$  be a bounded open set in  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , and  $T > 0$ . Let  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$  and  $p$  denote respectively the density, velocity and pressure of the mixture. The Navier–Stokes equations (4), (5) express the conservation of mass and momentum in the mixture. Denoting  $\Phi$  the volume fraction of the denser fluid, the density of the mixture can be written  $\rho = \rho_d \Phi + \rho_l(1 - \Phi)$ , and (4) guarantees that  $\Phi \in [0, 1]$  if it holds at time  $t = 0$ . Because of the mass diffusion between the miscible fluids, one has  $D_t \Phi \neq 0$ , and the closure of the system is brought by a constitutive law expressing this mass diffusion [11,8], known as Fick’s law (6). Note that this implies  $\nabla \cdot \mathbf{u} = -\alpha \nabla \cdot (F(\Phi) \nabla \Phi)$ , which in general is not zero, so that in spite of the incompressibility of each fluid separately, the mixture does not have a zero-divergence velocity. Initial and boundary conditions in  $\rho$  and  $\mathbf{u}$  complement the system, which is said to be of Kazhikhov–Smagulov type [2]. It is identical to the system obtained in the limit of zero Mach number for compressible fluid equations [10,1]. For some boundary conditions, the existence of weak solutions has been shown [9,10,4].

Let  $\tilde{\mu}(\Phi) = \mu(\rho_l(1 + \alpha\Phi))$ . The weak formulation of the problem is given in terms of the multilinear forms:

$$a(\Phi; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2(\tilde{\mu}(\Phi) D(\mathbf{u}), D(\mathbf{v})) - \frac{2}{3}(\tilde{\mu}(\Phi) \nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \cdot \mathbf{v}), \quad \forall (\Phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \in L^\infty(\Omega) \times (H_0^1(\Omega)^d)^2, \quad (1)$$

$$b(\mathbf{v}, q) = -(\nabla \cdot \mathbf{v}, q), \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in H_0^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega), \quad (2)$$

the problem being to find  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)^d)$ ,  $p \in L^\infty(0, T; L_0^2(\Omega))$ , i.e., the subspace of  $L^2(\Omega)$  functions of zero mean, and  $\Phi \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ , such that,

$$((1 + \alpha\Phi) D_t \mathbf{u}, \mathbf{v}) + a(\Phi; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad (3a)$$

$$\left( \frac{\alpha}{1 + \alpha\Phi} D_t \Phi + \nabla \cdot \mathbf{u}, q \right) = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega), \quad (3b)$$

$$(D_t \Phi, \psi) + (F(\Phi) \nabla \Phi, \nabla \psi) + (\Phi \nabla \cdot \mathbf{u}, \psi) = 0, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega), \quad (3c)$$

$$\text{with } \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \Phi(\cdot, 0) = \Phi_0 \in H^1(\Omega). \quad (3d)$$

In this Note we propose algorithm (7) to solve system (3) in a Lagrange finite element space of degree  $k$  for  $\mathbf{u}$  and  $\Phi$ . In the discretisation of Eq. (3b), care must be taken that the image of the divergence operator on  $H_0^1(\Omega)$  is reduced to functions of zero mean: thus a projection step (7d) of the left-hand side of (7f) was introduced. Provided that  $F$  and  $\mu$  admit strictly positive lower bounds, we show in Theorem 3.1 that, under usual regularity (8) and discretisation hypotheses, optimal error estimates (9) hold for the discrete solution. Moreover, it is shown that the image of the approximation of  $\Phi$  can be brought arbitrarily close to  $[0, 1]$ . This latter result is essential in order to conclude in the proof, as well as for the feasibility of algorithm (7). The proof involves similar techniques as the analysis of the Lagrange–Galerkin method for homogeneous Navier–Stokes equations in [12], with several additional difficulties due to the nonzero divergence of the velocity and to the nonlinear coupling between Eqs. (5) and (4). Algorithm (7) has been employed in [7] for high density ratio lock-exchange flow simulations, and a comparison of its results with experimental measurements is given in Fig. 1.

## 1. Présentation du problème

Nous considérons l’écoulement de deux fluides newtoniens incompressibles et miscibles,  $\rho_d$  et  $\rho_l$  étant leurs densités respectives, supposées constantes,  $\rho_d > \rho_l > 0$ . Aucune hypothèse n’est faite sur l’ordre de grandeur du coefficient  $\alpha = (\rho_d - \rho_l)/\rho_l$ . Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ ,  $T > 0$  et notons  $\rho$  la densité du mélange,  $\mathbf{u}$  sa vitesse et  $p$  la pression. Les équations de Navier–Stokes expriment la conservation du mouvement et de la masse du mélange :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \text{in } \Omega \times ]0, T[, \quad (4)$$

$$\rho D_t \mathbf{u} - \nabla \cdot [2\mu(\rho) D(\mathbf{u})] + \nabla \left[ p + \frac{2}{3} \mu(\rho) \nabla \cdot \mathbf{u} \right] = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \times ]0, T[, \quad (5)$$

où  $\mu(\rho)$  est la viscosité, qui peut dépendre de la densité, et  $D_t \varphi = (\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \varphi$ .

En notant  $\Phi$  la fraction volumique du fluide le plus dense, la densité du mélange s’écrit  $\rho = \rho_d \Phi + \rho_l(1 - \Phi)$ , et la fermeture du système est alors apportée par une loi de comportement exprimant la diffusion de masse entre les deux fluides [11,8], dite loi de Fick :

$$D_t \Phi - (1 + \alpha\Phi) \nabla \cdot (F(\Phi) \nabla \Phi) = 0 \quad \text{in } \Omega \times ]0, T[. \quad (6)$$

Remarquons que (4) et (6) impliquent  $\nabla \cdot \mathbf{u} = -\alpha \nabla \cdot (F(\Phi) \nabla \Phi)$ , qui n'est en général pas nul : en dépit de l'incompressibilité de chaque fluide, la vitesse du mélange n'est pas à divergence nulle. Le système (4)–(6) est complété par des conditions initiales et aux limites pour  $\rho$  et  $\mathbf{u}$ , et appartient à la classe des systèmes de Kazhikhov–Smagulov [2]. Il est identique à celui obtenu en faisant tendre le nombre de Mach vers zéro dans les équations des fluides compressibles [10,1]. Pour certaines conditions aux limites, l'existence de solutions faibles globales pour faible diffusivité  $\alpha$  est montrée dans [9], de solutions globales proches de l'équilibre dans [10] et de solutions faibles globales dans [4].

## 2. Approximation et algorithme découplé de résolution

Soit  $M \in \mathbb{N}$  et  $t_m = m\Delta t$ ,  $0 \leq m \leq M$ , une subdivision de  $[0, T]$  avec  $\Delta t = T/M$ . Soit  $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$  une famille quasi-uniforme de triangulations [3]. Pour tout  $l \geq 1$ , l'espace d'éléments fini de degré  $l$  est défini par :  $H_{l,h} = \{\varphi_h \in C(\bar{\Omega}); \varphi_h|_K \in P_l, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$ . Pour tout  $k \geq 2$ , nous introduisons les espaces  $T_h = H_{k,h}$ ,  $V_h = H_{k,h}^d \cap H_0^1(\Omega)^d$ ,  $Q_h = H_{k-1,h}$  et pour  $k = 1$ , la discrétisation stabilisée du type  $P_1$  bulle– $P_1$  [5] et  $T_h = Q_h$ . Notons que le couple  $(V_h, Q_h)$  vérifie la condition inf-sup discrète de Babuška–Brezzi [5]. L'approximation du problème (3) consiste à construire la séquence  $(\Phi_h^m, \chi_h^m, \mathbf{u}_h^m, p_h^m) \in T_h \times T_h \times V_h \times Q_h$ ,  $0 \leq m \leq M$ , définie par l'algorithme suivant :

**Initialisation** : Pour  $m = 0$ , soient  $\mathbf{u}_h^0$ ,  $\Phi_h^0$  et  $\chi_h^0$  projections de  $\mathbf{u}_0$ ,  $\Phi_0$  et  $\nabla \cdot \mathbf{u}_0$  sur  $\{\mathbf{v}_h \in V_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h = \chi_h^0\}$ ,  $T_h$  et  $T_h \cap L_0^2(\Omega)$ , respectivement.

**Récurrence** : Pour  $0 \leq m \leq M - 1$ , connaissant  $\Phi_h^m$ ,  $\chi_h^m$  et  $\mathbf{u}_h^m$ ,

– **Étape 1** : Calculer la caractéristique approchée  $\mathbf{X}_h^m$  par

$$\mathbf{X}_h^m(\mathbf{x}) := \mathbf{x} - \Delta t \mathbf{u}_h^m(\mathbf{x}). \tag{7a}$$

– **Étape 2** : Trouver  $\Phi_h^{m+1} \in T_h$  satisfaisant, pour tout  $\psi_h \in T_h$ ,

$$\left( \frac{\Phi_h^{m+1} - \Phi_h^m \circ \mathbf{X}_h^m}{\Delta t}, \psi_h \right) + (F(\Phi_h^m) \nabla \Phi_h^{m+1}, \nabla \psi_h) = -(\chi_h^m \Phi_h^m, \psi_h). \tag{7b}$$

– **Étape 3** : Calculer explicitement  $\Gamma_h^{m+1} \in T_h$ ,

$$\Gamma_h^{m+1} := \frac{\alpha}{1 + \alpha \Phi_h^{m+1}} \times \frac{\Phi_h^{m+1} - \Phi_h^m \circ \mathbf{X}_h^m}{\Delta t}. \tag{7c}$$

– **Étape 4** : Calculer explicitement  $\chi_h^{m+1}$  par projection sur  $L_0^2(\Omega)$  :

$$\chi_h^{m+1} := \Gamma_h^{m+1} - \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \left( \int_{\Omega} \Gamma_h^{m+1} \, d\mathbf{x} \right) \mathbb{1}. \tag{7d}$$

– **Étape 5** : Trouver  $\mathbf{u}_h^{m+1} \in V_h$  et  $p_h^{m+1} \in Q_h \cap L_0^2(\Omega)$ , tels que, pour tout  $\mathbf{v}_h \in V_h$  et  $q_h \in Q_h$  :

$$\left( (1 + \alpha \Phi_h^{m+1}) \frac{\mathbf{u}_h^{m+1} - \mathbf{u}_h^m \circ \mathbf{X}_h^m}{\Delta t}, \mathbf{v}_h \right) + a(\Phi_h^{m+1}; \mathbf{u}_h^{m+1}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h^{m+1}) = (f(t_{m+1}), \mathbf{v}_h), \tag{7e}$$

$$b(\mathbf{u}_h^{m+1}, q_h) = (\chi_h^{m+1}, q_h). \tag{7f}$$

Cet algorithme suppose  $\mathbf{X}_h^m(\mathbf{x}) \in \bar{\Omega}$  pour tout  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ , et  $1 + \alpha \Phi_h^m > 0$  pour tout  $m$ , ce qui sera démontré par récurrence. La projection (7d) est nécessaire pour l'existence d'une solution au problème de Stokes : en effet,  $\Gamma_h^{m+1}$  n'est pas nécessairement à moyenne nulle, du fait de l'erreur numérique, et n'appartient donc pas nécessairement à l'image de la divergence discrète. En insérant l'étape (7d) de projection dans  $L_0^2(\Omega)$ , l'existence et l'unicité de la solution de (7e), (7f) peut ensuite être démontrée [6, p. 67].

### 3. Convergence de l'approximation

Notons  $L^p(Y)$  l'espace des fonctions de  $\{t_1, \dots, t_M\}$  dans un espace de Banach  $Y$ , munis de la norme

$$\|\varphi\|_{L^p(Y)} = \left( \sum_{m=1}^M \|\varphi(t_m)\|_Y^p \Delta t \right)^{1/p} \quad (\text{pour } p < \infty), \quad \|\varphi\|_{L^\infty(Y)} = \max_{1 \leq m \leq M} \|\varphi(t_m)\|_Y.$$

Nous noterons aussi  $L^p(Y)$  et  $C(Y)$  les espaces  $L^p(0, T; Y)$  et  $C([0, T]; Y)$ , respectivement. Supposons qu'il existe une unique solution globale au problème (3), vérifiant les conditions de régularité :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in L^\infty(H^{k+1}(\Omega)^d) \cap C(C^{0,1}(\overline{\Omega})^d \cap H_0^1(\Omega)^d), & \Phi &\in L^\infty(H^{k+1}(\Omega) \cap W^{2,\infty}(\Omega)) \cap C(H^1(\Omega)), \\ \partial_t \mathbf{u} &\in L^2(H^{k+1}(\Omega)^d) \cap L^\infty(L^2(\Omega)), & \partial_t \Phi &\in L^2(H^{k+1}(\Omega)) \cap L^\infty(H^1(\Omega)), \\ D_t \mathbf{u} &\in L^\infty(L^\infty(\Omega)), & D_t^2 \Phi &\in L^\infty(L^2(\Omega)), \\ D_t^2 \mathbf{u} &\in L^2(L^2(\Omega)), & p &\in L^\infty(H^k(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)) \end{aligned} \quad (8)$$

et que de plus  $\nabla \cdot \mathbf{u}(t=0) \in H^{k+1}(\Omega)^d$ . Si par ailleurs  $\mu$  et  $F$  sont lipschitziennes et chacune minorée par une constante positive, et que de plus  $F$  a une dérivée lipschitziennne, on a alors le théorème :

**Théorème 3.1.** *Supposons  $k > d - 1$  (ou  $k > d - 2$  si  $F$  est constante) et  $\Delta t = C_0 h^r$ , avec  $d < r < 2k + 2 - d$  (ou  $(d - 1)/2 < r < 2k + 2 - d$  si  $F$  est constante). Alors, pour tout  $\varepsilon$  positif, il existe  $h_0$  et  $\kappa$  positifs tels que, pour  $h < h_0$ , l'algorithme (7) admette une unique solution  $(\Phi_h, \chi_h, \mathbf{u}_h, p_h) \in \ell^\infty(T_h \times T_h \times V_h \times Q_h)$  vérifiant*

$$\begin{aligned} \|\Phi - \Phi_h\|_{\ell^\infty(H^1(\Omega))} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\ell^\infty(H^1(\Omega))} + \|p - p_h\|_{\ell^2(L^2(\Omega))} &\leq \kappa(\Delta t + h^k), \\ \|\Phi - \Phi_h\|_{\ell^\infty(L^2(\Omega))} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\ell^\infty(L^2(\Omega))} + \|\nabla \cdot \mathbf{u} - \chi_h\|_{\ell^\infty(L^2(\Omega))} &\leq \kappa(\Delta t + h^{k+1}). \end{aligned} \quad (9)$$

De plus,  $\Phi_h$  vérifie :  $-\varepsilon \leq \Phi_h^m(\mathbf{x}) \leq 1 + \varepsilon, \forall \mathbf{x} \in \Omega, 0 \leq m \leq M$ .

**Remarque 1.** Dans le cas où  $F$  n'est pas constante, la condition  $\Delta t \leq C_0 h^d$  est restrictive, car ne permet pas de choisir de grands pas de temps : ceci a été vérifié dans les simulations numériques [7]. Dans la pratique, cette limitation peut être levée en remplaçant dans (7b) le terme  $F(\Phi_h^m) \nabla \Phi_h^{m+1}$  par le terme  $F(\Phi_h^{m+1}) \nabla \Phi_h^{m+1}$ . Le problème (7b) est alors non-linéaire et est résolu par une méthode de point fixe.

**Indications sur la démonstration.** Si une grande partie des difficultés rencontrées sont similaires à celles de la preuve de Süli [12], les termes non-linéaires nécessitent un traitement particulier, et l'estimation donnant  $\Phi_h^m$  arbitrairement proche de l'intervalle  $[0, 1]$  est indispensable à l'aboutissement de la preuve. Elle est basée sur les inégalités inverses [12]

$$\|\psi_h\|_{0,\infty,\Omega} \leq C_a h^{-d/p} \|\psi_h\|_{0,p,\Omega}, \quad \|\psi_h\|_{0,\infty,\Omega} \leq C_b h^{1-d/2} |\log h|^{1-1/d} \|\psi_h\|_{1,\Omega} \quad \forall \psi_h \in W_h. \quad (10)$$

On prendra  $h_0$  tel que  $C_b(1 + \kappa)h_0^{1-d/2} |\log h_0|^{1-1/d} (h_0^k + \Delta t) = \varepsilon$ . Supposons que les bornes annoncées sont prouvées pour  $(\Phi_h^m, \chi_h^m, \mathbf{u}_h^m)$ ,  $0 \leq m < n$ , et posons  $\Phi^m = \Phi(\cdot, t_m)$  et  $\epsilon_h^m = \Phi_h^m - \pi_h \Phi^m$ , où  $\pi_h$  est l'interpolateur de Lagrange sur  $T_h$ .  $\|\epsilon_h^m\|_{1,\Omega}$  est majoré par le lemme de Gronwall discret appliqué à la suite  $(\sqrt{F(\Phi_h^m)} \nabla \epsilon_h^m)_m$ . Les caractéristiques continues sont définies pour tout  $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$  et  $s \in [0, T]$  par l'équation différentielle :

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(\mathbf{x}, s; t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, s; t), t), \quad \forall t \in ]0, T[ \text{ et la condition initiale } \mathbf{X}(\mathbf{x}, s; s) = \mathbf{x}.$$

Posons  $\mathbf{X}^m(\mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t_{m+1}, t_m)$ . Sous l'hypothèse de récurrence, les caractéristiques approchées  $\mathbf{X}_h^m$  (7a) sont telles que  $\mathbf{X}_h^m(\mathbf{x}) \in \Omega$  [6, p. 53] et, pour tout  $\psi \in L^q(\Omega)$ ,  $1/p + 1/q = 1/2$ ,

$$\left( \frac{\epsilon_h^m \circ \mathbf{X}^m - \epsilon_h^m \circ \mathbf{X}_h^m}{\Delta t}, \psi \right) \leq C_d (\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}_h^m\|_{0,\Omega}^2 + K_{\Delta t,m} \Delta t)^{1/2} \|\psi\|_{0,q,\Omega} \|\nabla \epsilon_h^m\|_{0,p,\Omega}$$

où  $K_{\Delta t,m} = C_1(1 + \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{L^\infty(L^\infty(\Omega))} \Delta t) \{ \|\partial_t \mathbf{u}\|_{L^\infty(L^\infty(\Omega))} + \|D_t \mathbf{u}\|_{L^\infty(L^\infty(\Omega))} \}^2$ . Avec  $p = 2, q = \infty$ , (10) permet pour  $\psi = \epsilon_h^{m+1}$  de se ramener à une majoration par  $\|\epsilon_h^{m+1}\|_{1,\Omega}$  et des termes bornés par l'hypothèse de récurrence. La

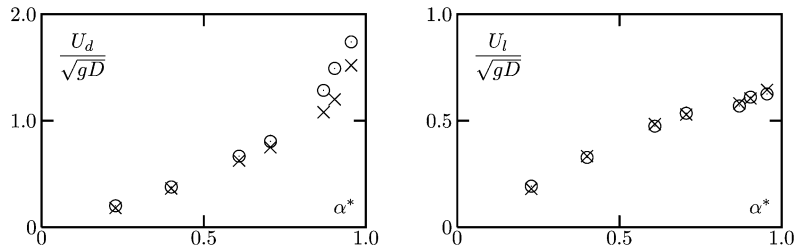


Fig. 1. Vitesses  $U_d$  et  $U_l$  des fronts dense et léger respectivement selon le paramètre de contraste de densité  $\alpha^* = \sqrt{(\rho_d - \rho_l)/(\rho_d + \rho_l)}$ .  $D$  est la demi-hauteur du canal,  $g$  l'accélération de la gravité. ×, observations expérimentales; ○, simulations numériques.

Fig. 1. Velocities  $U_d$  and  $U_l$  of the dense and light fronts respectively versus the density contrast  $\alpha^*$ .  $D$  is the channel half-depth;  $g$ , gravity acceleration. ×, experimental measurements; ○, numerical simulations.

majoration du même terme avec  $\psi = \nabla(\epsilon_h^{m+1} - \epsilon_h^m)/\Delta t$  est plus technique, et fait apparaître la contrainte  $r > d - 2$  pour majorer  $\|\epsilon_h^{m+1}\|_{1,\Omega}$ . On utilise aussi que, pour  $\beta > 0$  arbitraire :

$$A_1 = \left\| \left( \{F(\Phi^m) - F(\Phi_h^m)\} \nabla \Phi^{m+1}, \nabla \frac{\epsilon_h^{m+1} - \epsilon_h^m}{\Delta t} \right) \right\|$$

$$\leq \beta^{-1} \|F'(\Phi^m) \nabla \Phi^m - F'(\Phi_h^m) \nabla \Phi_h^m\|_{0,\Omega}^2 \|\nabla \Phi^{m+1}\|_{0,\infty,\Omega}^2$$

$$+ \beta^{-1} \|F(\Phi^m) - F(\Phi_h^m)\|_{0,\Omega}^2 \|\Delta \Phi^{m+1}\|_{0,\infty,\Omega}^2 + \beta \left\| \frac{\epsilon_h^{m+1} - \epsilon_h^m}{\Delta t} \right\|_{0,\Omega}^2,$$

dont le premier terme peut être majoré par  $(1/\beta) \|\nabla \epsilon_h^m\|_{0,\Omega}^2 \|\nabla \Phi^{m+1}\|_{0,\infty,\Omega}^2$  pour  $h < h_0$ , en utilisant l'hypothèse de récurrence sur  $\Phi_h^m$ . Les termes faisant apparaître les bornes les plus restrictives sur  $r$  ont la même forme,

$$A_2 = \frac{1}{\Delta t} \left\| \left( \sqrt{F(\Phi_h^{m+1})} - \sqrt{F(\Phi_h^m)} \right) \nabla \epsilon_h^{m+1} \right\|_{0,\Omega}^2, \quad A'_2 = \frac{1}{\Delta t} \left\| \left( \sqrt{1 + \alpha \Phi_h^{m+1}} - \sqrt{1 + \alpha \Phi_h^m} \right) \nabla e_h^m \right\|_{0,\Omega}^2,$$

où  $e_h^m = \mathbf{u}_h^m - \pi_h^S \mathbf{u}(\cdot, t_m)$ , avec  $\pi_h^S$  un opérateur de projection de  $H_0^1(\Omega)^d$  sur  $V_h$ , et imposent de donner une majoration en  $o(\Delta t)$  de  $\|\Phi_h^{m+1} - \Phi_h^m\|_{0,\infty,\Omega}^2$ .

#### 4. Conclusion

L'algorithme présenté ici a permis dans [7] de réaliser les premières simulations numériques d'écoulements dits d'échange pour de forts rapports de densité entre des fluides miscibles. Ces écoulements consistent à mettre en présence dans un canal deux fluides de densité différente, initialement séparés par une paroi verticale. Lorsqu'on supprime celle-ci, deux courants de fluides dense et léger se propagent respectivement aux parois inférieure et supérieure du canal, et atteignent des vitesses constantes, respectivement  $U_d$  et  $U_l$ . La Fig. 1 compare observations expérimentales et résultats numériques pour  $\mu(\rho)$  et  $F(\Phi)$  prises constantes, et indique que le système de Kazhikhov–Smagulov est approprié pour modéliser ce type d'écoulements et que l'algorithme proposé ici permet d'en approcher la solution.

#### Remerciements

Les auteurs souhaitent remercier très vivement Didier Bresch, avec qui de nombreuses discussions ont été déterminantes pour ce travail.

#### Références

[1] T. Alazard, Low Mach number limit of the full Navier–Stokes equations, Arch. Rational Mech. Anal., in press.  
 [2] S.N. Antonsev, A.V. Kazhikhov, V.N. Monakov, Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids, North-Holland, Amsterdam, 1990.  
 [3] S.C. Brenner, L.R. Scott, The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Texts Appl. Math., vol. 15, Springer, New York, 2002.

- [4] D. Bresch, E.H. Essoufi, M. Sy, De nouveaux systèmes de type Kazhikhov–Smagulov: modèles de propagation de polluants et de combustion à faible nombre de Mach, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 335 (2002) 973–978.
- [5] F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Elements Methods*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [6] J. Étienne, *Simulation numérique d'écoulements gravitaires à fortes différences de densité. Application aux avalanches*, PhD thesis, INP Grenoble, September 2004.
- [7] J. Étienne, E.J. Hopfinger, P. Saramito, Numerical simulations of high density ratio lock-exchange flows, *Phys. Fluids* 17 (3) (2005) 036601 (12 pages).
- [8] D.D. Joseph, Y.Y. Renardy, *Fundamentals of Two-Fluid Dynamics. Part II: Lubricated Transport, Drops and Miscible Liquids*, *Interdiscip. Appl. Math.*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [9] A. Kazhikhov, Sh. Smagulov, The correctness of boundary value problems in a diffusion problem of an homogeneous fluid, *Sov. Phys. Dokl.* 22 (1977) 249–252.
- [10] P.-L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Lecture Series in Math. Appl.*, Oxford Science, 1996, 1998.
- [11] K.R. Rajagopal, L. Tao, *Mechanics of Mixtures*, *Ser. Adv. Math. Appl. Sci.*, vol. 35, World Scientific Publishing, River Edge, NJ, USA, 1995.
- [12] E. Süli, Convergence and nonlinear stability of the Lagrange–Galerkin method for the Navier–Stokes equation, *Numer. Math.* 53 (1988) 459–483.