Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 597–600
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Algèbre

Dimension de Hochschild des algèbres graduées

Roland Berger

LaMUSE, faculté des sciences et techniques, 23, rue Paul-Michelon, 42023 Saint-Étienne cedex 2, France

Reçu le 22 juin 2005 ; accepté le 26 septembre 2005

Présenté par Alain Connes

Résumé

On démontre que la dimension de Hochschild des algèbres $\mathbb{N}$-graduées connexes sur un corps commutatif est égale à la dimension projective du module trivial, et aussi à la dimension globale. Le fait que la dimension projective du module trivial coïncide avec la dimension globale est bien connu et fondamental dans la théorie, mais la preuve donnée ici consistant à passer aux bimodules rend le résultat plus naturel. ***Pour citer cet article : R. Berger, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***
© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Hochschild dimension for graded algebras. It is a basic fact that the global dimension of a connected $\mathbb{N}$-graded algebra coincides with the projective dimension of the trivial module. This result is recovered by proving that the Hochschild dimension is equal to the projective dimension of the trivial module. Thus the result becomes more natural with bimodules entering into the picture. ***To cite this article: R. Berger, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***
© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

La géométrie projective non commutative a donné une nouvelle impulsion à l'étude des algèbres graduées [17], et de nouvelles classes d'algèbres graduées sont apparues : algèbres AS-régulières [1,2], algèbres de Sklyanin [16,18], algèbres N-Koszul homogènes [3,4,6]. Les algèbres de Sklyanin ont été aussi interprétées comme des 3-sphères en géométrie différentielle non commutative [12,13]. D'autre part, les algèbres liées à l'équation de Yang–Mills ont fourni de nouveaux exemples d'algèbres N-Koszul homogènes [10,11]. Des versions filtrées des algèbres graduées considérées sont maintenant envisagées, puisqu'une version non homogène de la propriété N-Koszul vient d'être proposée grâce à un théorème PBW [5,14], incluant en particulier une généralisation des algèbres de réflexions symplectiques [5].

2. Rappels sur les algèbres $\mathbb{N}$-graduées connexes [7,8,15]

Dans tout cet article, k est un corps commutatif et A est une k-algèbre associative unifère $\mathbb{N}$-graduée *connexe*. La graduation de A est notée A_n, $n \geqslant 0$. Dire que A est connexe signifie que $A_0 = k$. La projection naturelle $A \to k$ fait de k un A-module à gauche (respectivement à droite) qui sera parfois noté ${}_A k$ (respectivement k_A).

Adresse e-mail : Roland.Berger@univ-st-etienne.fr (R. Berger).

1631-073X/$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2005.09.039

On notera A-grMod la catégorie des A-modules à gauche M qui sont $\mathbb{Z}$-gradués. Les morphismes de cette catégorie sont les applications A-linéaires graduées *homogènes de degré* 0. La graduation de M sera notée M_n, $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout $l \in \mathbb{Z}$, le décalage $M(l)$ de M est le module M gradué par $M(l)_n = M_{n+l}$. Un module gradué M est dit *libre-gradué* s'il a une base formé d'éléments homogènes ou, de facon équivalente, s'il est isomorphe à une somme directe $\bigoplus_{i\in I} A(l_i)$. Les A-modules libres-gradués sont exactement les $A \otimes_k E$, où E décrit les objets de k-grMod.

On souhaite approcher les objets de A-grMod par les projectifs de cette catégorie. Notons que si P est un objet de A-grMod, P est projectif dans A-grMod si et seulement si P est projectif dans A-Mod. La meilleure approximation sera réalisée par les morphismes surjectifs *essentiels*.

Définition 2.1.

(1) Soit $f : M \to M'$ un morphisme de A-grMod, surjectif. On dit que f est *essentiel* si la restriction de f à un sous-objet strict de M n'est jamais surjective.
(2) Soit M un objet de A-grMod. Une *couverture projective* de M est un couple (P, f) pour lequel P est un objet projectif de A-grMod et $f : P \to M$ est un morphisme surjectif essentiel.

Si elle existe, une couverture projective est unique à isomorphisme près. Le premier résultat de la théorie est l'existence des couvertures projectives pour les modules bornés inférieurement. Un module M est dit *borné inférieurement* s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $M_m = 0$ dès que $m < n$.

Théorème 2.2. *Soit M un objet de A-*grMod*, borné inférieurement. Alors M possède une couverture projective. Toute couverture projective (P, f) de M est telle que P est libre-gradué et borné inférieurement.*

Proposition 2.3. *Soient M, P des objets de A-*grMod*, P projectif, P et M bornés inférieurement. Soit $f : P \to M$ un morphisme de A-*grMod*, surjectif. Alors f est une couverture projective si et seulement si* $\ker(f) \subseteq \mathcal{I}.P$*, où l'on a posé $\mathcal{I} = \bigoplus_{n\geqslant 1} A_n$.*

Soit M un objet de A-grMod, *borné inférieurement*. D'après le Théorème 2.2, M a une résolution projective dans A-grMod

$$\cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0, \tag{1}$$

qui est *minimale*, c'est-à-dire que chaque morphisme surjectif $P_i \to \mathrm{im}(d_i)$ est essentiel. Nous noterons par $\mathcal{P}$ (ou $\mathcal{P} \to M$) la résolution (1). Toute résolution projective minimale de M est isomorphe à $\mathcal{P}$, et toute résolution projective de M dans A-grMod contient une copie de $\mathcal{P}$ comme facteur direct. De la Proposition 2.3, on tire :

Proposition 2.4. *Soit M dans A-*grMod *borné inférieurement. Soit $\mathcal{P} \to M$ une résolution projective de M dans A-*grMod*, formée de modules bornés inférieurement. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *$\mathcal{P}$ est minimale,*
(ii) *$im(d_{i+1}) \subseteq \mathcal{I}.P_i$ pour tout $i \geqslant 0$ (où $d_{i+1} : P_{i+1} \to P_i$ désigne la différentielle de $\mathcal{P}$),*
(iii) *le complexe $k \otimes_A \mathcal{P}$ est à différentielle nulle.*

Si $\mathcal{P}$ est minimale, alors d'après (iii), l'espace vectoriel gradué $\mathrm{Tor}_i^A(k, M)$ est isomorphe à $k \otimes_A P_i$, et le A-module gradué P_i est isomorphe à $A \otimes_k (\mathrm{Tor}_i^A(k, M))$.

3. Dimension projective et dimension globale

Soit M un objet de A-grMod. La *dimension projective* $pd(M)$ de M est, par définition, l'entier n (s'il existe) tel que M admette une résolution projective de A-Mod de longueur n, mais aucune de longueur $n - 1$. Si M n'a pas de résolution projective de longueur finie, on pose $pd(M) = \infty$. On définit $gr.pd(M)$ de manière analogue, mais en imposant aux résolutions projectives d'être dans A-grMod. On a $pd(M) \leqslant gr.pd(M)$.

Lemme 3.1. *Soit M un objet de A-grMod, borné inférieurement, et soit n un entier naturel. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $gr.pd(M) \leqslant n$,
(ii) $pd(M) \leqslant n$,
(iii) $\mathrm{Tor}^A_{n+1}(k, M) = 0$.

Les implications (i) ⇒ (ii) et (ii) ⇒ (iii) sont claires (même si M n'est pas borné inférieurement). Supposons (iii). Soit $\mathcal{P}$ une résolution projective minimale de M dans A-grMod. D'après la Proposition 2.4, on a $P_{n+1} = 0$. Donc $P_i = 0$ pour tout $i \geqslant n + 1$, d'où (i). On en déduit :

Proposition 3.2. *Soit M un objet de A-grMod, borné inférieurement. On a*

$$pd(M) = gr.pd(M) = \sup\bigl\{i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\};\ \mathrm{Tor}^A_i(k, M) \neq 0\bigr\},$$

où on a posé $\mathrm{Tor}^A_\infty(k, M) = 0$. En particulier, $pd(M)$ est la longueur (peut-être infinie) d'une résolution projective minimale de M.

Par définition, la dimension globale gauche de l'anneau A est

$$l.gl.\dim(A) = \sup\bigl\{pd(M);\ \ M \in A\text{-Mod}\bigr\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Quand on impose à M d'être dans A-grMod, cette quantité est notée $gr.l.gl.\dim(A)$. On définit également $r.gl.\dim(A)$ et $gr.r.gl.\dim(A)$. On a $pd({}_Ak) \leqslant gr.l.gl.\dim(A) \leqslant l.gl.\dim(A)$.

Théorème 3.3. *On a $l.gl.\dim(A) = r.gl.\dim(A) = pd({}_Ak) = pd(k_A)$.*

Nous allons démontrer ce théorème en passant aux bimodules (voir section suivante). Noter qu'il impliquera $gr.l.gl.\dim(A) = l.gl.\dim(A)$, idem à droite.

4. Dimension de Hochschild

On note A^{op} la k-algèbre *opposée* à A. L'algèbre $A^e = A \otimes_k A^{op}$ est une k-algèbre $\mathbb{N}$-graduée connexe. Tout A-A-bimodule M peut être vu naturellement comme un A^e-module à gauche, et on a $pd({}_AM_A) = pd({}_{A^e}M)$. Lorsque M est gradué borné inférieurement, ces quantités sont égales aux gr.pd correspondants d'après la Proposition 3.2. D'après le « pd lemma » [19], on a

$$pd({}_AA_A) = \sup\bigl\{i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\};\ \text{il existe un bimodule } M \text{ tel que } \mathrm{Ext}^i_{A^e}(A, M) \neq 0\bigr\},$$

avec la convention $\mathrm{Ext}^\infty_{A^e}(A, M) = 0$.

Définition 4.1. $pd({}_AA_A)$ s'appelle la dimension de Hochschild de A.

Cette terminologie vient du fait que $\mathrm{Ext}^i_{A^e}(A, M)$ s'identifie au i-ième espace de *cohomologie de Hochschild* de A à coefficients dans M. Elle a encore un sens si A n'est pas graduée. On a le résultat classique suivant (Proposition 7.6, Chapitre IX dans [9]).

Proposition 4.2. *Pour toute k-algèbre associative unifère A, la dimension globale gauche ou droite de A est $\leqslant$ à la dimension de Hochschild de A.*

On est maintenant en mesure de prouver le Théorème 3.3. La suite d'inégalités

$$pd({}_Ak) \leqslant l.gl.\dim(A) \leqslant pd({}_AA_A),$$

montre qu'il suffit d'avoir $pd({}_AA_A) = pd({}_Ak)$ pour conclure (par symétrie, on aura $pd({}_AA_A) = pd(k_A)$). Comme A est un A^e-module gradué borné inférieurement, il a une résolution projective minimale $\mathcal{P}$ dans A-grMod-A dont la différentielle sera notée d. Considérons le complexe $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \otimes_A k$ de A-grMod, dont la différentielle sera notée δ. Comme $P_1 \to P_0 \to A \to 0$ est exact, $Q_1 \to Q_0 \to k \to 0$ est exact. Regardant $\mathcal{P}$ comme une résolution projective de A dans Mod-A et la comparant avec l'application identité de A, on voit qu'il y a dans Mod-A deux morphismes de résolutions $f : \mathcal{P} \to A$ et $g : A \to \mathcal{P}$ (où A est considéré comme un complexe concentré en degré 0), et une homotopie $s : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ tels que $1_{\mathcal{P}} - gf = sd + ds$. Clairement, $1_{\mathcal{P}} = sd + ds$ en degré > 0. Appliquant $- \otimes_A k$, on obtient $1_{\mathcal{Q}} = (s \otimes_A 1_k)\delta + \delta(s \otimes_A 1_k)$ en degré > 0, ce qui implique que $\mathcal{Q}$ est exact en degré > 0. Ainsi, $\mathcal{Q}$ est une résolution projective de ${}_A k$ dans A-grMod.

Comme $k \otimes_A \mathcal{Q} = k \otimes_A \mathcal{P} \otimes_A k$ et comme $\mathcal{P}$ est minimale, $k \otimes_A \mathcal{Q}$ est à différentielle nulle (Proposition 2.4) , donc $\mathcal{Q}$ est minimale (Proposition 2.4). Or P_i est de la forme $A \otimes_k E \otimes_k A$ avec E espace vectoriel, donc $Q_i = A \otimes_k E$, si bien que $P_i = 0$ si et seulement si $Q_i = 0$. Par suite, les résolutions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont *la même longueur*. Utilisant la Proposition 3.2, on obtient $pd({}_A A_A) = pd({}_A k)$. On notera que l'on a aussi obtenu (voir [6] pour le cas homogène Koszul) :

Théorème 4.3. *Soit A une algèbre $\mathbb{N}$-graduée connexe sur un corps commutatif k. La dimension de Hochschild de A est égale à la dimension globale gauche ou droite de A.*

Références

[1] M. Artin, W.F. Schelter, Graded algebras of global dimension 3, Adv. Math. 66 (1987) 171–216.

[2] M. Artin, J. Tate, M. Van den Bergh, Some Algebras Associated to Automorphisms of Elliptic Curves, The Grothendieck Festschrift, vol. 1, Birkhäuser, Basel, 1990.

[3] R. Berger, Koszulity for nonquadratic algebras, J. Algebra 239 (2001) 705–734.

[4] R. Berger, M. Dubois-Violette, M. Wambst, Homogeneous algebras, J. Algebra 261 (2003) 172–185.

[5] R. Berger, V. Ginzburg, Symplectic reflection algebras and non-homogeneous N-Koszul property, math.RA/0506093.

[6] R. Berger, N. Marconnet, Koszul and Gorenstein properties for homogeneous algebras, math.QA/0310070, Alg. Rep. Theory, à paraître.

[7] N. Bourbaki, Algèbre homologique, Masson, 1980 (Chapitre 10 du livre d'Algèbre).

[8] H. Cartan, Homologie et cohomologie d'une algèbre graduée, Séminaire Cartan, Paris, 1958–59, exposé 15.

[9] H. Cartan, S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton University Press, 1956.

[10] A. Connes, M. Dubois-Violette, Yang–Mills algebra, Lett. Math. Phys. 61 (2002) 149–158.

[11] A. Connes, M. Dubois-Violette, Yang–Mills and some related algebras, math-ph/0411062.

[12] A. Connes, M. Dubois-Violette, Noncommutative finite-dimensional manifolds I. Spherical manifolds and related examples, Comm. Math. Phys. 230 (2002) 539–579.

[13] A. Connes, M. Dubois-Violette, Moduli space and structure of noncommutative 3-spheres, Lett. Math. Phys. 66 (2003) 91–121.

[14] G. Fløystad, J.E. Vatne, PBW-deformations of N-Koszul algebras, math.RA/0505570.

[15] C. Nastacescu, F. Van Oystaeyen, Graded Ring Theory, North-Holland, 1982.

[16] A.V. Odesskii, B.L. Feigin, Sklyanin elliptic algebras, Functional Anal. Appl. 23 (1989) 207–214.

[17] J.T. Stafford, Noncommutative projective geometry, in: ICM 2002, vol. II, Beijing Higher Education Press, 2002, pp. 93–103.

[18] J. Tate, M. Van den Bergh, Homological properties of Sklyanin algebras, Invent. Math. 124 (1996) 619–647.

[19] C.A. Weibel, An Introduction to Homological Algebra, Cambridge University Press, 1994.