Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 861–866

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des nombres

Propriétés d'indépendance algébrique de valeurs de séries de Hecke–Mahler

Federico Pellarin

Laboratoire LMNO, université de Caen, campus II, boulevard Maréchal Juin, BP 5186, 14032 Caen cedex, France

Reçu le 21 février 2005 ; accepté après révision 4 mai 2005

Disponible sur Internet le 20 juin 2005

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Nous caractérisons complètement et explicitement les relations de dépendance algébrique sur $\mathbb{Q}$ entre valeurs complexes de séries de Hecke–Mahler prises en des points algébriques du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{C})$. Notre résultat contient des résultats antérieurs de Loxton et van der Poorten, Mahler, et Masser. ***Pour citer cet article : F. Pellarin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

Algebraic independence properties of values of Hecke–Mahler series. Here we characterize in a complete and explicit way the relations of algebraic dependence over $\mathbb{Q}$ of complex values of Hecke–Mahler series at algebraic points of the multiplicative group $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{C})$. Our result contains previous results of Loxton and van der Poorten, Mahler, and Masser. ***To cite this article: F. Pellarin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abridged English version

Let K be a real quadratic number field. In the following, we consider K as a subfield of $\mathbb{R}$ by means of a chosen embedding. We also denote by $\Sigma : K \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ the embedding given by $\Sigma(\alpha) = (\alpha, \alpha')$, where α' denotes the non-trivial Galois conjugate of α. Let us consider an element $\theta \in K$ such that:

$$0 < \theta < 1 \quad \text{and} \quad \theta' < -1. \tag{1}$$

Adresse e-mail : pellarin@math.unicaen.fr (F. Pellarin).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.05.005

The *Hecke–Mahler series associated to* θ is the power series:

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{h=1}^{[l\theta]} u^l v^h,$$

where the square brackets denote the greatest integer part. This series converges and defines a transcendental function $f(u,v)$ in the domain $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}^2$ whose elements are couples of complex numbers (u,v) such that $|u|<1$ and $|u||v|^{\theta}<1$. Below, we will introduce a certain geometric condition of *semi-freeness* on a m-tuple

$$\mathcal{M}=(\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_m)\quad \text{with } \underline{u}_i=(u_i,v_i)\in\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\overline{\mathbb{Q}})\cap\mathcal{D}.$$

Theorem 0.1. *The complex numbers* $f(u_1,v_1),\ldots,f(u_m,v_m)$ *are algebraically independent over* $\mathbb{Q}$ *if and only if the* m*-tuple* $\mathcal{M}$ *is semi-free.*

We now introduce three ingredients and describe the condition of semi-freeness.

Algebraic action. Let us consider the exponential function $\Phi:\mathbb{C}^2\to\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2$ defined by:

$$\Phi(z,z')=\bigl(e\bigl(\Delta^{-1/2}(z-z')\bigr),e\bigl(\Delta^{-1/2}(\theta^{-1}z'-\theta'^{-1}z)\bigr)\bigr),$$

where Δ is the discriminant of the $\mathbb{Z}$-module $M=\mathbb{Z}+\theta^{-1}\mathbb{Z}$ and $e(\tau)=\exp(2\pi\mathrm{i}\tau)$; the periods of Φ lie in $\Sigma(M)$.

Let S be the ring $\{\beta\in K;\ \beta M\subset M\}$. The exponential function Φ determines an action of S over $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{C})$ as follows. Let $\underline{u}=(u,v)$ be a point of $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{C})$, let $(z,z')\in\mathbb{C}^2$ be such that $\Phi(z,z')=(u,v)$ and let β be an element of S. Then, β acts on (u,v) by $(u,v)^{\beta}:=\Phi(\beta z,\beta'z')$. This action is well defined and algebraic; indeed, if we denote:

$$\mathfrak{B}=\Delta^{-1/2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -\theta'^{-1} & \theta^{-1}\end{pmatrix},\qquad \mathcal{B}(\beta)=\mathfrak{B}\cdot\begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & \beta'\end{pmatrix}\cdot\mathfrak{B}^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}, \tag{2}$$

then, the matrix $\mathcal{B}(\beta)$ has integral coefficients, and satisfies $(u,v)^{\beta}=(u^x v^y,u^z v^t)$.

We remark that $(u,v)\in\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{C})$ is a torsion point if and only if there exists $\beta\in S\setminus\{0\}$ such that $(u,v)^{\beta}=(1,1)$; in other words, the set of torsion points of $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{C})$ is $\Phi(\Sigma(K))$. The domain $\mathcal{D}$ does not contain torsion points, so that all the coordinates of $\mathcal{M}$ are points of infinite order in $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{C})$.

Equivalence relation. On the subset $\mathbb{I}$ of points of infinite order of $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{C})$, we consider the relation $\approx$ defined as follows. If $\underline{s},\underline{t}\in\mathbb{I}$, we say that $\underline{s}\approx\underline{t}$ if there exist $\beta,\gamma\in S$ not both zero, and a torsion point $\underline{\zeta}\in\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{C})$, such that $\underline{s}^{\gamma}=\underline{\zeta}\,\underline{t}^{\beta}$.

Let $\mathcal{M}$ be an m-tuple of points of infinite order of $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{C})$. The relation $\approx$ determines a partition $(\mathcal{J}_k)_{k=1,\ldots,g}$ of $\{1,\ldots,m\}$ by $i\approx j$ if and only if $(u_i,v_i)\approx(u_j,v_j)$. Let $k\in\{1,\ldots,g\}$; there exists $\underline{v}_k\in\mathbb{I}$ such that for all $i\in\mathcal{J}_k$:

$$\underline{u}_i=\Phi\bigl(\Sigma(\alpha_i)\bigr)\underline{v}_k^{\beta_i}, \tag{3}$$

for some $\alpha_i\in K$ and some $\beta_i\in S\setminus\{0\}$.

Hecke's geometric series. Let N be a $\mathbb{Z}$-submodule of rank 2 of K, and let N^* be the dual of N for the trace. We recall a variant of Hecke's geometric series (see [1]):

$$G_N\bigl(\Phi(z,z')\bigr)=G_N(u,v):=\sum_{\substack{\nu\in N^*\\ \nu>0,\ \nu'<0}} e(\nu z+\nu'z'),$$

where u, v, z, z' are related by $\Phi(z, z') = (u, v)$. One checks that this series is well defined and converges for (u, v) such that $|u||v|^{\theta} < 1$ and $|u||v|^{\theta'} < 1$. For $i \in \{1, \ldots, m\}$, we also denote:

$$G_i(\underline{u}) = G_{\beta_i^{-1}M}\left(\Phi\left(\Sigma\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)\right)\underline{u}\right). \tag{4}$$

Semi-freeness. We say that $\mathcal{M}$ is *semi-free* if for all $k = 1, \ldots, g$, the series G_i with $i \in \mathcal{J}_k$ are $\mathbb{Q}$-linearly independent.

The series G_i clearly depend on the expressions (3) (the choice of $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_g$ is not unique). However, it is possible to check that the condition of semi-freeness only depends on $\mathcal{M}$. It is also possible to show that $\mathcal{M}$ is semi-free if and only if $\mathcal{M}$ does not belong to a certain discrete union of translated of proper subgroups of $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{2m}(\mathbb{C})$ by torsion points, but we will not give a full description of this fact here.

1. Introduction

Théorème 1.1. *Les nombres complexes $f(u_1, v_1), \ldots, f(u_m, v_m)$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si le m-uplet $\mathcal{M}$ est semi-libre* (*semi-free*).

Voici quelques conséquences que l'on peut déduire de notre résultat.

Corollaire 1.2. *Soit H un sous-groupe algébrique connexe de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{C})$ de dimension 1. Soient $\underline{u}_i = (u_i, v_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$ des éléments algébriques de H tels que $|u_i| < 1$ et $0 < |u_i||v_i|^{\theta} < 1$ pour $i = 1, \ldots, m$. Alors $f(\underline{u}_1), \ldots, f(\underline{u}_m)$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_m$ sont deux à deux distincts.*

En considérant $H = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathbb{C}) \times \{1\}$, on obtient un des théorèmes principaux de Masser dans [5].

Corollaire 1.3. *Soient $\underline{u}_i = (u_i, v_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$ des éléments algébriques de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{C})$ tels que $|u_i| < 1$ et $0 < |u_i||v_i|^{\theta} < 1$ pour $i = 1, \ldots, m$. Supposons que, par rapport à l'action induite par la fonction exponentielle Φ, les éléments $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_m$ engendrent un S-sous-module de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{C})$ qui soit contenu dans un S-sous-module libre de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{C})$. Alors $f(\underline{u}_1), \ldots, f(\underline{u}_m)$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si $\underline{u}_i^{\eta} \neq \underline{u}_j$ pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant m$ et pour toute unité η de S.*

Ce Corollaire 1.3 implique un raffinement d'un théorème de Loxton et van der Poorten dans [3], dans un cas particulier.

Exemple d'application du théorème. Soit $\underline{u} = (u, v) \in \mathcal{D}$ un couple de nombres algébriques non nuls. On vérifie facilement que le quintuplet $((u, v), (u, -v), (-u, v), (-u, -v), (u^2, v^2))$ n'est pas semi-libre. En effet, la relation suivante est satisfaite :

$$f(u, v) + f(u, -v) + f(-u, v) + f(-u, -v) = 4f(u^2, v^2).$$

D'autre part, on vérifie que le quadruplet $((u, v), (u, -v), (-u, v), (-u, -v))$ est semi-libre. Notre résultat implique alors que les nombres complexes $f(u, v), f(u, -v), f(-u, v), f(-u, -v)$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et cette propriété ne découle pas des résultats de [3] et [5].

2. Esquisse de démonstration du théorème

Nous esquissons ici seulement la preuve de l'implication $\mathcal{M}$ semi-libre $\Rightarrow f(\underline{u}_1), \dots, f(\underline{u}_m)$ algébriquement indépendants (la partie la plus difficile).

Dans toute la suite, u, v, z, z' désignent des paramètres satisfaisant à $\underline{u} := (u, v) = \Phi(z, z')$. Si $N \supset M$ est un sous-module de K de rang 2, nous posons :

$$f_N(\underline{u}) = \sum_{\substack{\nu \in N^* \\ \nu > -\nu' > 0}} e(\nu z + \nu' z'). \tag{5}$$

On vérifie que $f = f_M$.

Grâce aux hypothèses (1), on voit que si $\eta > 1$ est une unité de S telle que $\eta' > 0$, alors

$$f(\underline{u}^\eta) = f(\underline{u}) - R_\eta(\underline{u}), \tag{6}$$

où $R_\eta(\underline{u}) = \sum_{\nu \in \mathcal{T}_\eta \cap M^*} e(\nu z + \nu' z')$ et $\mathcal{T}_\eta = \{\nu \in K\colon\ 0 < -\nu' < \nu \leqslant -\eta^2 \nu'\}$; on vérifie de plus que R_η est une fonction rationnelle dans $\mathbb{Q}(\underline{u})$. L'identité (6) est une *équation fonctionnelle* qui joue un rôle clé dans la démonstration de notre théorème.

Soit $\mathcal{B} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2n} \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{Q})$ avec $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$ pour tout i, j, soit $\underline{T} = (t_1, \dots, t_{2n}) \in \mathbb{G}_\mathrm{m}^{2n}(\mathbb{C})$. Nous écrivons $\mathcal{B}.\underline{T} := \widetilde{\underline{T}} \in \mathbb{C}^{2n}$, où $\widetilde{\underline{T}} = (\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_{2n})$ avec $\tilde{t}_i = \prod_{j=1}^{2n} t_j^{a_{i,j}}$.

Supposons que la matrice $\mathcal{B}$ ait tous ses coefficients $\geqslant 0$ et qu'elle soit *bonne* (« good » ; suivant la définition de [5] p. 209). Soient $\Psi_1(\underline{T}), \dots, \Psi_m(\underline{T})$ des fonctions de $2n$ variables complexes, analytiques au voisinage de l'origine, satisfaisant au système d'équations fonctionnelles :

$$\Psi_j(\mathcal{B}.\underline{T}) = \Psi_j(\underline{T}) + R_j(\underline{T}) \quad \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{7}$$

où $R_1, \dots, R_m$ sont des fonctions rationnelles. Nous utiliserons le critère d'indépendance algébrique suivant (théorème p. 399 de [3]).

Proposition 2.1. *Soit $\underline{A}$ un élément de $\mathbb{G}_\mathrm{m}^{2n}(\overline{\mathbb{Q}})$. S'il existe un corps de nombres L contenant tous les coefficients des séries de Taylor en $\underline{0}$ de $\Psi_1, \dots, \Psi_m, R_1, \dots, R_m$, si les coordonnées de $\underline{A}$ sont des nombres algébriques, si $\lim_{k \to \infty} \mathcal{B}^k.\underline{A} = \underline{0}$, si $\underline{A}$ satisfait à la* propriété A (*p.* 398 *de* [3])*, si pour tout i, Ψ_i et R_i sont définies et analytiques dans un voisinage de $\underline{A}$ et si $\Psi_1(\underline{T}), \dots, \Psi_m(\underline{T})$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}(\underline{T})$, alors les nombres complexes $\Psi_1(\underline{A}), \dots, \Psi_m(\underline{A})$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.*

Étape (1). On choisit $n = \mathrm{rang}_S(\Gamma)$ où Γ est le sous-S-module de $\mathbb{G}_\mathrm{m}^2(\mathbb{C})$ engendré par $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m$.

La proposition suivante nous permet de choisir les fonctions $\Psi_1, \dots, \Psi_m$.

Proposition 2.2. *Il existe des éléments $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \in \mathbb{G}_\mathrm{m}^2(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{D}$ qui engendrent un S-module libre de rang n, des éléments $\underline{\beta}_j = (\beta_{j,1}, \dots, \beta_{j,n}) \in (S \setminus \{0\})^n$, une unité η de K telle que $\eta' > 0$ et $\eta M = M$ et des éléments $\alpha_j \in K$, satisfaisant aux conditions suivantes* :

1. *Pour tout $i = 1, \dots, m$, on a $\Phi(\Sigma(\eta\alpha_i)) = \Phi(\Sigma(\alpha_i))$.*
2. *On a $\underline{u}_i^\eta = \Phi(\Sigma(\alpha_i))\underline{a}_1^{\beta_{i,1}} \cdots \underline{a}_n^{\beta_{i,n}}$, pour $i = 1, \dots, m$.*
3. *Les séries de $2n$ variables complexes $\Psi_j(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = f(\Phi(\Sigma(\alpha_j))\underline{v}_1^{\beta_{j,1}} \cdots \underline{v}_n^{\beta_{j,n}})$, $j = 1, \dots, m$, définissent des fonctions analytiques dans un voisinage ouvert non vide de l'origine, contenant le point $\underline{A} = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$.*

Étape (2). Montrons que les fonctions $\Psi_1, \dots, \Psi_m$ satisfont à des équations fonctionnelles de la forme (7), avec $\mathcal{B}$ satisfaisant aux conditions demandées.

On vérifie, en utilisant (1), que tous les coefficients de la matrice $\mathcal{B}(\eta)$ sont des entiers positifs, que son déterminant est 1 et qu'elle est bonne ; ainsi, la matrice $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\eta) \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}(\eta)$ ayant n blocs égaux à $\mathcal{B}(\eta)$ sur la diagonale, satisfait à toutes les conditions requises plus haut. De plus, on a que $\underline{u}^{\eta} = \mathcal{B}(\eta).\underline{u}$ dans $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{C})$, d'où

$$\underline{V}^{\eta} := (\underline{v}_1^{\eta}, \ldots, \underline{v}_n^{\eta}) = \mathcal{B}.\underline{V}, \quad \text{avec } \underline{V} = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n).$$

Tenant compte de la condition 1 de la Proposition 2.2, il est maintenant clair que l'équation fonctionnelle (6) implique des équations fonctionnelles (7) et que $\mathcal{B}$ satisfait aux conditions requises.

Étape (3). Le lemme suivant est une conséquence du théorème d'annulation de Masser [4] et implique que le point $\underline{A}$ de la Proposition 2.2 satisfait à la propriété A.

Lemme 2.3. *Le point $\underline{A}$ satisfait à la propriété A si et seulement si $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ engendrent un S-module libre de rang n.*

Étape (4). On vérifie directement que les séries de Taylor en $\underline{0}$ de $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ et $R_1, \ldots, R_m$ sont à coefficients dans le corps L engendré par les coordonnées des points de torsion $\Phi(\Sigma(\alpha_1)), \ldots, \Phi(\Sigma(\alpha_m))$.

On déduit de ce qui précède et en appliquant la Proposition 2.1, que si $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}(\underline{V})$, alors les nombres complexes $f(\underline{u}_1), \ldots, f(\underline{u}_m)$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. En effet, en utilisant les équations fonctionnelles (7), la condition 2 de la Proposition 2.2 et les définitions de $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ et $\underline{A}$, on voit facilement que :

$$\overline{\mathbb{Q}}\big(\Psi_1(\underline{A}), \ldots, \Psi_m(\underline{A})\big) = \overline{\mathbb{Q}}\big(f(\underline{u}_1), \ldots, f(\underline{u}_m)\big).$$

Étape (5). Pour terminer la démonstration du théorème nous devons encore démontrer que les fonctions $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}(\underline{V})$; c'est ici que l'on utilise l'hypothèse que $\mathcal{M}$ est semi-libre.

Supposons par l'absurde que les fonctions $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ soient algébriquement dépendantes sur $\mathbb{C}(\underline{V})$. Suivant Kubota [2], elles engendrent un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E tel que $E/(E \cap \mathbb{C}(\underline{V}))$ ait dimension $< m$; nous devons montrer que $\mathcal{M}$ n'est pas semi-libre.

Nous donnons une démonstration uniquement dans le cas particulier où $n = 1$ et où les conjugués β_i' des $\beta_i = \beta_{1,i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ déterminés par la Proposition 2.2 sont tous positifs ; dans ce cas, la condition 3 de la Proposition 2.2 nous dit que $\Psi_i(\underline{u}) = f(\Phi(\alpha_i, \alpha_i')\underline{u}^{\beta_i})$ $(i = 1, \ldots, m)$ est analytique au voisinage de l'origine. Dans le cas général ($n > 1$, ou les $\beta_{i,j}'$ pas tous positifs), la démonstration est techniquement plus compliquée, mais tout à fait de même nature.

Si $Q \in E$, alors $Q(\underline{u}) = Q(\Phi(z, z')) = \sum_{\nu \in M^*} d_\nu e(\nu z + \nu' z')$, pour des nombres complexes d_ν. Nous associons à Q l'ensemble $\Sigma(Q) \subset \Sigma(M^*)$ dont les éléments sont les couples $(\nu, \nu') \in \mathbb{R}^2$ tels que $d_\nu \neq 0$: nous appelons cet ensemble le *support* de Q.

Lemme 2.4. *Soient $c_1, \ldots, c_m$ des nombres complexes et posons $Q(\underline{u}) = c_1\Psi_1(\underline{u}) + \cdots + c_m\Psi_m(\underline{u})$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *La fonction $Q(\underline{u})$ est rationnelle.*

(ii) *Il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\nu \in \Sigma(Q)$ on ait $-\nu' > \epsilon$.*

(iii) *On a* $\lim_{k \to -\infty} Q(\underline{u}^{\eta^k}) = 0$.

(iv) *Les séries $G_1, \ldots, G_m$ définies dans* (4) *sont $\mathbb{Q}$-linéairement dépendantes et $\mathcal{M}$ n'est pas semi-libre.*

Démonstration. Remarquons d'abord, en utilisant l'identité (5), qu'il existe une constante $r_1 > 0$, dépendant uniquement de $\beta_1, \ldots, \beta_m$, telle que pour tout $\nu \in \Sigma(Q)$, on ait $\nu > -r_1\nu' > 0$ (par exemple, on peut prendre $r_1 = 1$ si $m = 1$ et $\Psi_1 = f$).

Remarquons aussi que l'on peut généraliser la relation (6). En effet, si $\beta \in S \setminus \{0\}$ est tel que $\beta > 0$ et $\beta' > 0$, on vérifie que :

$$f(\underline{u}^{\beta}) = f_{\beta^{-1}M}(\underline{u}) - R_\beta(\underline{u}), \tag{8}$$

où R_β est une fonction rationnelle dans $\mathbb{Q}(\underline{u})$ (si $\beta = \eta$, on retrouve la fonction R_η que nous avons déjà introduit) ; comme pour R_η, le support de R_β satisfait à la propriété suivante.

Propriété (*). *Il existe deux nombres réels $r_2, r_3 > 0$ dépendant de β, tels que si $\nu \in \Sigma(R_\beta)$, alors $\nu > -r_2\nu' > r_3\nu > 0$.*

(i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons par l'absurde que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\nu \in \Sigma(Q)$ tel que $\epsilon > -\nu' > 0$. Comme d'autre part Q est rationnelle, il existe un polynôme non nul P tel que $PQ = R$ est un polynôme. Ainsi, il existe deux ensembles finis $G_1, G_2 \subset M^*$ tels que :

$$\left(\sum_{\gamma\in G_1} p_\gamma e(\gamma z + \gamma' z')\right) Q\big(\Phi(z,z')\big) = \sum_{\gamma\in G_2} r_\gamma e(\gamma z + \gamma' z'), \quad p_\gamma, r_\gamma \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Posons $\gamma_0 = (\max_{\gamma\in G_1}\gamma')'$. L'hypothèse par l'absurde implique que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\nu_\epsilon \in \Sigma_{\gamma_0} := \Sigma(e(\gamma_0 z + \gamma_0' z')Q(\Phi(z,z')))$ tel que $\gamma_0' - \epsilon < \nu_\epsilon' < \gamma_0'$. De plus, si ϵ est assez petit, $\nu_\epsilon \notin \bigcup_{\gamma\in G_1\setminus\{\gamma_0\}} \Sigma_\gamma$. Donc il existe $C > 0$ tel que $\nu_{1/n} \in \Sigma(G_2)$ pour tout $n \geqslant C$, ce qui implique que G_2 est infini, d'où une contradiction.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Posons $\underline{\zeta}_i = \Phi(\alpha_i/\beta_i, \alpha_i'/\beta_i')$. D'après (8) on a $Q(\underline{u}) = \sum_{i=1}^m c_i f((\underline{\zeta}_i \underline{u})^{\beta_i}) = X(\underline{u}) - Y(\underline{u})$, où $X(\underline{u}) = \sum_{i=1}^m c_i f_{\beta_i^{-1}M}(\underline{\zeta}_i \underline{u})$, $Y(\underline{u}) = \sum_{i=1}^m c_i R_{\beta_i}(\underline{\zeta}_i \underline{u})$. La propriété (*) implique qu'il existe deux nombres réels $r_4, r_5 > 0$ tels que pour tout $\nu \in \Sigma(Y)$ on ait $\nu > -r_4\nu' > r_5\nu > 0$; donc $\lim_{k\to-\infty} Y(\underline{u}^{\eta^k}) = 0$. L'équation fonctionnelle (6) implique alors que $Z(\underline{u}) := \lim_{k\to-\infty} Q(\underline{u}^{\eta^k}) = \lim_{k\to-\infty} X(\underline{u}^{\eta^k})$ satisfait à $Z(\underline{u}^\eta) = Z(\underline{u})$, donc l'application $(x,y) \mapsto (\eta x, \eta' y)$ définit une bijection de $\Sigma(Z)$.

L'hypothèse (iii) implique, par passage à la limite $k \to -\infty$, que $\Sigma(Z) = \emptyset$. donc $\lim_{k\to-\infty} Q(\underline{u}^{\eta^k}) = 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). On a

$$\lim_{k\to-\infty} f(\underline{u}^{\eta^k}) = \sum_{\substack{\nu\in M^*\\ \nu>0,\ \nu'<0}} e(\nu z + \nu' z') = G_M(\underline{u}).$$

Ainsi, si (iii) est vérifié, alors $G_1, \ldots, G_m$ sont $\mathbb{C}$-linéairement dépendantes. Or, une relation de dépendance linéaire sur $\mathbb{C}$ entre ces fonctions est en fait toujours une relation de dépendance linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$; on voit que c'est même toujours une relation de $\mathbb{Q}$-dépendance linéaire.

(iv) $\Rightarrow$ (i). En raisonnant sur les supports et sur les séries de Fourier, on voit que si $G_1, \ldots, G_m$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement dépendantes, alors les fonctions $f_{\beta_i^{-1}M}(\underline{\zeta}_i \underline{u})$ sont aussi $\mathbb{Q}$-linéairement dépendantes ($i = 1, \ldots, m$). D'après (8), $\sum_{i=1}^m c_i \Psi_i(\underline{u}) = \sum_{j=1}^m c_j R_{\beta_j}(\underline{\zeta}_j \underline{u})$ et (1) est vérifié, ce qui complète la démonstration du Lemme 2.4 et donc celle du Théorème 1.1 (étape (5)). Pour une démonstration complète de notre théorème, voir [6]. $\square$

Références

[1] E. Hecke, Analytische Funktionen und algebraische Zahlen. Erster Teil, Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. 1 (1921) 102–126.

[2] K.K. Kubota, On the algebraic independence of holomorphic solutions of certain functional equations and their values, Math. Ann. 227 (1977) 9–50.

[3] J.H. Loxton, A.J. van der Poorten, Arithmetic properties of certain functions in several variables II, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 24 (1977) 393–408.

[4] D.W. Masser, A vanishing theorem for power series, Invent. Math. 67 (1982) 275–296.

[5] D.W. Masser, Algebraic independence properties of the Hecke–Mahler series, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 50 (1999) 207–230.

[6] F. Pellarin, On the arithmetic properties of complex values of Hecke–Mahler series, prépublication, hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00002262.