Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 457–460
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse numérique

Détection et approximation de défauts non-réguliers

Zakaria Belhachmi, Dorin Bucur

Laboratoire de mathématiques, CNRS UMR 7122, université de Metz, ile du Saulcy, 57045 Metz cedex 01, France

Reçu le 15 décembre 2004 ; accepté le 3 février 2005

Présenté par Olivier Pironneau

Résumé

Dans cette Note nous étudions l'identifiabilité des défauts non réguliers à l'intérieur d'un matériau, par mesures au bord. Nous démontrons l'unicité de la détection par deux mesures pour des ensembles arbitraires qui satisfont quasi-partout une propriété de *conductivité*. Cette propriété est satisfaite par une classe très large d'ensembles, incluant tous les compacts qui s'écrivent comme réunion arbitraire de continua de diamètre non nul. La *conductivité* est un nouveau concept de régularité qui est lié à « l'épaisseur » de l'ensemble, et il est à rapprocher à la régularité de Wiener plutôt qu'à la régularité classique. Afin de donner une justification rigoureuse de l'approximation par éléments finis, nous démontrons un résultat de stabilité de la détection sans hypothèses de régularité à priori. ***Pour citer cet article : Z. Belhachmi, D. Bucur, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

Non-smooth defect identification and approximation. This Note deals with the identifiability of non-smooth defects by boundary measurements. We prove the uniqueness of the detection by two measurements for arbitrary closed sets satisfying quasi-everywhere a *conductivity* assumption. This assumption is satisfied by a large class of compact sets, including all the sets which can be written as an arbitrary union of continua of positive diameter. The *conductivity* is a new regularity concept which is related to the thickness of the set and is to be compared to the Wiener regularity. In order to rigorously justify the numerical approach by the finite element method, we provide a stability result without any a priori smoothness assumptions. ***To cite this article: Z. Belhachmi, D. Bucur, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

1. Introduction

Dans cette Note, nous discutons l'unicité et la stabilité du problème d'identification de défauts non réguliers par mesures au bord et, comme application, leur approximation par éléments finis (voir les résultats en détail dans [2]). D'une façon simple, le problème est formulé comme suit : étant donné un ouvert connexe régulier $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ et deux flux ψ_1, ψ_2 sur $\partial\Omega$, trouver un ensemble compact $K \subseteq \Omega$ à partir des traces $w_{K,\psi_1|\partial\Omega}, w_{K,\psi_2|\partial\Omega}$ des solutions de

Adresses e-mail : belhach@math.univ-metz.fr (Z. Belhachmi), bucur@math.univ-metz.fr (D. Bucur).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.02.011

$$\begin{cases} -\Delta w_{K,\psi_i} = 0 & \text{dans } \Omega \setminus K, \\ \dfrac{\partial w_{K,\psi_i}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial K, \\ \dfrac{\partial w_{K,\psi_i}}{\partial n} = \psi_i & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

(voir [1,3,8] pour une présentation détaillée du problème).

Dans cette Note, nous prouvons l'unicité de K pour une famille large de compacts qui satisfont quasi-partout une propriété de *conductivité*. Tous compact qui s'écrit comme union arbitraire de continua de diamètre non nul satisfait cette propriété. La conductivité est une nouvelle notion de régularité qui ressemble plus à la régularité au sens de Wiener qu'à celle classique. Dans ce contexte, on couvre formellement une classe très large de modèles mécaniques ou industriels dans lesquels apparaissent de nombreuses micro fissurations et hétérogénéités qui accompagnent la fatigue des matériaux.

Le second objectif est d'étudier la stabilité de la détection toujours sans hypothèses de régularité sur les défauts. Usuellement les résultats de stabilité dans ce genre de problème inverse géométrique supposent une forte régularité (type equi Lipschitz à constante Lipschitz donnée à priori). Nous démontrons un résultat de stabilité séquentielle qui ne requiert pas de régularité particulière et qui explique des phénomènes liés à l'interprétation de la technique de détection : des mesures proches peuvent être données par des géométries différentes (voir des exemples dans [2] et la Fig. 1). En renonçant à l'hypothèse de régularité à priori sur les défauts, on perd toute estimation du module de continuité des applications directe et inverse. Cependant, cette stabilité, même en l'absence d'estimation « quantitative » du module de continuité, permet de justifier rigoureusement la convergence de l'approximation des défauts non réguliers par la méthode des éléments finis (voir [5] pour un problème de ce type avec conditions de Dirichlet).

2. Résultats principaux

Soit Ω un ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^2$, et $F \subseteq \overline{\Omega}$ un ensemble arbitraire. On note $F^\varepsilon = \bigcup_{x\in F} B(x,\varepsilon)$ et on introduit le sous-espace de $H^1(\Omega)$ suivant

$$H^1_{\mathrm{cond},F}(\Omega) = \mathrm{cl}_{H^1(\Omega)}\bigl\{u \in H^1(\Omega)\colon\ \exists\varepsilon > 0,\ \nabla u = 0 \text{ p.p. sur } F^\varepsilon \cap \Omega\bigr\}. \tag{2}$$

Cet espace s'avère être le bon cadre fonctionnel (dans le cas des ouverts non réguliers) pour le problème conjugué, appelé *parfaitement conducteur*. Ce problème, introduit dans [7], dont la solution est la conjuguée harmonique de w_{K,ψ_i}, joue un rôle fondamental dans la compréhension de l'unicité.

Définition 2.1. Soit U un ouvert contenu dans Ω et $x \in \partial U$. On dit que x est *conductif pour U* si pour tout $r > 0$ et $\varphi \in C(\overline{U}) \cap H^1_{\mathrm{cond},\partial U\cap B_{x,r}}(\Omega)$

$$\liminf_{\substack{y\to x\\ y\in\partial U}} \frac{|\varphi(y)-\varphi(x)|}{|y-x|} = 0. \tag{3}$$

Plusieurs exemples de points conductifs sont présentés en [2]. On remarque juste que tout point contenu dans un continuum de diamètre positif de ∂U est conductif, mais qu'il y a des exemples où des points d'ensembles de Cantor (totalement discontinus) sont conductifs.

2.1. Unicité

Les flux ψ_1, ψ_2 qu'on va considérer sont les mêmes que ceux définis dans [1] (voir aussi [3]). On considère une division de $\partial\Omega$ dans trois parties distinctes $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$. Pour $i = 0, 1, 2$, sur $\partial\Omega$ on note par η_i une fonction positive telle que $\operatorname{supp}\eta_i \subseteq \Gamma_i$, $\eta_i \in L^2(\partial\Omega)$, $\int_{\partial\Omega}\eta_i = 0$. Pour $k = 1, 2$ on choisit $\psi_k = \eta_0 - \eta_k$.

La preuve du théorème suivant se trouve dans [2].

Théorème 2.2. *Soit $K, \widetilde{K}$ deux ensembles compacts de Ω tels que $\Omega \setminus K$, $\Omega \setminus \widetilde{K}$ sont connexes. Soient ψ_1, ψ_2 deux flux sur $\partial\Omega$ choisis comme précédemment. Supposons que pour $k = 1, 2$ $w_{K,\psi_k} = w_{\widetilde{K},\psi_k}$ sur $\partial\Omega$. Si $\Omega \setminus K$ et $\Omega \setminus \widetilde{K}$ sont conductifs quasi partout sur leurs frontières alors $K = \widetilde{K}$ q.p.*

L'idée de la démonstration repose sur une extension de la méthode proposée dans [1] et elle est basée sur la non existence des points critiques géométriques pour une classe particulière de fonctions holomorphes construites à partir des solutions de (1) et leur conjuguées harmoniques. La difficulté majeure est de donner un sens variationnel à ces conjuguées harmoniques et d'étudier leur comportement au bord non régulier. La conductivité semble être la bonne notion avec laquelle on puisse contrôler les oscillations et la dérivée métrique de ces fonctions dans un point du bord.

Dans [2] on donne plusieurs exemples de compacts conductifs quasi-partout. A l'instar de la régularité au sens de Wiener, on constate que la conductivité dépend de « l'épaisseur » du complémentaire du domaine autour du point. Sachant que pour un ouvert, quasi tous les points du bord sont réguliers au sens de Wiener, une question naturelle se pose : *est-il vrai qu'un ouvert est conductif quasi-partout sur sa frontière* ? Notons que si c'était le cas, tout compact serait uniquement identifiable par deux mesures au bord.

2.2. Stabilité

Pour un ensemble compact $K \subseteq \Omega$ on note par G_K la composante connexe de $\Omega \setminus K$ qui contient $\partial\Omega$ dans son bord.

Théorème 2.3. *Supposons que $K_n \subseteq F$ est une suite de compacts telles que le nombre de composantes connexes de K_n est uniformément borné. Si*

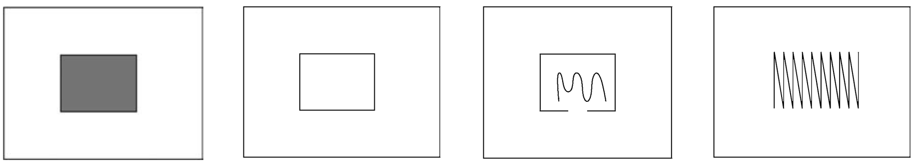
$$w_{K_n,\psi_i|\partial\Omega} \xrightarrow{L^2(\partial\Omega)} w_i, \quad i = 1, 2,$$

alors il existe un ensemble compact $K \subseteq F$ tel que pour $i = 1, 2$ $w_i = w_{K,\psi_i|\partial\Omega}$ et il existe une sous suite de $(K_n)_n$ qui converge vers K au sens de Hausdorff.

Si une autre sous suite de $(K_n)_n$ converge au sens de Hausdorff vers $\widetilde{K}$, alors $G_K = G_{\widetilde{K}}$ quasi-partout.

La preuve de ce résultat se trouve dans [2]. Elle repose sur la stabilité du problème direct (voir [4]), le Théorème 2.2 et le principe de Tikhonov.

On renvoie le lecteur aux articles [3,9] pour des résultats de stabilité avec des estimations quantitatives, obtenus sous des contraintes de régularité uniforme imposée à priori. Comme aucune régularité n'est supposée dans le Théorème 2.3, le résultat de stabilité obtenu ne donne pas des informations sur le module de continuité (qui d'ailleurs ne peut pas être obtenu même pour le problème direct). La stabilité au sens du Théorème 2.3 explicite le fait que des géométries différentes peuvent donner lieu à des mesures proches et montre les limites du procédé de détection par mesures au bord (voir la Fig. 1). Néanmoins, sous des hypothèses très faible sur la régularité du compact K, des changements radicaux de géométrie comme dans la Fig. 1 ne peuvent pas avoir lieu, et on retrouve la stabilité standard (voir [2]).



(a) (b) (c) (d)

Fig. 1. Quatre compacts qui donnent des mesures proches.

Comme application du résultat de stabilité, nous donnons une justification rigoureuse de la convergence d'une méthode d'approximation (e.g. éléments finis) dans le cas des défauts non réguliers. A notre connaissance, les résultats de stabilité standard fondés sur des hypothèses de régularité à priori ne permettent pas d'obtenir cette convergence.

2.3. Approximation

Notons $(\mathcal{T}_h)_h$ une famille de triangulations de Ω. Pour chaque paramètre de discrétisation $h > 0$, nous supposerons que la triangulation $\mathcal{T}_h$ est régulière au sens de [6] et satisfait les hypothèses usuelles d'admissibilité. On note $\mathcal{P}_h$ la famille d'ensembles obtenus comme réunion de triangles fermés de $\mathcal{T}_h$ ayant une intersection non vide avec F.

Soit $K^* \subset F$ un défaut avec un nombre de composantes connexes $\sharp K^*$ inférieur ou égal à une constante M, pour lequel nous disposons des mesures w_1, w_2 associés aux données ψ_1, ψ_2. Considérons le problème de moindres carrés (de dimensions finie) suivant :

$$\min_{K \in \mathcal{P}_h,\ \sharp K \leqslant M} \int_{\partial\Omega} |w_{K,\psi_1} - w_1|^2 \, \mathrm{d}\sigma + \int_{\partial\Omega} |w_{K,\psi_2} - w_2|^2 \, \mathrm{d}\sigma. \tag{4}$$

Le théorème d'approximation suivant est démontré dans [2].

Théorème 2.4. *Pour h tendant vers zéro, toute sous suite $(K_h)_h$ convergeant au sens de Hausdorff vers une limite $\widetilde{K}$ satisfait $G_{K^*} = G_{\widetilde{K}}$.*

La compacité de la de la topologie de Hausdorff dans la famille de compacts considérée assure l'existence de sous-suites convergeantes.

Notons que le problème de moindres carrés fait intervenir les solutions continues du problème (1) pour le défaut K_h. En pratique, nous utilisons les solutions éléments finis $w^j_{K,\psi}$ à la place. On peut toujours calculer ces solutions sur des maillages éventuellement plus fins de sorte que $\|w_{K,\psi} - w^j_{K,\psi}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant j$, $j < h$.

Il est intéressant d'observer que pour le problème parfaitement conducteur (voir [2,7]) nous pouvons utiliser dans le problème de moindres carrés associés la solution éléments finis calculée sur le même maillage qui approche le défaut. Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser une stratégie adaptative.

Références

[1] G. Alessandrini, A. Diaz Valenzuela, Unique determination of multiple cracks by two measurements, SIAM J. Control Optim. 34 (3) (1996) 913–921.

[2] Z. Belhachmi, D. Bucur, Stability and uniqueness for the crack identification problem, Preprint LMAM, Université de Metz, 2004, http://www.math.univ-metz.fr/preprints.

[3] K. Bryan, M. Vogelius, A review of selected works on crack identification problem, IMA Workshop on Geometric Methods in Inverse Problems and PDE Control, 2001.

[4] D. Bucur, N. Varchon, A duality approach for the boundary variation of Neumann problems, SIAM J. Math. Anal. 34 (2) (2002) 460–477.

[5] D. Chenais, E. Zuazua, Approximation par éléments finis de problèmes elliptiques d'optimisation de forme, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (9) (2004) 729–734.

[6] P.G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, Classics Appl. Math., vol. 40, SIAM, Philadelphia, PA, 2002.

[7] A. Friedman, M. Vogelius, Determining cracks by boundary measurements, Indiana Univ. Math. J. 38 (3) (1989) 527–556.

[8] H. Kim, J.K. Seo, Unique determination of a collection of a finite number of cracks from two boundary measurements, SIAM J. Math. Anal. 27 (5) (1996) 1336–1340.

[9] L. Rondi, Optimal stability of reconstruction of plane Lipschitz cracks, SIAM J. Math. Anal., à paraitre.