Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 163–168
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse harmonique

Bases d'ondelettes adaptées au règlement de la divergence infra-rouge

Béatrice Vedel [a,b]

[a] *LAMFA, UMR 6140, université de Picardie Jules Verne, 33, rue Saint Leu, 80039 Amiens cedex 1, France*
[b] *Friedrich-Schiller-Universität Jena, Fakultät für Mathematik und Informatik, Mathematisches Institut, 07740 Jena, Allemagne*

Reçu le 25 avril 2005 ; accepté après révision le 21 juin 2005

Présenté par Yves Meyer

Résumé

Nous proposons des bases bi-orthogonales d'ondelettes qui résolvent le problème de la divergence infra-rouge des séries en ondelettes usuelles dans les espaces de Sobolev homogènes $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$. Ces bases permettent de supprimer la divergence dans le cas $s - \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$ car elles sont aussi des bases de la réalisation de $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$. Dans le cas critique $s - \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$, elles fournissent un confinement de la divergence infra-rouge sur un « petit » espace. Cette méthode de confinement s'applique aussi au processus de Mumford. ***Pour citer cet article : B. Vedel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

Wavelet bases adapted to the settlement of infrared divergence. We propose bi-orthogonal wavelet bases that solve the problem of infrared divergence phenomenon for usual wavelet expansions in the homogeneous Sobolev spaces $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$. These bases remove the divergence in the case $s - \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$ since they are also bases of the realization of $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$. In the critical case $s - \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$, they provide a confinement of the infrared divergence in a 'small' space. This method of confinement is also applied to the Mumford process. ***To cite this article: B. Vedel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abridged English version

The infrared divergence is a phenomenon which can occur in a wavelet expansion of a tempered distribution modulo polynomials. For example, let us consider the homogeneous Sobolev space $\dot{H}^1(\mathbb{R})$ of distributions modulo constants which have a derivative in $L^2(\mathbb{R})$. A classical wavelet basis (Daubechies or Meyer for example) is an unconditional basis of this space (with characterization of coefficients of the wavelet expansion) [4]. But, if the expansion is convergent in $\dot{H}^1(\mathbb{R})$, it does not necessarily converge in the distributional sense because of the low-

Adresse e-mail : beatrice.vedel@u-picardie.fr (B. Vedel).

1631-073X/$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2005.06.030

frequency (infrared) term. However, the convergence in the distributional sense is given by a simple criterion: it is necessary and sufficient that all the wavelets vanish at the origin (cf. [2]).

The case of the space $\dot{H}^1(\mathbb{R}^2)$ is more complex. The infrared divergence cannot be removed without breaking the invariance by dilations (or by dyadic dilations): the convergence in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ is not given by any unconditional basis of $\dot{H}^1(\mathbb{R}^2)$ of the type $\{g_k(2^j\cdot), k \in K, j \in \mathbb{Z}\}$. If we want to keep the invariance by dyadic dilations, the best we can do is to confine the infrared divergence in a small space in the sense of Definition 1.1.

To settle the infrared divergence problem, an ideal solution would be to construct an orthonormal wavelet basis of $L^2(\mathbb{R}^n)$ such that all the wavelets vanish at the origin. Theorem 2.6 shows that it is impossible to do this with compactly supported wavelets.

We then propose a way to construct 'flat' wavelets (they and their partial derivatives of order less or equal to some order vanish at 0). These bases are constructed by modifying a Daubechies wavelet basis $\{\psi^{\varepsilon}_{j,k}, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n, \varepsilon \in \{1, \dots, 2^n - 1\}\}$. The first step is to isolate at a fixed scale $j = 0$ the wavelets which do not vanish at the origin (or a derivative does not vanish). This is the purpose of Theorem 2.1 and Corollary 2.2. The proof relies on the independence of the associated linear forms $l_\alpha : f \to \partial^\alpha f(0)$ on the space $\mathrm{Span}\langle \psi^{\varepsilon}_{0,k}, k \in \mathbb{Z}^n, \varepsilon \in \{1, \dots, 2^n - 1\}\rangle$ and is a consequence of the independence of these forms on the space $\mathrm{Span}\langle \varphi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}^n\rangle$ where φ is the scaling function of the wavelet basis (cf. [1]).

The second step is to impose – by an explicit isomorphism in a Sobolev space – the cancellation at the origin on these wavelets (Theorem 2.3).

These wavelets do not form a basis of $L^2(\mathbb{R}^n)$ but they are unconditional bases of $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ for $s > \frac{n}{2}$, $s - \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$ (here and in what follows, s is limited by the regularity of the chosen Daubechies wavelets). As the wavelets vanish sufficiently at the origin, the wavelet expansion is now convergent in the distributional sense. Hence, they also form an unconditional basis of the realization of $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$.

These bases also allow one to confine the infrared divergence in the case $s - \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$ (Theorem 2.4). Moreover, the confinement (X, Y) of $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ provided by the basis has some interesting properties: the residual space X is more regular than $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ (included in the Besov space $\dot{B}^{s+n/2}_{1,2}(\mathbb{R}^n)$) and the space Y has a realization which satisfies an Hardy inequality and is localizable (Proposition 2.5). Note that these two last results are true in the non critical case ($s - \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$) for the realization of $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ [3].

An other possibility to obtain results of confinement of the infrared divergence is given by a wavelet basis with pseudo-polynomials (Theorem 3.1). This basis is constructed from a Meyer adapted wavelet basis [5] which is composed of wavelets which have a support 'away from 0' but some of them do not verify the conditions of vanishing moments. In order to analyze $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$, we need to introduce these conditions for the dual basis and so obtain the wavelet basis with pseudo-polynomials. These functions are so-called because they coincide with a monomial in a neighborhood of 0.

This explicit behavior allows us to obtain similar results of confinement for the Mumford process. This process has been introduced by Mumford and Gidas [6] as the simplest process that verifies some axioms defined in order to generate images. One of them is the scaling invariance: the Mumford process $X(x, \omega)$ and its dilation $X(\lambda x, \omega)$ have the same law (for all $\lambda > 0$). The Mumford process is a scaling invariant Gaussian process but it can only be defined as a stochastic distribution modulo constants. Again we can only confine the divergence to a 'small' term if we want to respect the invariance by dyadic dilations.

It seems difficult to construct an explicit *orthonormal* wavelet basis of $\dot{H}^1(\mathbb{R}^2)$ adapted to the problem of infrared divergence (Theorem 3.2 is a non constructive existence theorem). Nevertheless, if we expand the process on the wavelet basis with pseudo-polynomials (now the terms are correlated) we obtain an accurate confinement of the infrared divergence (Theorem 3.3).

1. Motivation

Bourdaud a montré dans [2] que les espaces de Sobolev homogènes $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$, $s \geqslant 0$, définis a priori comme sous-espaces de l'espace $\mathcal{S}'_0(\mathbb{R}^n)$ des distributions modulo les polynômes (on peut imposer le degré inférieur ou égal à

$E(s-\frac{n}{2})$), étaient réalisables de manière invariante par dilatations si et seulement si $s-\frac{n}{2}\notin\mathbb{N}$. Cela signifie qu'il existe une application linéaire et continue $\sigma:\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que, pour tout $u\in\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$, $\sigma(u)=u$ dans $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^n)$ et $\forall\lambda>0$, $\sigma(u(\lambda\cdot))=(\sigma(u))(\lambda\cdot)$. Cette réalisation est unique et est donnée par le choix du représentant $\bar{u}$ de $u\in\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\partial^\alpha\bar{u}(0)=0$, $\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$, $|\alpha|\leqslant E(s-\frac{n}{2})$ si $s-\frac{n}{2}>0$.

Si les bases d'ondelettes classiques sont des bases inconditionnelles des espaces $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ (cf. [4]), elles ne fournissent pas la réalisation de l'espace lorsque $s-\frac{n}{2}\geqslant 0$: les ondelettes ne s'annulent pas en 0 et la série d'ondelettes ne converge pas au sens des distributions (le terme basse-fréquence – appelé aussi infra-rouge – peut diverger).

Le but de cette Note est de proposer des systèmes explicites d'ondelettes à support compact formant *simultanément* une base inconditionnelle de $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ et de son espace réalisé $\dot{H}^s_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^n)=\sigma(\dot{H}^s(\mathbb{R}^n))$ avec un système dual également explicite. Dans le cas critique $s-\frac{n}{2}\in\mathbb{N}$, on propose un confinement de la divergence infra-rouge au sens suivant :

Définition 1.1. Soit E un sous-espace de $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^n)$ muni d'une structure de Banach invariante par dilatations dyadiques, telle que l'injection canonique de $E\to\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^n)$ soit continue.

Un couple (X,Y) de sous-espaces fermés de E est appelé un confinement de la divergence infra-rouge d'ordre m si E est la somme directe topologique des deux sous-espaces X et Y et si

(i) X et Y sont invariants par dilatations dyadiques,
(ii) Y est réalisable de manière invariante par dilatations dyadiques, c'est-à-dire qu'il existe une application linéaire et continue $\sigma:Y\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que, pour tout $u\in Y$, $\sigma(u)=u$ dans $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^n)$ et $\forall j\in\mathbb{Z}$, $\sigma(u(2^j\cdot))=(\sigma(u))(2^j\cdot)$,
(iii) il existe m fonctions $\theta_1,\dots,\theta_m\in E$ telles que

$$\left\{\theta_i(2^jx),\ j\in\mathbb{Z},\ i=1,\dots,m\right\}\tag{1}$$

est une base inconditionnelle de X.

L'espace X est appelé espace résiduel et l'entier m est un invariant de X.

2. Base d'ondelettes plate en 0 a l'ordre *m*

Cette base est obtenue par modification d'une base d'ondelettes de Daubechies afin d'imposer l'annulation en 0 aux ondelettes. Pour cela, nous étudions tout d'abord le comportement en 0 des ondelettes de Daubechies. On a le

Théorème 2.1. *Soit $N\in\mathbb{N}$ un entier impair et soit $\{\psi^\varepsilon_{j,k}=2^{nj/2}\psi^\varepsilon(2^j\cdot-k),\ j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}^n,\ \varepsilon\in\mathcal{E}=\{1,\dots,2^n-1\}\}$ la base de Daubechies à support dans le pavé $[0,N]^n$. On note $r\geqslant 0$ la régularité des ondelettes et K l'ensemble fini d'indices tel que $k\in K\Leftrightarrow 0\in\mathrm{Int}(\mathrm{Supp}\,\psi^\varepsilon(\cdot-k))$.*

Il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^r$, τ_α, $\alpha\in\mathbb{N}^n$, $|\alpha|\leqslant E(r)$, et $\tilde{\psi}^\varepsilon_k$, $(\varepsilon,k)\in\Lambda$, telles que

(i) $\forall\beta\in\mathbb{N}^n$, $|\beta|\leqslant E(r)$, $\partial^\beta\tau_\alpha=\delta_{\alpha,\beta}$ *(symbole de Kronecker),*
(ii) *le système $\{\tau_\alpha,\ |\alpha|\leqslant E(r)\}\cup\{\tilde{\psi}^\varepsilon_k,\ (\varepsilon,k)\in\Lambda\}$ est une base inconditionnelle de* $\mathrm{Span}\langle\psi^\varepsilon_{0,k},\ k\in K,\ \varepsilon\in\mathcal{E}\rangle$.

Cela signifie que, par un changement de base en dimension finie, on peut « isoler » les ondelettes possédant une dérivée non nulle en 0.

Pour $j\in\mathbb{Z}$, $|\alpha|\leqslant r$ et $(k,\varepsilon)\in\Lambda$, on définit les fonctions $\tau_{j,\alpha}=2^{nj/2}\tau_\alpha(2^j\cdot)$ et $\tilde{\psi}^\varepsilon_{j,k}=2^{nj/2}\tilde{\psi}^\varepsilon_k(2^j\cdot)$.

Corollaire 2.2. *Le système* $\{\tau_{j,\alpha},\ j\in\mathbb{Z},\ |\alpha|\leqslant E(r)\}\cup\{\tilde{\psi}^{\varepsilon}_{j,k},\ j\in\mathbb{Z},\ (\varepsilon,k)\in\Lambda\}\cup\{\psi^{\varepsilon}_{j,k},\ j\in\mathbb{Z},\ k\in K,\ \varepsilon\in\mathcal{E}\}$ *est une base inconditionnelle de* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *et de* $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ *pour* $s<r$*, appelée « base de Daubechies réorganisée ».*

Soit $m\in\mathbb{N}$, $m<r$. On impose maintenant l'annulation des ondelettes en 0 à l'ordre m. Pour cela, pour $\alpha\in\mathbb{N}^n$, $|\alpha|\leqslant m$ et $j\in\mathbb{Z}$, on définit $\omega_\alpha=\tau_\alpha-2^{|\alpha|}\tau_\alpha(\frac{\cdot}{2})$ et $\omega_{j,\alpha}=2^{nj/2}\omega_\alpha(2^j\cdot)$.

Théorème 2.3. *Le système* $\{\omega_{j,\alpha},\ j\in\mathbb{Z},\ |\alpha|\leqslant m\}\cup\{\tau_{j,\alpha},\ j\in\mathbb{Z},\ m\leqslant|\alpha|\leqslant E(r)\}\cup\{\tilde{\psi}^{\varepsilon}_{j,k},\ j\in\mathbb{Z},\ (\varepsilon,k)\in\Lambda\}\cup\{\psi^{\varepsilon}_{j,k},\ j\in\mathbb{Z},\ k\in K,\ \varepsilon\in\mathcal{E}\}$ *est une base inconditionnelle de* $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ *pour* $m<s<r$*, appelée « base d'ondelettes plate à l'ordre* m *» au sens où toutes ces fonctions s'annulent en* 0 *ainsi que leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre* m*.*

Théorème 2.4. *Soit* $s\in\mathbb{R}$, $s>\frac{n}{2}$ *tel que* $r>s$*.*

1. *Si* $s-\frac{n}{2}\notin\mathbb{N}$*, la base d'ondelettes plate à l'ordre* $E(s-\frac{n}{2})$ *est une base inconditionnelle de* $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ *et de* $\dot{H}^s_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^n)$.
2. *Si* $s-\frac{n}{2}=m\in\mathbb{N}^*$*, le couple* (X,Y) *de sous-espaces vectoriels fermés de* $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$*, défini à partir de la base d'ondelettes plate à l'ordre* $m-1$ *par*

$$X=\mathrm{Span}\big\langle\tau_{j,\alpha},\ j\in\mathbb{Z},\ |\alpha|=m\big\rangle$$

et

$$\begin{aligned}Y=\mathrm{Span}&\big\langle\omega_{j,\alpha},\ j\in\mathbb{Z},\ |\alpha|\leqslant m-1\big\rangle\cup\big\langle\tau_{j,\alpha},\ j\in\mathbb{Z},\ m+1\leqslant|\alpha|\leqslant E(r)\big\rangle\\&\cup\big\langle\tilde{\psi}^{\varepsilon}_{j,k},\ j\in\mathbb{Z},\ (\varepsilon,k)\in\Lambda\big\rangle\cup\big\langle\psi^{\varepsilon}_{j,k},\ j\in\mathbb{Z},\ k\in K,\ \varepsilon\in\mathcal{E}\big\rangle,\end{aligned}$$

est un confinement de la divergence infra-rouge d'ordre $\mathrm{Card}\{\alpha\in\mathbb{N}^n,\ |\alpha|=m\}$.
3. *Si* $s=\frac{n}{2}$*, le couple* (X,Y) *de sous-espaces vectoriels fermés de* $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$*, défini à partir de la base de Daubechies réorganisée par*

$$X=\mathrm{Span}\langle\tau_{j,0},\ j\in\mathbb{Z}\rangle$$

et

$$Y=\mathrm{Span}\big\langle\tau_{j,\alpha},\ j\in\mathbb{Z},\ 1\leqslant|\alpha|\leqslant E(r)\big\rangle\cup\big\langle\tilde{\psi}^{\varepsilon}_{j,k},\ j\in\mathbb{Z},\ (\varepsilon,k)\in\Lambda\big\rangle\cup\big\langle\psi^{\varepsilon}_{j,k},\ j\in\mathbb{Z},\ k\in K,\ \varepsilon\in\mathcal{E}\big\rangle,$$

est un confinement de la divergence infra-rouge d'ordre 1.

Remarque 1. Chacune des bases construites est explicite ainsi que son système dual (dans $\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^n)$).

Pour $s-\frac{n}{2}\in\mathbb{N}$, une réalisation σ de Y est donnée par la représentation en série sur son système générateur. Cette réalisation vérifie les propriétés ci-dessous. Les deux premières sont vérifiées par l'espace $\dot{H}^s_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^n)$ lorsque $s-\frac{n}{2}\notin\mathbb{N}$ (cf. [3]).

Proposition 2.5. *Soient* $s-\frac{n}{2}\in\mathbb{N}$ *et* (X,Y) *le confinement de* $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ *donné par le Théorème* 2.4*.*

(i) (*Inégalité de Hardy*) *Il existe une constante* $C>0$ *telle que*

$$\forall f\in Y,\quad\int\frac{|\sigma(f)(x)|^2}{|x|^{2s}}\,\mathrm{d}x\leqslant C\|f\|^2_{\dot{H}^s}.\tag{2}$$

(ii) (*Localisation*) *L'espace* $\sigma(Y)$ *est localisable, c'est-à-dire que, pour* $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*, à support compact dans une couronne et telle que* $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi_j(x) = 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *avec* $\varphi_j = \varphi(2^{-j}\cdot)$*, on a*

$$\forall f \in Y, \quad \|f\|_{\dot{H}^s}^2 \simeq \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|\sigma(f)\varphi_j\|_{\dot{H}^s}^2. \tag{3}$$

(iii) (*Régulatité*) *Si* $r > s + \frac{n}{2}$*, l'espace* X *est inclus dans l'espace de Besov homogène* $\dot{B}_2^{s+n/2,1}(\mathbb{R}^n)$.

Il est facile de montrer que la base d'ondelettes plate à l'ordre m n'est pas une base de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Le théorème suivant montre qu'on ne peut espérer résoudre ce problème avec une base orthonormée (au sens L^2) d'ondelettes :

Théorème 2.6. *Il n'existe pas de base orthonormée* $f_\lambda, \lambda \in \Lambda$*, de* $L^2([0, +\infty[)$ *telle que* :

$$\operatorname{Supp} f_\lambda \subset [a_\lambda, b_\lambda], \quad b_\lambda > a_\lambda > 0, \tag{4}$$

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \frac{b_\lambda}{a_\lambda} < \infty \quad et \quad \int f_\lambda(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \forall\lambda \in \Lambda. \tag{5}$$

L'obstruction tient au fait qu'une telle base ne peut représenter une fonction valant 1 sur un voisinage de l'origine. On peut en fait affaiblir les hypothèses du théorème. Ainsi, on peut remplacer $\mathbb{R}^+$ par $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$. La condition de support « loin de 0 » peut être relaxée en une condition d'annulation et de régularité (type hölderienne) en 0. De même, le résultat reste valable pour des bases bi-orthogonales (ou des frames duaux) vérifiant toutes deux les hypothèses.

L'avantage de la bi-orthogonalité est de pouvoir dé-symétriser certaines propriétés structurelles et nous en avons tiré parti pour contourner l'obstruction.

3. Base d'ondelettes à pseudo-polynômes – application au processus de Mumford

Théorème 3.1. *Il existe une base d'ondelettes* r*-régulière à pseudo-polynômes d'ordre* $p-1$ (*avec* $p < r$)*, c'est-à-dire un système*

$$\left\{\psi_{j,k},\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}^n \setminus K_{pp}\right\} \cup \{\theta_{j,\alpha},\ j \in \mathbb{Z},\ |\alpha| \leqslant p-1\} \cup \left\{f_{j,\alpha},\ j \in \mathbb{Z},\ p \leqslant |\alpha| \leqslant m-1\right\}$$

qui est une base de Riesz de $L^2(\mathbb{R}^n)$ *et de* $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ *pour* $0 \leqslant s < r$.

Cette base est composée de quatre types de fonctions, toutes de classe $\mathcal{C}^r$ (*pour simplifier les notations, nous ignorons l'ensemble* $\mathcal{E}$ *pour les ondelettes*) :

1. *des ondelettes de Daubechies* $\psi_{j,k} = 2^{nj/2}\psi(2^j\cdot - k)$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^n \setminus K$ *avec* $K = K_{pp} \cup K_{\text{trans}}$*. La fonction* ψ *est à support dans* $[0, N]^n$ *et* $k \notin K \Leftrightarrow \operatorname{Supp}\psi(\cdot - k) \cap]-N, N[^n = \emptyset$;
2. *des ondelettes transitoires* (*ondelettes modifiées*) $\psi_{j,k} = 2^{nj/2}\psi_k(2^j\cdot)$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in K_{\text{trans}} \subset K$*. Les fonctions* ψ_k *sont à support dans la couronne* $\{x \in \mathbb{R}^n;\ N \leqslant |x| \leqslant 3N\sqrt{n}\}$;
3. *des fonctions transitoires* $f_{j,\alpha} = 2^{nj/2} f_\alpha(2^j\cdot)$, $j \in \mathbb{Z}$, $p \leqslant |\alpha| \leqslant m-1$*. Les fonctions* f_α *sont à support dans la couronne* $\{x \in \mathbb{R}^n;\ N \leqslant |x| \leqslant 3N\sqrt{n}\}$;
4. *des pseudo-polynômes* $\theta_{j,\alpha} = 2^{nj/2}\theta_\alpha(2^j\cdot)$, $j \in \mathbb{Z}$, $|\alpha| \leqslant p-1$*. Les fonctions* θ_α *sont à support dans la boule* $B(0, N\sqrt{n})$ *et valent* x^α *sur la boule* $B(0, N)$.

En modifiant certains pseudo-polynômes, cette base permet aussi d'obtenir un confinement de la divergence infra-rouge pour les espaces $\dot{H}^{n/2+m}(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}$. Dans le cas de l'espace $\dot{H}^1(\mathbb{R}^2)$, on obtient :

Théorème 3.2. *La base à pseudo-polynômes d'ordre* 0 *est une base inconditionnelle de* $\dot{H}^1(\mathbb{R}^2)$ *fournissant un confinement d'ordre* 1 *de la divergence infra-rouge sur l'espace résiduel* X *défini par la fermeture de* $\mathrm{Span}\langle\theta_{j,0}, j \in \mathbb{Z}\rangle$ *dans* $\dot{H}^1(\mathbb{R}^2)$.

A une échelle j fixée, les fonctions de cette base sont toutes à support « loin de 0 », exceptée $\theta_{j,0}$ qui est constante sur un voisinage de l'origine. Ce comportement explicite au voisinage de l'origine nous permet d'obtenir des résultats similaires de confinement pour le processus de Mumford [6].

Celui-ci est formellement à partir du bruit blanc 2-dimensionnel $Z(x,\omega)$ par $X(x,\omega) = \Lambda^{-1}X(x,\omega)$ où $\Lambda = \sqrt{-\Delta}$ est l'opérateur de Calderón. C'est un processus gaussien, à accroissements stationnaires, isotrope et invariant en loi ($X(\lambda x,\omega)$ et $X(x,\omega)$ ont même loi pour tout $\lambda > 0$). Ce processus est défini modulo les constantes et il est impossible de le définir comme une distribution aléatoire tout en préservant son invariance en loi. La base d'ondelettes à pseudo-polynômes d'ordre 0 permet néanmoins d'obtenir le résultat de confinement suivant :

Théorème 3.3. *Il existe une base orthonormée de* $\dot{H}^1(\mathbb{R}^2)$, $\{\phi_k(2^j x),\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}^2\} \cup \{\tau(2^j x),\ j \in \mathbb{Z}\}$, *telle que la décomposition de* $X(x,\omega)$ *sur cette base se scinde en* $X_0(x,\omega) + X_1(x,\omega)$ *avec*

$$X_0(x,\omega) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} g_j(\omega)\tau(2^j x) \quad \text{et} \quad X_1(x,\omega) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} g_{j,k}(\omega)\phi_k(2^j x). \tag{6}$$

Les variables aléatoires g_j *et* $g_{j,k}$ *sont* $i.i.d.$ *de loi* $\mathcal{N}(0,1)$ *et* $X_1(x,\omega)$ *converge* ω*-p.s. au sens des distributions. De plus,* $X_1(2^j x,\omega)$ *et* $X_1(x,\omega)$ *ont même loi pour tout* $j \in \mathbb{Z}$.

Malheureusement, la preuve de ce théorème ne fournit pas de formules explicites pour construire ces fonctions. On peut néanmoins utiliser directement la base à pseudo-polynômes d'ordre 0 pour obtenir un autre confinement. Cette base n'étant pas orthonormée, les gaussiennes $g_{j,k}$ sont remplacées par des variables aléatoires $h_{j,k} = \sum_j \sum_k c(j,k,l,p) g_{l,p}$ où les coefficients $c(j,k,l,p)$ sont les coefficients de la matrice de changement de bases entre le relèvement de la base d'ondelettes de Meyer [4] par Λ^{-1} et la base d'ondelettes à pseudo-polynômes. Les propriétés de décroissance de ces coefficients permettent de montrer que les $h_{j,k}$ ont une taille statistique comparable à celle des gaussiennes. On obtient ainsi le

Théorème 3.4. *Le processus* $X(x,\omega)$ *se scinde sur la base d'ondelettes à pseudo-polynômes d'ordre* 0 *en* $X_0(x,\omega) + X_1(x,\omega)$ *avec*

$$X_0(x,\omega) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_{j,0}(\omega)\theta_{j,0}(x) \quad \text{et} \quad X_1(x,\omega) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^{2*}} h_{j,k}(\omega)\phi_k(2^j x). \tag{7}$$

De plus, $X_1(x,\omega)$ *converge* ω*-p.s. au sens des distributions et* $X_1(2^j x,\omega)$ *et* $X_1(x,\omega)$ *ont même loi pour tout* $j \in \mathbb{Z}$.

Cette Note est issue du travail de thèse [7] et le détail des résultats exposés seront publiés ultérieurement.

Références

[1] P. Auscher, Ondelettes à support compact et conditions aux limites, J. Funct. Anal. 111 (1) (1993) 29–43.
[2] G. Bourdaud, Réalisations des espaces de Besov homogènes, Ark. Mat. 26 (1) (1998) 41–54.
[3] G. Bourdaud, Localisation et multiplicateurs des espaces de Sobolev homogènes, Manuscripta Math. 60 (1) (1988) 93–130.
[4] Y. Meyer, Ondelettes et Opérateurs. I. Ondelettes (Wavelets), Actualités Mathématiques (Current Mathematical Topics), Hermann, Paris, 1990.
[5] Y. Meyer, Wavelets, Vibrations and Scaling, CRM Monograph Ser., vol. 9, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
[6] D. Mumford, B. Gidas, Stochastic models for generic images, Quart. Appl. Math. 59 (1) (2001) 85–111.
[7] B. Vedel, Règlement de la divergence infra-rouge dans des bases d'ondelettes adaptées, Thèse de doctorat, Amiens, 2004.