Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 507–512

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie algébrique

Géométrie diophantienne et variétés toriques

Patrice Philippon [a], Martín Sombra [b,1]

[a] Institut de mathématiques de Jussieu, UMR 7586 du CNRS, case 7012, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

[b] Universitat de Barcelona, Departament d'Àlgebra i Geometria, Gran Vía 585, 08007 Barcelona, Espagne

Reçu le 12 janvier 2005 ; accepté le 16 février 2005

Disponible sur Internet le 23 mars 2005

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Nous présentons quelques résultats sur les variétés toriques projectives, pertinents en géométrie diophantienne. Nous interprètons et étudions plusieurs invariants arithmétiques attachés à ces variétés en termes géométriques et combinatoires. Nous donnons également un théorème de Bézout pour les poids de Chow des variétés projectives et une application au théorème des minimums algébriques successifs. Ces résultats sont extraits des deux textes de Philippon et Sombra indiqués dans les références à la fin de cette Note (tous deux téléchargeables de http://fr.arxiv.org). ***Pour citer cet article : P. Philippon, M. Sombra, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

Diophantine geometry and toric varieties. We present some results on projective toric varieties which are relevant in diophantine geometry. We interpret and study several invariants attached to these varieties by geometrical and combinatorial terms. We also give a Bézout theorem for Chow weights of projective varieties and an application to the theorem of successive algebraic minima. These results are extracted from the two texts of Philippon and Sombra mentioned in the references at the end of this Note (both downloadable from http://fr.arxiv.org). ***To cite this article: P. Philippon, M. Sombra, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abridged English version

For $n, N \in \mathbf{N}^{\times}$ let $\mathcal{A} = (a_0, \ldots, a_N) \in (\mathbf{Z}^n)^{N+1}$ be a sequence of $N+1$ vectors in $\mathbf{Z}^n$ and consider the diagonal action of the torus $\mathbf{T}^n := (\overline{\mathbf{Q}}^{\times})^n$ on the projective space $\mathbf{P}^N := \mathbf{P}^N(\overline{\mathbf{Q}})$

$$*_{\mathcal{A}} : \mathbf{T}^n \times \mathbf{P}^N \to \mathbf{P}^N, \qquad (s, x) \mapsto (s^{a_0} x_0 : \cdots : s^{a_N} x_N).$$

Adresses e-mail : pph@math.jussieu.fr (P. Philippon), sombra@ub.edu (M. Sombra).

[1] Financé par le programme Ramón y Cajal du Ministère Espagnol de la Recherche.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.02.018

The Zariski closure of the orbit of a point $\alpha = (\alpha_0 : \cdots : \alpha_N) \in \mathbf{P}^N$ is denoted $X_{\mathcal{A},\alpha} := \overline{\mathbf{T}^n *_{\mathcal{A}} \alpha} \subset \mathbf{P}^N$ and, following [2], we call it the *projective toric variety* associated to $(\mathcal{A}, \alpha)$. This is a subvariety of $\mathbf{P}^N$ stable under the action of $\mathbf{T}^n$, with a dense orbit $X^\circ_{\mathcal{A},\alpha} := \mathbf{T}^n *_{\mathcal{A}} \alpha$. By restricting the ambient projective space, we can assume that the point α belongs to the Zariski open subset $(\mathbf{P}^N)^\circ := \{(x_0 : \cdots : x_N) : x_0 \cdots x_N \neq 0\}$. In this case the dense orbit $X^\circ_{\mathcal{A},\alpha}$ is actually a translate of a subtorus of $\mathbf{T}^N$, identified to $(\mathbf{P}^N)^\circ$. Without loss of generality we also assume throughout this note that the $\mathbf{Z}$-module $L_{\mathcal{A}}$, generated by the differences of the vectors a_i, is equal to $\mathbf{Z}^n$. Under these assumptions the dimension of $X_{\mathcal{A},\alpha}$ is equal to n.

One can attach several notions of height to a projective variety $X \subset \mathbf{P}^N$. Normalizing with respect to the action of the torus we select the so-called *normalized height*, defined by

$$\hat{h}(X) := \deg(X) \cdot \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \frac{h([k]X)}{\deg([k]X)},$$

where $[k]$ denotes the k-th power morphism $(x_0 : \cdots : x_N) \mapsto (x_0^k : \cdots : x_N^k)$ and h any height on the subvarieties of $\mathbf{P}^N$ (the resulting limit is independent of the actual choice of this height, see [5, § I.2]).

It is well known that, under our hypotheses, the degree of the projective toric variety $X_{\mathcal{A},\alpha}$ is equal to $n!$ times the volume of the convex hull $Q_{\mathcal{A}} \subset \mathbf{R}^n$ of the points $a_0, \ldots, a_N$, with respect to the usual Lebesgue measure. We obtain an arithmetic analogue of this classical result, expressing the local contributions to the normalized height in a similar way.

Let K be a number field; we denote by M_K the set of absolute values on K extending the p-adic and archimedean absolute values of $\mathbf{Q}$ satisfying $|p|_p = p^{-1}$ and $|2|_\infty = 2$. For $v \in M_K$ we denote K_v (resp. $\mathbf{Q}_v$) the completion of K (resp. $\mathbf{Q}$) with respect to v. Now, for $\alpha \in (K^\times)^{N+1}$ and $v \in M_K$ we consider the polytope $Q_{\mathcal{A},\tau_{\alpha\,v}}$, convex hull in $\mathbf{R}^{n+1}$ of the points $(a_0, \log|\alpha_0|_v), \ldots, (a_N, \log|\alpha_N|_v)$, and we denote by $\vartheta_{\mathcal{A},\tau_{\alpha\,v}} : Q_{\mathcal{A}} \to \mathbf{R}$ the parametrisation of its upper envelope over $Q_{\mathcal{A}}$. Here $\tau_{\alpha\,v} \in \mathbf{R}^{N+1}$ stands for the vector $(\log|\alpha_0|_v, \ldots, \log|\alpha_N|_v)$. We can now state:

Theorem 0.1. *Let $\mathcal{A} \in (\mathbf{Z}^n)^{N+1}$ be such that $L_{\mathcal{A}} = \mathbf{Z}^n$ and $\alpha \in (K^\times)^{N+1}$. With the above notation*

$$\hat{h}(X_{\mathcal{A},\alpha}) = (n+1)! \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbf{Q}_v]}{[K : \mathbf{Q}]} \int_{Q_{\mathcal{A}}} \vartheta_{\mathcal{A},\tau_{\alpha\,v}}(x)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

The proof requires a sharp normalized arithmetic Hilbert–Samuel theorem and is closely connected to the Chow weights introduced by Mumford in his work [4] on the stability of projective varieties. Furthermore, Theorem 0.1 has a multiprojective generalization that we present below. We also give a Bézout type theorem for the Chow weight of general projective varieties, which in particular implies an exact arithmetic Bézout theorem for intersections of toric varieties with monomial divisors.

1. Poids de Chow des variétés toriques

Soit $\mathbf{K}$ un corps commutatif, $X \subset \mathbf{P}^N(\mathbf{K})$ une sous-variété de dimension n et $\tau = (\tau_0, \ldots, \tau_N) \in \mathbf{R}^{N+1}$ un *vecteur poids*. Considérons la forme de Chow $Ch_X \in \mathbf{K}[U_0, \ldots, U_n]$ de X et une variable additionnelle t ; si l'on écrit formellement

$$Ch_X(t^{\tau_j}\, U_{ij} \colon 0 \leqslant i \leqslant n,\ 0 \leqslant j \leqslant N) = t^{e_0}\, F_0 + \cdots + t^{e_M}\, F_M$$

avec $F_0, \ldots, F_M \in \mathbf{K}[U_0, \ldots, U_n] \setminus \{0\}$ et $e_0 > \cdots > e_M$, le *τ-poids de Chow de X* est défini par $e_\tau(X) := e_0$. Cette notion est introduite dans [4, p. 61], (avec des exposants entiers) dans le contexte de la théorie géométrique des invariants et en relation avec l'étude de la stabilité des variétés projectives.

Pour un vecteur $\mathcal{A} = (a_0, \ldots, a_N) \in (\mathbf{Z}^n)^{N+1}$ et un poids $\tau \in \mathbf{R}^{N+1}$ on considère le polytope $Q_{\mathcal{A},\tau} := \mathrm{Conv}((a_0, \tau_0), \ldots, (a_N, \tau_N)) \subset \mathbf{R}^{n+1}$, dont l'enveloppe supérieure s'envoie bijectivement sur $Q_{\mathcal{A}}$ par la projection standard $\mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$. Soit alors

$$\vartheta_{\mathcal{A},\tau} : Q_{\mathcal{A}} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \max\{y \in \mathbf{R}\colon (x, y) \in Q_{\mathcal{A},\tau}\},$$

la paramétrisation de cette enveloppe supérieure au-dessus de $Q_{\mathcal{A}}$. C'est une fonction *concave* et *affine par morceaux*, donc en particulier Riemann intégrable sur tout polytope.

Proposition 1.1. *Soient $\mathcal{A} \in (\mathbf{Z}^n)^{N+1}$ tel que $L_{\mathcal{A}} = \mathbf{Z}^n$ et $\tau \in \mathbf{R}^{N+1}$. Alors*

$$e_\tau(X_{\mathcal{A}}) = (n+1)! \int\limits_{Q_{\mathcal{A}}} \vartheta_{\mathcal{A},\tau}(x)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Joint au Théorème 0.1 (dans la version anglaise ci-dessus) cela fournit une interprétation géométrique, en termes de déformations toriques, des contributions locales à la hauteur normalisée d'une variété torique.

2. Théorème de Hilbert–Samuel normalisé

La démonstration du Théorème 0.1 suit une démarche indirecte : au lieu d'utiliser la définition de la hauteur normalisée, on s'appuie sur le calcul d'une fonction de Hilbert arithmétique appropriée. L'un des principaux obstacles à surmonter est de trouver une fonction de type Hilbert dont l'expression asymptotique soit liée à la hauteur normalisée ; les différentes variantes étudiées jusqu'à présent sont liées à la hauteur projective, *voir* par exemple [3,7].

Soit $X \subset \mathbf{P}^N$ une variété définie sur le corps de nombres K, de dimension n, et $I(X) \subset K[x_0, \ldots, x_N]$ son idéal homogène de définition. Nous utilisons la fonction de Hilbert arithmétique $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}(X; \cdot)$ associant à un entier D donné, la *hauteur de Schmidt* du K-espace linéaire $I(X)_D$ des formes de degré D de $I(X)$ dans l'espace des formes de degré D de $K[x_0, \ldots, x_N]$, identifié à $K^{\binom{D+N}{N}}$ *via* la base des monômes [5, Définition II.1]. Se pose alors la question du comportement asymptotique de cette fonction, à laquelle nous apportons une réponse pour le cas des variétés toriques :

Proposition 2.1. *Soient $\mathcal{A} \in (\mathbf{Z}^n)^{N+1}$ tel que $L_{\mathcal{A}} = \mathbf{Z}^n$ et $\alpha \in (\mathbf{P}^N)^\circ$. Avec les notations introduites on a*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}(X_{\mathcal{A},\alpha}; D) = \frac{\hat{h}(X_{\mathcal{A},\alpha})}{(n+1)!} D^{n+1} + \mathrm{O}(D^n)$$

lorsque D tend vers l'infini.

Nous faisons remarquer la nature géométrique de cette formule, qui se reflète en particulier dans le comportement en $\mathrm{O}(D^n)$ du terme d'approximation, à opposer au comportement habituel en $\mathrm{o}(D^{n+1})$ dans les théorèmes de Hilbert–Samuel arithmétiques.

3. Multihauteurs normalisées

À l'instar des multidegrés, les multihauteurs du tore $\mathbf{T}^n$ plongé dans un produit d'espaces projectifs *via* plusieurs applications monomiales peuvent aussi s'expliciter à l'aide *d'intégrales mixtes* (ou *multi-intégrales*) des fonctions concaves apparaissant dans le Théorème 0.1, *voir* la Définition 3.1 ci-dessous.

Soit $Z \subset \mathbf{P}^{N_0} \times \cdots \times \mathbf{P}^{N_m}$ une sous-variété de dimension n, on dispose d'une notion de *multihauteur projective de Z d'indice c* pour chaque $c = (c_0, \ldots, c_m) \in \mathbf{N}^{m+1}$ satisfaisant $0 \leqslant c_i \leqslant N_i$ et $c_0 + \cdots + c_m = n + 1$. On renvoie à [8] ou encore [5, § I.2], pour la définition précise.

Notons $s:\mathbf{P}^{N_0}\times\cdots\times\mathbf{P}^{N_m}\to\mathbf{P}^{(N_0+1)\cdots(N_m+1)-1}$ le plongement de Segre, on montre (*voir* [5, Proposition I.2]) que la suite

$$k\mapsto \deg\bigl(s(Z)\bigr)\cdot\frac{h_c([k]Z)}{k\deg([k]s(Z))}$$

converge vers une limite $\geqslant 0$ lorsque k tend vers l'infini, et définit la *multihauteur normalisée de Z d'indice c*, notée $\hat{h}_c(Z)$.

Soient $f:Q\to\mathbf{R}$ et $g:R\to\mathbf{R}$ des fonctions concaves définies sur des ensembles convexes $Q,R\subset\mathbf{R}^n$ respectivement. On pose

$$f\boxplus g:Q+R\to\mathbf{R},\qquad x\mapsto\max\bigl\{f(y)+g(z):\ y\in Q,\ z\in R,\ y+z=x\bigr\},$$

qui est une fonction concave définie sur la somme de Minkowski $Q+R$; on obtient ainsi une structure de semi-groupe commutatif sur l'ensemble des fonctions concaves (définies sur des convexes).

Définition 3.1. Pour une famille de n fonctions concaves $f_0:Q_0\to\mathbf{R},\dots,f_n:Q_n\to\mathbf{R}$ définies sur des ensembles $Q_i\subset\mathbf{R}^n$ convexes et compacts, l'*intégrale mixte* (ou *multi-intégrale*) est définie *via* la formule

$$\mathrm{MI}(f_0,\dots,f_n):=\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\sum_{0\leqslant i_0<\cdots<i_j\leqslant n}\int_{Q_{i_0}+\cdots+Q_{i_j}} f_{i_0}\boxplus\cdots\boxplus f_{i_j}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

Cette notion est analogue à celle de volume mixte, c'est de plus une fonctionnelle positive, symétrique et linéaire en chaque variable f_i, voir [5, § IV.3].

Soit $\mathcal{A}_0\in(\mathbf{Z}^n)^{N_0+1},\dots,\mathcal{A}_m\in(\mathbf{Z}^n)^{N_m+1}$ tels que $L_{\mathcal{A}_0}+\cdots+L_{\mathcal{A}_m}=\mathbf{Z}^n$ et $\underline{\mathcal{A}}:=(\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_m)$. Soit aussi K un corps de nombres, $\alpha_0\in(K^\times)^{N_0+1},\dots,\alpha_m\in(K^\times)^{N_m+1}$ et posons $\underline{\alpha}:=(\alpha_0,\dots,\alpha_m)$. Considérons alors l'action monomiale $*_{\underline{\mathcal{A}}}$ de $\mathbf{T}^n$ sur le produit d'espaces projectifs $\mathbf{P}^{N_0}\times\cdots\times\mathbf{P}^{N_m}$ associée, on note $X_{\underline{\mathcal{A}},\underline{\alpha}}$ l'adhérence de Zariski de l'orbite du point $\underline{\alpha}\in\mathbf{P}^{N_0}\times\cdots\times\mathbf{P}^{N_m}$.

Pour chaque $v\in M_K$ on note aussi $\vartheta_{\mathcal{A}_i,\tau_{\alpha_i\,v}}:Q_{\mathcal{A}_i}\to\mathbf{R}$ la fonction paramétrant l'enveloppe supérieure du polytope $Q_{\mathcal{A}_i,\tau_{\alpha_i\,v}}\subset\mathbf{R}^{n+1}$ associé au vecteur $\mathcal{A}_i$ et au poids $\tau_{\alpha_i\,v}=(\log|\alpha_{i\,0}|_v,\dots,\log|\alpha_{i\,N}|_v)$.

Théorème 3.2. *Soit $c\in\mathbf{N}^{m+1}$ tel que $c_0+\cdots+c_m=n+1$, avec les notations ci-dessus on a*

$$\hat{h}_c(X_{\underline{\mathcal{A}},\underline{\alpha}})=\sum_{v\in M_K}\frac{[K_v:\mathbf{Q}_v]}{[K:\mathbf{Q}]}\mathrm{MI}_c(\vartheta_{\underline{\mathcal{A}},\tau_{\underline{\alpha}v}})$$

avec $\mathrm{MI}_c(\vartheta_{\underline{\mathcal{A}},\tau_{\underline{\alpha}\,v}}):=\mathrm{MI}(\underbrace{\vartheta_{\mathcal{A}_0,\tau_{\alpha_0\,v}},\dots,\vartheta_{\mathcal{A}_0,\tau_{\alpha_0\,v}}}_{c_0\text{ fois}},\dots,\underbrace{\vartheta_{\mathcal{A}_m,\tau_{\alpha_m\,v}},\dots,\vartheta_{\mathcal{A}_m,\tau_{\alpha_m\,v}}}_{c_m\text{ fois}})$.

4. Théorème de Bézout pour les poids de Chow

Soit $X\subset\mathbf{P}^N$ une variété projective quelconque, fixons $\tau\in\mathbf{Z}^{N+1}$, considérons l'action du sous-groupe à un paramètre

$$*_\tau:\mathbf{T}\times\mathbf{P}^N\to\mathbf{P}^N,\qquad \bigl(t,(x_0:\cdots:x_N)\bigr)\mapsto(t^{\tau_0}x_0:\cdots:t^{\tau_N}x_N)$$

et la *déformation torique* X_τ de X associée, définie comme l'adhérence de Zariski de l'ensemble

$$\bigl\{\bigl((1:t),t*_\tau X\bigr):\ t\in\mathbf{T},\ x\in X\bigr\}\subset\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^N.$$

La *variété initiale de X relative au poids $\tau \in \mathbf{Z}^{N+1}$* est alors définie par

$$\mathrm{init}_\tau(X) := \iota^*\big(X_\tau \cdot \big(\big\{(0:1)\big\} \times \mathbf{P}^N\big)\big),$$

où $\iota : \mathbf{P}^N \to \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^N$ désigne l'inclusion $(x_0 : \cdots : x_N) \mapsto ((0:1), (x_0 : \cdots : x_N))$; c'est donc le *cycle limite* $\lim_{t\to\infty} t *_\tau X$ de X sous l'action $*_\tau$, de même dimension et degré que X.

On montre que lorsque $\tau \in \mathbf{N}^{N+1}$, le poids de Chow de X relatif à τ s'interprète comme un bi-degré d'une variante de la déformation torique ci-dessus et se comporte donc comme une hauteur. Comme conséquence de cette interprétation on obtient dans [6, § 4], un théorème de Bézout pour le poids de Chow qui précise la majoration obtenue par Ferretti [1, Proposition 4.3].

Théorème 4.1. *Soient $X \subset \mathbf{P}^N$ une variété projective et $H \in \mathrm{Div}(\mathbf{P}^N)$ un diviseur ne contenant pas X. Alors, pour $\tau \in \mathbf{Z}^{N+1}$ on a*

$$e_\tau(X \cdot H) = e_\tau(X)\deg(H) + e_\tau(H)\deg(X) - (\tau_0 + \cdots + \tau_N)\deg(H)\deg(X) - \sum_{Y \in \mathrm{irr}(\mathrm{init}_\tau(X))} m\big(X_\tau \cdot H_\tau; \iota(Y)\big)\deg(Y)$$

où la somme porte sur les composantes irréductibles de $\mathrm{init}_\tau(X)$ et $m(X_\tau \cdot H_\tau; \iota(Y))$ désigne la multiplicité de $\iota(Y)$ dans le cycle intersection $X_\tau \cdot H_\tau$. En particulier, si H est effectif on a, pour tout $\tau \in \mathbf{R}^{N+1}$

$$e_\tau(X \cdot H) \leqslant e_\tau(X)\deg(H) + e_\tau(H)\deg(X) - (\tau_0 + \cdots + \tau_N)\deg(H)\deg(X),$$

avec égalité si et seulement si les variétés initiales de X et H s'intersectent proprement.

On applique ce résultat à l'intersection d'une variété torique projective $X_{\mathcal{A},\alpha}$ avec un diviseur monomial de la forme $\mathrm{div}(x^b)$ où $b \in \mathbf{Z}^{N+1}$. Pour chaque place $v \in M_K$ les *pans* de la toiture de $Q_{\mathcal{A},\tau_{\alpha v}}$ induisent, par projection, une *décomposition polyhédrale cohérente* du polytope $Q_{\mathcal{A}}$, voir [9] par exemple. On note $\mathcal{D}_{\tau_{\alpha v}}$ cette décomposition, dont les éléments S sont en bijection avec les composantes de la variété initiale $\mathrm{init}_{\tau_{\alpha v}}(X_{\mathcal{A}})$. La multiplicité de cette composante dans le cycle intersection $X_{\mathcal{A},\alpha} \cdot \mathrm{div}(x^b)$ s'écrit alors $[L_{\mathcal{A}\cap S} : L_{\mathcal{A}}] \cdot \vartheta_{\mathcal{A}\cap S, \tau_{\alpha v}}(a)$ avec $a = \sum_{i=0}^N b_i a_i \in \mathbf{Z}^n$ et $\vartheta_{\mathcal{A}\cap S,\tau_{\alpha v}}$ la fonction paramétrisant le pan de la toiture de $Q_{\mathcal{A},\tau_{\alpha v}}$ au-dessus de S $(= Q_{\mathcal{A}\cap S})$, étendue linéairement à tout $\mathbf{R}^n$. On obtient donc le théorème de Bézout arithmétique exact suivant :

Corollaire 4.2. *Soient $\mathcal{A} \in (\mathbf{Z}^n)^{N+1}$ tel que $L_{\mathcal{A}} = \mathbf{Z}^n$, $\alpha \in (K^\times)^{N+1}$ et $b \in \mathbf{Z}^{N+1}$. Posons $D := \sum_{j=1}^N b_j$ et $a := \sum_{i=0}^N b_i a_i \in \mathbf{Z}^n$. Alors*

$$\hat{h}\big(X_{\mathcal{A},\alpha} \cdot \mathrm{div}(x^b)\big) = D\hat{h}(X_{\mathcal{A},\alpha}) - n! \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbf{Q}_v]}{[K : \mathbf{Q}]} \sum_{S \in \mathcal{D}_{\tau_{\alpha v}}} \vartheta_{\mathcal{A}\cap S, \tau_{\alpha v}}(a)\,\mathrm{Vol}_n(S).$$

En particulier, si $\mathrm{div}(x^b)$ *est effectif* (c.-*à-d.* $b \in \mathbf{N}^{N+1}$) *on a* $\hat{h}(X_{\mathcal{A},\alpha} \cdot \mathrm{div}(x^b)) \leqslant D\hat{h}(X_{\mathcal{A},\alpha})$.

5. Optimalité du théorème des minimums algébriques successifs

Soit $X \subset \mathbf{P}^N$ une variété quasi-projective quelconque, de dimension n. Le *i-ème minimum algébrique* de X par rapport à la hauteur normalisée est défini par

$$\hat{\mu}_i(X) := \sup\big\{\inf\big\{\hat{h}(\xi) :\ \xi \in (X \setminus Y)(\overline{\mathbf{Q}})\big\} :\ Y \subset X, \mathrm{codim}_X(Y) = i\big\}$$

pour $i = 1, \ldots, n+1$, où le supremum est pris sur toutes les sous-variétés Y de codimension i dans X. On a $\hat{\mu}_1(X) \geqslant \cdots \geqslant \hat{\mu}_{n+1}(X) \geqslant 0$.

La répartition de la hauteur des points algébriques d'une variété *fermée* $X \subset \mathbf{P}^N$ est en relation avec sa hauteur, le lien est donné par le *théorème des minimums successifs* de Zhang [10, Théorème 5.2 et Lemme 6.5(3)] :

$$\hat{\mu}_1(X) + \cdots + \hat{\mu}_{n+1}(X) \leqslant \frac{\hat{h}(X)}{\deg(X)} \leqslant (n+1)\hat{\mu}_1(X).$$

Comme application du Théorème 0.1, on construit des exemples toriques montrant qu'à des ε-près, toute configuration possible des minimums successifs se réalise, et que le quotient $\hat{h}(X)/\deg(X)$ peut atteindre n'importe quel valeur dans l'intervalle autorisé par cet encadrement.

Théorème 5.1. *Soient $n, N \in \mathbf{N}$ tels que $N \geqslant 3n+1$ et $\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}, \nu \in \mathbf{R}$ tels que $\mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{n+1} \geqslant 0$ et $\mu_1 + \cdots + \mu_{n+1} \leqslant \nu < (n+1)\,\mu_1$. Alors, pour $0 < \varepsilon_1 \leqslant (n+1)\mu_1 - \nu$, $\varepsilon_2 > 0$ arbitraires, il existe une variété torique $X \subset \mathbf{P}^N$ de dimension n telle que*

$$0 < \mu_i - \hat{\mu}_i(X) \leqslant \varepsilon_1 \quad \textit{pour } i = 1, \ldots, n+1 \quad \textit{et} \quad \left| \frac{\hat{h}(X)}{\deg(X)} - \nu \right| < \varepsilon_2 \mu_1.$$

De plus, la variété X peut être choisie de degré $\leqslant (4n^2 \varepsilon_2^{-1})^n$ et définie sur une extension kummerienne $K = \mathbf{Q}(2^{1/\ell})$ de degré $\lfloor \log(2)\,\varepsilon_1^{-1} \rfloor + 1$.

Étant donné que l'ouvert principal d'une variété torique est le translaté d'un sous-tore de $(\mathbf{P}^N)^\circ$, il est naturel de comparer cette situation au cas abelien. Soit A une variété abelienne munie d'un fibré ample et symétrique ce qui fournit une notion de hauteur normalisée sur les sous-variétés de A (hauteur de Néron–Tate pour les points). Soit $\alpha + B \subset A$ le translaté d'une sous-variété abelienne B par un point α, et soit $\mathrm{Tors}(B)$ le sous-groupe des points de torsion de B. Si β est un point quelconque de $\alpha + B$, alors $\beta + \mathrm{Tors}(B)$ est un sous-ensemble de points de hauteur $\hat{h}(\beta)$ dense dans $\alpha + B$, on en déduit

$$\hat{\mu}_1(\alpha + B) = \cdots = \hat{\mu}_{n+1}(\alpha + B).$$

Ainsi, dans cette situation l'intervalle du théorème des minimums successifs se réduit à un point, et on a les égalités

$$\frac{\hat{h}(\alpha + B)}{\deg(\alpha + B)} = (n+1)\hat{\mu}_1(\alpha + B) = \hat{\mu}_1(\alpha + B) + \cdots + \hat{\mu}_{n+1}(\alpha + B).$$

La situation est donc plus riche dans le cas torique, la différence tenant au fait que les translatés de sous-tores de $(\mathbf{P}^N)^\circ$ ne sont pas des ensembles algébriques fermés.

Références

[1] R.G. Ferretti, Diophantine approximation and toric deformations, Duke Math. J. 118 (2003) 493–522.
[2] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinsky, Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants, Birkhäuser, 1994.
[3] H. Gillet, C. Soulé, Amplitude arithmétique, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 307 (1988) 887–890.
[4] D. Mumford, Stability of projective varieties, Enseign. Math. 23 (1977) 39–110.
[5] P. Philippon, M. Sombra, Hauteur normalisée des variétés toriques projectives, 2003, 38 p., téléchargeable de http://fr.arxiv.org.
[6] P. Philippon, M. Sombra, Quelques aspects diophantiens des variétés toriques projectives, 2004, 40 p., téléchargeable de http://fr.arxiv.org.
[7] H. Randriambololona, Métriques de sous-quotient et théorème de Hilbert–Samuel pour les faisceaux cohérents, 2004, 23 p., téléchargeable de http://fr.arxiv.org.
[8] G. Rémond, Géométrie diophantienne multiprojective, in: Introduction to Algebraic Independence Theory, Lecture Notes in Math., vol. 1752, 2001, pp. 53–81, Chapitre 7.
[9] B. Sturmfels, On the Newton polytope of the resultant, J. Algebraic Comb. 3 (1994) 207–236.
[10] S.-W. Zhang, Small points and adelic metrics, J. Algebraic Geom. 4 (1995) 281–300.