Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 671–676

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Partial Differential Equations

Inverse spectral problem for singular AKNS and Schrödinger operators on [0, 1]

Frédéric Serier

Laboratoire de mathématiques Jean-Leray, UMR CNRS-université de Nantes, faculté des sciences et techniques, 2, rue de la Houssinière, BP 92208, 44322 Nantes cedex 03, France

Received 11 March 2005; accepted 20 March 2005

Presented by Jean-Michel Bony

Abstract

We consider an inverse spectral problem for singular Sturm–Liouville equations on the unit interval with explicit singularity $a(a+1)/x^2$, $a \in \mathbb{N}$. This problem arises by splitting of the Schrödinger operator with radial potential acting on the unit ball of $\mathbb{R}^3$. Our goal is the global parametrization of potentials by spectral data noted by λ^a, and some norming constants noted by κ^a. For $a = 0$ and 1, $\lambda^a \times \kappa^a$ was already known to be a global coordinate system on $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. We extend this to any non-negative integer a. Similar result is obtained for singular AKNS operator. ***To cite this article: F. Serier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Résumé

Problème spectral inverse pour des opérateurs AKNS et Schrödinger singuliers sur [0, 1]. Nous considérons un problème spectral inverse pour des équations de Sturm–Liouville sur l'intervalle unité avec une singularité explicite $a(a+1)/x^2$, $a \in \mathbb{N}$. Un tel problème survient après décomposition de l'opérateur de Schrödinger à potentiel radial agissant sur la boule unité de $\mathbb{R}^3$. Notre but est la paramétrisation globale des potentiels par des données spectrales, notées λ^a et des constantes de normalisation, notées κ^a. Pour $a = 0$ et 1, il est déjà connu que $\lambda^a \times \kappa^a$ forme un système de coordonnées globales sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. Nous étendons cela à tout entier positif a. Un résultat similaire est obtenu pour un opérateur de type AKNS singulier. ***Pour citer cet article : F. Serier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

E-mail address: frederic.serier@math.univ-nantes.fr (F. Serier).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.03.025

Version française abrégée

Nous considérons une famille H_a, $a \in \mathbb{N}$ d'opérateurs singuliers formulés en (1) avec conditions de Dirichlet. Ils proviennent de la décomposition de l'opérateur de Schrödinger radial $\mathrm{H} := -\Delta + q$ agissant sur la boule unité de $\mathbb{R}^3$ (cf. [11], p. 160–161). Pour chaque opérateur H_a, nous montrons que le spectre de Dirichlet noté λ^a, complété par une suite de constantes de normalisation, notée κ^a, forment un système de coordonnées globales $\lambda^a \times \kappa^a$ sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ (cf. Theorem 2.1).

Les résultats de Guillot et Ralston [8] pour $a = 1$ (transposant au cas singulier ceux de Pöschel et Trubowitz [10] pour $a = 0$) étendus à tout entier naturel a par Carlson dans [4] et [3], montrent l'existence d'une suite de valeurs propres $\{\lambda_{a,n}(q)\}_{n\geqslant 1}$ pour le problème de Dirichlet associé à H_a. Réelles, simples, réelles-analytiques par rapport à q dans $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, celles-ci se comportent asymptotiquement suivant (4) et leurs gradients $\nabla_q \lambda_{a,n}$ vérifient (5). Par ailleurs ces estimations sont valables uniformément sur les bornés de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. Les constantes de normalisation définies en (6) possèdent le même genre de propriétés et d'asymptotiques (cf. (7) et (8)). Ceci nous amène à l'étude de l'application réelle-analytique $\lambda^a \times \kappa^a$ agissant de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ dans $\mathbb{R} \times \ell^2_{\mathbb{R}} \times \ell^2_{\mathbb{R}}$ définie en (9).

Il est déjà connu que les applications $\lambda^0 \times \kappa^0$ (cf. [10]) et $\lambda^1 \times \kappa^1$ (cf. [8]) forment des systèmes de coordonnées globales sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. Pour des singularités plus importantes, en fait pour tout réel $a \geqslant -1/2$, l'injectivité de l'application $\lambda^a \times \kappa^a$ est obtenue par Carlson dans [4] (voir aussi Zhornitskaya et Serov [14]). Afin d'obtenir le résultat annoncé, nous devons montrer que pour tout entier naturel a, l'application $\lambda^a \times \kappa^a$ est un difféomorphisme local sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. En d'autres termes, l'essentiel du travail est de prouver qu'en tout point q de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, sa différentielle, notée $d_q(\lambda^a \times \kappa^a)$, réalise un isomorphisme entre $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ et $\mathbb{R} \times \ell^2_{\mathbb{R}} \times \ell^2_{\mathbb{R}}$.

Nous utilisons une méthode classique adaptée de Pöschel et Trubowitz [10]. La différentielle $d_q(\lambda^a \times \kappa^a)$ s'exprime à l'aide des gradients (18) et la famille de ces gradients s'avère libre. Il est alors naturel de vouloir appliquer le résultat usuel suivant (cf. Lemma 4.3) : *« une famille libre quadratiquement proche d'une base orthogonale dans un espace de Hilbert est une base »*. La singularité explicite de l'Éq. (1) engendre dans les asymptotiques (5) et (7) une famille de fonctions de type Bessel proche des gradients. Nous devrions montrer que celle-ci constitue une base hilbertienne de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)\ldots$ chose ardue.

Pour éviter cela, nous utilisons une technique d'opérateurs de transformation développée par Guillot et Ralston dans [8] puis étendue par Rundell et Sacks dans [12]. Notons tout d'abord Φ_a et Ψ_a les termes dominants dans les estimations des gradients (cf. Lemma 4.1). La singularité est réduite par étape : au Lemme 4.1, nous construisons un opérateur qui envoie Φ_a, Ψ_a sur Φ_{a-1}, Ψ_{a-1} (comme Guillot et Ralston [8] pour $a = 1$) ; puis, au Théorème 4.2, nous composons ces opérateurs pour nous ramener aux fonctions trigonométriques Φ_0, Ψ_0. Ces opérateurs permettent la factorisation de la différentielle qui s'exprime ainsi à l'aide d'une famille libre de vecteurs (20) proche d'une base trigonométrique de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. Le Lemme 4.3 donne le résultat.

Un problème inverse similaire est considéré pour une famille d'opérateurs singuliers de type AKNS définis en (2) : nous montrons qu'une application du type $\lambda^a \times \kappa^a$ définit sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ un système de coordonnées locales (cf. Theorem 3.1).

Nous obtenons (pour les détails voir [13]) l'existence d'une suite de valeurs propres $\{\lambda_{a,n}(p,q)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ et définissons une suite de constantes de normalisation $\{\kappa_{a,n}(p,q)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ par (12). Des propriétés similaires au cas précédent apparaissent (simplicité du spectre, régularité par rapport aux potentiels (p,q)). En revanche les estimations sur $\lambda_{a,n}(p,q)$, $\kappa_{a,n}(p,q)$ (cf. Éqs. (10), (13)) et leurs gradients (cf. Éqs. (11), (14)) ne sont plus valables que localement uniformément sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. En effet, contrairement à l'équation de Schrödinger, il n'y a pas de décroissance explicite pour $|\lambda|$ grand (comparer par exemple les restes des estimations (5) et (11)). D'ailleurs, ceci rend techniquement les estimations difficiles à obtenir.

Les outils de la preuve du Théorème 3.1 sont essentiellement les mêmes que pour Schrödinger : nous construisons l'application $\lambda^a \times \kappa^a$. Sa différentielle s'exprime aussi à l'aide des gradients (11) et (14). Nous définissons des opérateurs similaires à ceux du Théorème 4.2. Nous nous ramenons ainsi à une famille de fonctions trigonométriques de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ à laquelle nous appliquons le Lemme 4.3.

1. Introduction

The inverse spectral problem for Schrödinger operator with radial potential $\mathrm{H} := -\Delta + q(\|X\|)$ acting on the unit ball of $\mathbb{R}^3$ leads by separation of variables (see [11], pp. 160–161) to consider a collection of differential operators H_a, $a \in \mathbb{N}$, acting on $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, defined by

$$\mathrm{H}_a y(x) := \left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{a(a+1)}{x^2} + q(x)\right) y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,1],\ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

with Dirichlet boundary conditions $(y(0) = y(1) = 0)$.

Such splitting also occurs for the radial Dirac equation, but for inverse spectral problems, it is more convenient to consider singular AKNS operator acting on $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ whose shape is

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \begin{bmatrix} 0 & -a/x \\ -a/x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -q(x) & p(x) \\ p(x) & q(x) \end{bmatrix}\right) Y(x) = \lambda Y(x), \quad x \in (0,1],\ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

where $Y = (Y_1, Y_2)$ and boundary conditions are $Y_2(0) = Y_2(1) = 0$.

Our aim is to give a standard local coordinate system on the space of potentials with spectral data and norming constants or so-called 'terminal velocities', for every $a \in \mathbb{N}$. This result is new when $a \geqslant 2$ for singular Schrödinger operator and it happens to be global, and new when $a \geqslant 1$ for singular AKNS.

In order not to make much repetitions, we will emphasize the singular Schrödinger equation (1) and just indicate results for the singular AKNS equation (2).

2. The Schrödinger case

We recall results from [4,3,8,10,12] and introduce some notations used throughout the paper. Problem (1) has a sequence of eigenvalues $\{\lambda_{a,n}(q)\}_{n\geqslant 1}$, which are all real and simple. Let $g_{a,n}(\cdot, q)$ be their associated eigenfunctions and J_ν be the Bessel function of first kind of order ν, we define j_a, resp. η_a, analytic functions on $\mathbb{C}$, resp. $\mathbb{C}^*$, by

$$j_a(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} J_{a+1/2}(z), \qquad \eta_a(z) = (-1)^a \sqrt{\frac{\pi z}{2}} J_{-a-1/2}(z). \tag{3}$$

Each $q \mapsto \lambda_{a,n}(q)$ is a real-analytic map on $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. Eigenvalues and related gradients satisfy, uniformly on bounded sets of $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, the estimates

$$\lambda_{a,n}(q) = \left(n + \frac{a}{2}\right)^2 \pi^2 + [q] - a(a+1) + \tilde{\lambda}_{a,n}(q), \qquad \left(\tilde{\lambda}_{a,n}(q)\right)_{n\geqslant 1} \in \ell^2_{\mathbb{R}}, \tag{4}$$

$$\nabla_q \lambda_{a,n}(t) = 2 j_a(\omega_{a,n} t)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \omega_{a,n}(q) = \sqrt{\lambda_{a,n}(q)}, \tag{5}$$

where $[q] = \int_0^1 q(t)\,\mathrm{d}t$. The "terminal velocities" are defined by

$$\kappa_{a,n}(q) = \ln\left|\frac{g_{a,n}{}'(1,q)}{g_{a,n}{}'(1,0)}\right|, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1. \tag{6}$$

Following [10] with [8,4,3] we show that each map $q \mapsto \kappa_{a,n}(q)$ is real-analytic on $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. On bounded subsets of $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, $\nabla_q \kappa_{a,n}$ and $\kappa_{a,n}$ behave like

$$\nabla_q \kappa_{a,n}(t) = \frac{1}{\omega_{a,n}} j_a(\omega_{a,n} t) \eta_a(\omega_{a,n} t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{7}$$

$$\kappa_{a,n}(q) = \ell^2_1(n), \quad \left(\left[\forall n \geqslant 1, u_n = \ell^2_1(n)\right] \Longleftrightarrow \left[(n u_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^2_{\mathbb{R}}\right]\right). \tag{8}$$

We define coordinates λ^a and κ^a by

$$\lambda^a(q) = \big([q], \{\tilde{\lambda}_{a,n}(q)\}_{n\geqslant 1}\big), \qquad \kappa^a(q) = \{n\kappa_{a,n}(q)\}_{n\geqslant 1}. \tag{9}$$

Borg [2] and Levinson [9] proved that $\lambda^0 \times \kappa^0$ is one-to-one on $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. Pöschel and Trubowitz [10] improve this result obtaining $\lambda^0 \times \kappa^0$ as a global real-analytic coordinate system on $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. Guillot and Ralston [8] extended these results to $\lambda^1 \times \kappa^1$. Next Carlson [4] (see also Zhornitskaya and Serov [14]) proved that for all *real* $a \geqslant -1/2$, $\lambda^a \times \kappa^a$ is one-to-one on $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. We complete his work, for any integer a, with the realization of $\lambda^a \times \kappa^a$ as a local real-analytic coordinate system on $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. (Its Fréchet derivative $d_q(\lambda^a \times \kappa^a)$ is an isomorphism from $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ onto $\mathbb{R} \times \ell^2_{\mathbb{R}} \times \ell^2_{\mathbb{R}}$.) Adding these last results, we obtain:

Theorem 2.1. *For all $a \in \mathbb{N}$, the map $\lambda^a \times \kappa^a$ is a real-analytic global coordinate system on $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$.*

Moreover, according to the spectrum characterization by Carlson [3], λ^a maps $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ onto $\mathbb{R} \times \ell^2_{\mathbb{R}}$.

3. The AKNS case

This study is made by the author and details can be found in a forthcoming publication [13]. Necessary background, main structures and explicit formulas for $a = 0$ can be found in [6]. For radial Dirac operators, construction of solutions, regularities and so on could be found in [1].

Using Picard's iteration method, we construct a basis for the solutions of the singular AKNS problem (2). Regularity, formulas for gradients and simplicity of eigenvalues are obtained for $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ potentials. A tough part is to recover asymptotics for eigenvalues, eigenfunctions and gradients. First we obtain them for $H^1_{\mathbb{R}}(0,1)$ potentials, then, with a local argument, we reach $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ potentials (see [6] in the regular case). In other words we show that problem (2) has a sequence of eigenvalues $\{\lambda_{a,n}(p,q)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, which are all real and simple. Each map $(p,q) \mapsto \lambda_{a,n}(p,q)$ is real-analytic on $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. Asymptotics for eigenvalues and related gradients, locally uniformly on $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, are

$$\lambda_{a,n}(p,q) = \left(n + \operatorname{sgn}(n)\frac{a}{2}\right)\pi + \tilde{\lambda}_{a,n}(p,q), \quad |n| \to +\infty, \qquad \big(\tilde{\lambda}_{a,n}(p,q)\big)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2_{\mathbb{R}}, \tag{10}$$

$$\nabla_{(p,q)}\lambda_{a,n}(t) = \begin{bmatrix} -2j_{a-1}(\lambda_{a,n}t)j_a(\lambda_{a,n}t) \\ j_a(\lambda_{a,n}t)^2 - j_{a-1}(\lambda_{a,n}t)^2 \end{bmatrix} + \ell^2(n), \tag{11}$$

where sgn is the signum function. Local uniformity means that for all $(p_0,q_0) \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, there exists $\varepsilon > 0$ such that inequality hold uniformly on the ball $\|(p,q)-(p_0,q_0)\|_{L^2_{\mathbb{R}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)} < \varepsilon$. Loss of uniformity is characteristic for AKNS and it is effective (see [7]).

Now following [6], define complementary information by

$$\kappa_{a,n}(p,q) = Y\big(1, \lambda_{a,n}(p,q), p, q\big) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

We show that for all $n \in \mathbb{Z}$, the map $(p,q) \mapsto \kappa_{a,n}(p,q)$ is real-analytic on $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, and that asymptotics for $\kappa_{a,n}$ and $\nabla_{(p,q)}\kappa_{a,n}$ are, locally uniformly on $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$,

$$\kappa_{a,n}(p,q) = \frac{(-1)^n}{|n\pi|^a}\big(1 + \tilde{\kappa}_{a,n}(p,q)\big), \qquad \big(\tilde{\kappa}_{a,n}(p,q)\big)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2_{\mathbb{R}}, \tag{13}$$

$$\nabla_{(p,q)}\tilde{\kappa}_{a,n}(t) = \begin{bmatrix} -\eta_{a-1}(\lambda_{a,n}t)j_a(\lambda_{a,n}t) - \eta_a(\lambda_{a,n}t)j_{a-1}(\lambda_{a,n}t) \\ -\eta_{a-1}(\lambda_{a,n}t)j_{a-1}(\lambda_{a,n}t) + \eta_a(\lambda_{a,n}t)j_a(\lambda_{a,n}t) \end{bmatrix} + \ell^2(n). \tag{14}$$

As before, we define the coordinate λ^a and κ^a by

$$\lambda^a(p,q)=\left\{\tilde{\lambda}_{a,n}(p,q)\right\}_{n\in\mathbb{Z}},\qquad \kappa^a(p,q)=\left\{\tilde{\kappa}_{a,n}(p,q)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}. \tag{15}$$

Grébert and Guillot [6] show that $\lambda^0\times\kappa^0$ is a local coordinate system for $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. Moreover, they show that its restriction is a global coordinate system on $H^j_{\mathbb{R}}(0,1)\times H^j_{\mathbb{R}}(0,1)$, $j=1,2$.

We show the following

Theorem 3.1. *For all $a\in\mathbb{N}$, the map $\lambda^a\times\kappa^a$ is local coordinate system on $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$.*

Restricted on $H^1_{\mathbb{R}}(0,1)\times H^1_{\mathbb{R}}(0,1)$, $\lambda^a\times\kappa^a$ is one to one.

4. Ingredients of the proof

We only sketch the proof for Schrödinger operator. For singular AKNS operator see [13]. The next theorem is the key point for the study of inverse spectral problem for singular operators. Guillot and Ralston [8] first introduce such transformation which maps scalar products with the first spherical Bessel functions to scalar product with Sine or Cosine functions. Successfully used in [5], this idea was extended by Rundell and Sacks in [12] who use a stepwise method: first create an operator which reduces singularity index a to $a-1$ (that is the role of Lemma 4.1), then chain these operators to reach $a=0$ (it is the aim of Theorem 4.2). For detailed properties of these operators see [12] Lemmas 3.1 to 3.4.

Lemma 4.1. *For all integer $a\geqslant 1$, we define the linear operator $S_a: L^2_{\mathbb{C}}(0,1)\to L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ by $S_a[f](x)=f(x)-4ax^{2a-1}\int_x^1(f(t)/t^{2a})\,\mathrm{d}t$ where $f\in L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ and $x\in(0,1)$.*

(i) *S_a is a linear isomorphism between $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ and ${N_a}^{\perp}$ where $N_a=\operatorname{Span}\{t\mapsto t^{2a}\}$.*
(ii) *Let $\Phi_a(t):=j_a(t)^2$ and $\Psi_a(t):=j_a(t)\eta_a(t)$. We have*

$$\Phi_a=-S_a^*[\Phi_{a-1}],\qquad \Psi_a=-S_a^*[\Psi_{a-1}]. \tag{16}$$

Theorem 4.2. *For $a\in\mathbb{N}$, consider $T_a=(-1)^{a+1}S_aS_{a-1}\cdots S_1$, and $T_0=-\mathrm{Id}$.*

(i) *For all $q\in L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$, $\lambda\in\mathbb{C}^*$ we have the duality*

$$\left\langle 2\Phi_a(\lambda t)-1,q\right\rangle=\left\langle\cos(2\lambda t),T_a[q]\right\rangle,\qquad \left\langle\Psi_a(\lambda t),q\right\rangle=-\frac{1}{2}\left\langle\sin(2\lambda t),T_a[q]\right\rangle. \tag{17}$$

(ii) *For $a\geqslant 1$, T_a is a linear isomorphism between $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ and $(N_1\oplus\cdots\oplus N_a)^{\perp}$.*

Regarding to [8] and [10], we have

$$d_q(\lambda^a\times\kappa^a)(v)=\left(\langle 1,v\rangle,\left(\langle\nabla_q\widetilde{\lambda}_{a,n},v\rangle\right)_{n\geqslant1},\left(\langle n\nabla_q\kappa_{a,n},v\rangle\right)_{n\geqslant1}\right). \tag{18}$$

With estimates (5), (7) and Theorem 4.2 we obtain the chain $d_q(\lambda^a\times\kappa^a)=F\circ T_a$ with

$$F(w)=\left(\langle -1,w\rangle,\left\{\left\langle\cos(2\omega_{a,n}t)+R_n(t),w\right\rangle\right\}_{n\geqslant1},\left\{\left\langle\frac{-n}{2\omega_{a,n}}\left(\sin(2\omega_{a,n}t)+S_n(t)\right),w\right\rangle\right\}_{n\geqslant1}\right), \tag{19}$$

where R_n and S_n are $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$, and T_a is an isomorphism from $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ onto $(\operatorname{Span}\{t^2,t^4,\dots,t^{2a}\})^{\perp}$.

We have to prove the invertibility of F from $(\operatorname{Span}\{t^2,t^4,\dots,t^{2a}\})^{\perp}$ onto $\mathbb{R}\times\ell^2_{\mathbb{R}}\times\ell^2_{\mathbb{R}}$. For this, consider $\mathbf{F}$ the operator sending functions into their Fourier coefficients with respect to

$$\mathcal{F}=\{1\}\cup\{t^{2j}\}_{j\in[\![1,a]\!]}\cup\left\{\cos(2\omega_{a,n}t)+R_n(t)\right\}_{n\geqslant1}\cup\left\{\frac{-n}{2\omega_{a,n}}\left(\sin(2\omega_{a,n}t)+S_n(t)\right)\right\}_{n\geqslant1}. \tag{20}$$

We show the linear independence of $\mathcal{F}$ in $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ as in [8], Lemma 8. To conclude, we use the following lemma (see [10], Appendix D, Theorem 3)

Lemma 4.3. *Let $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n\geqslant 1}$ be a sequence in a Hilbert space H such that*

(i) *there exists a complete orthogonal sequence $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n\geqslant 1}$ such that $\sum \|f_n - e_n\|_H^2 < \infty$, and*
(ii) *the family $\mathcal{F}$ is linearly free in the sense of none of the f_n's is in the closed span of the others.*

Then the mapping $\mathbf{F}: x \mapsto \{(x, f_n)\}_{n\geqslant 1}$ is an invertible mapping of H onto ℓ^2.

With the complete orthogonal sequences:

– for $a = 2\mathfrak{a} + 1$ with $\mathfrak{a} \in \mathbb{N}$ (like Guillot and Ralston [8] for $a = 1$),

$$\mathcal{E} = \left\{\sqrt{2}\cos\pi t, \sqrt{2}\sin\pi t, \ldots, \sqrt{2}\cos(2n+1)\pi t, \sqrt{2}\sin(2n+1)\pi t, \ldots\right\}, \tag{21}$$

– for $a = 2\mathfrak{a}$ with $\mathfrak{a} \in \mathbb{N}$ (like Pöschel and Trubowitz [10] for $a = 0$),

$$\mathcal{E} = \left\{1, \sqrt{2}\cos 2\pi t, \sqrt{2}\sin 2\pi t, \ldots, \sqrt{2}\cos 2n\pi t, \sqrt{2}\sin 2n\pi t, \ldots\right\}. \tag{22}$$

Acknowledgements

The author would like to thank B. Grébert for numerous discussions and R. Weder for useful references.

References

[1] H. Blancarte, B. Grébert, R. Weder, High- and low-energy estimates for the Dirac equation, J. Math. Phys. 36 (3) (1995) 991–1015.
[2] G. Borg, Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe, Acta Math. 78 (1946) 1–96.
[3] R. Carlson, Inverse spectral theory for some singular Sturm–Liouville problems, J. Differential Equations 106 (1) (1993) 121–140.
[4] R. Carlson, A Borg–Levinson theorem for Bessel operators, Pacific J. Math. 177 (1) (1997) 1–26.
[5] R. Carlson, C. Shubin, Spectral rigidity for radial Schrödinger operators, J. Differential Equations 113 (2) (1994) 338–354.
[6] B. Grébert, J.-C. Guillot, Gaps of one-dimensional periodic AKNS systems, Forum Math. 5 (5) (1993) 459–504.
[7] B. Grébert, T. Kappeler, Estimates on periodic and Dirichlet eigenvalues for the Zakharov–Shabat system, Asymptotic Anal. 25 (3–4) (2001) 201–237.
[8] J.-C. Guillot, J.V. Ralston, Inverse spectral theory for a singular Sturm–Liouville operator on [0, 1], J. Differential Equations 76 (2) (1988) 353–373.
[9] N. Levinson, The inverse Sturm–Liouville problem, Mat. Tidsskr. B. 1949 (1949) 25–30.
[10] J. Pöschel, E. Trubowitz, Inverse Spectral Theory, Academic Press, Boston, 1987.
[11] M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics II, Academic Press, New York, 1975.
[12] W. Rundell, P.E. Sacks, Reconstruction of a radially symmetric potential from two spectral sequences, J. Math. Anal. Appl. 264 (2) (2001) 354–381.
[13] F. Serier, Inverse Spectral Problem for Singular AKNS Operator with a Radial Potential, in preparation.
[14] L.A. Zhornitskaya, V.S. Serov, Inverse eigenvalue problems for a singular Sturm–Liouville operator on [0, 1], Inverse Problems 10 (4) (1994) 975–987.