



## Équations aux dérivées partielles

# L'électron habillé non relativiste dans un champ magnétique

Laurent Amour<sup>a</sup>, Benoît Grébert<sup>b</sup>, Jean-Claude Guillot<sup>c,d</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire de mathématiques, UMR-CNRS 6056, université de Reims, Moulin de la Housse, BP 1039, 51687 Reims cedex 2, France

<sup>b</sup> Laboratoire de mathématiques Jean Leray, UMR-CNRS 6629, université de Nantes, 2, rue de la Houssinière, 44072 Nantes cedex 03, France

<sup>c</sup> Département de mathématiques, UMR-CNRS 7539, institut Galilée, université Paris-Nord, 93430 Villetaneuse, France

<sup>d</sup> Centre de mathématiques appliquées, UMR-CNRS 7641, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

Reçu le 2 février 2005 ; accepté le 3 février 2005

Présenté par Jean-Michel Bony

---

### Résumé

Nous considérons un électron non relativiste interagissant avec un champ magnétique classique pointant dans la direction  $x_3$  et un champ électromagnétique quantifié. L'invariance par translation dans la direction  $x_3$  nous amène à considérer l'hamiltonien réduit associé au moment total suivant cette direction. Après l'introduction d'une troncature ultraviolette et d'une régularisation infrarouge appropriées, nous démontrons l'existence d'un état fondamental pour l'opérateur réduit dès que la constante de couplage et le moment total suivant  $x_3$  sont suffisamment petits. De plus nous déterminons le spectre absolument continu de l'opérateur réduit et nous montrons que la masse renormalisée de l'électron est plus grande que sa masse nue. **Pour citer cet article :** *L. Amour et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

**The dressed nonrelativistic electron in a magnetic field.** We consider a nonrelativistic electron interacting with a classical magnetic field pointing along the  $x_3$ -axis and with a quantized electromagnetic field. Because of the translation invariance along the  $x_3$ -axis, we consider the reduced Hamiltonian associated with the total momentum along the  $x_3$ -axis and, after introducing an ultraviolet cutoff and an infrared regularization, we prove that the reduced Hamiltonian has a ground state if the coupling constant and the total momentum along the  $x_3$ -axis are sufficiently small. Finally, we determine the absolutely continuous spectrum of the reduced Hamiltonian and we prove that the renormalized mass of the electron is greater than its bare one. **To cite this article:** *L. Amour et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

Adresses e-mail : [laurent.amour@univ-reims.fr](mailto:laurent.amour@univ-reims.fr) (L. Amour), [grebert@math.univ-nantes.fr](mailto:grebert@math.univ-nantes.fr) (B. Grébert), [guillot@cmapx.polytechnique.fr](mailto:guillot@cmapx.polytechnique.fr) (J.-C. Guillot).

### Abridged English version

We consider a nonrelativistic electron in  $\mathbb{R}^3$  of charge  $e$  and mass  $m$  interacting with a magnetic field pointing along the  $x_3$ -axis,  $(0, 0, b(x_1, x_2))$ , an electrostatic potential,  $V(x_1, x_2)$  and with the quantized electromagnetic field given by (3) and (4) where  $\rho$  is a positive function satisfying (2);  $\epsilon_\mu(k)$  are the real polarization vectors satisfying  $\epsilon_\mu(k) \cdot \epsilon_{\mu'}(k) = \delta_{\mu\mu'}$ ,  $k \cdot \epsilon_\mu(k) = 0$ ;  $a_\mu(k)$  and  $a_\mu^*(k)$  are the usual annihilation and creation operators acting in the Fock space  $\mathcal{F} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)^{\otimes n}$  and obeying the canonical commutation relations (5). In the Hilbert space  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \otimes \mathcal{F} \simeq L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F})$ , the associated Pauli Hamiltonian in Coulomb gauge is formally given by (6). As usual we will consider the charge  $e$  in front of the quantized electromagnetic field as a parameter that we will denote  $g$ . Further we substitute the Wick normal ordered  $:A(x, \rho) \cdot A(x, \rho):$  for  $A(x, \rho) \cdot A(x, \rho)$ . The Hamiltonian that we obtain reads as  $H = H_0 + H_I$  where  $H_0$  and  $H_I$  are given by (8) and (9). We assume that  $b$  and  $V$  satisfy (11) and (12) in such a way the bottom of the spectrum of  $h(b, V)$  (see (10)) is an isolated nonpositive eigenvalue of finite multiplicity. To begin with we prove that  $H$  is self adjoint in  $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \otimes \mathcal{F}$  with the same domain as  $H_0$  if  $|g|$  is sufficiently small. Then, because  $H$  is invariant by translation in the  $x_3$ -direction,  $H$  has a direct integral decomposition over the spectrum of  $P_3$

$$H \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H(P_3) dP_3 \quad (1)$$

where  $P_3$  denotes the total momentum in the  $x_3$ -direction,  $P_3 = p_3 \otimes 1 + 1 \otimes d\Gamma(k_3)$  and where  $H(P_3)$  is given by (14), (15) and (16).

Our main result is the following:

**Theorem 0.1.** *Assume that  $\rho$  satisfies*

$$\int_{|k| \leq 1} \frac{|\rho(k)|^2}{|k|^3} d^3k < \infty \quad \text{and} \quad \int_{|k| \geq 1} |\rho(k)|^2 |k| d^3k < \infty. \quad (2)$$

*Then there exist  $0 < P_0 < m$  and  $0 < g_0$  such that  $H(P_3)$  has a ground state for  $|P_3| \leq P_0$  and  $|g| \leq g_0$ .*

*Furthermore the multiplicity of this ground state is smaller than the multiplicity of the ground state of  $h(b, V)$  and the absolutely continuous spectrum of  $H(P_3)$  equals to  $[\inf \sigma(H(P_3)), +\infty)$ .*

The electrostatic potential  $V$  is needed to avoid the infinite degeneracy of the ground state of  $h(b, V)$ .

In the free case, i.e. when  $b = V = 0$ , a similar problem has been studied in [4]. In the case of the one-particle sector of Nelson's model similar result has been obtained first in [7] and more recently in [14]. In this work we give a simple proof for the existence of a ground state for  $H(P_3)$  with an ultraviolet cutoff and an infrared regularization. The proof borrows ideas both from [7] (where the Hamiltonian is invariant by translation) and [3] (where the electronic part is confined).

The same proof works also for any free atom and positive ion in interaction with the quantized electromagnetic field.

As a consequence of the Theorem 0.1, when the ground state of  $h(b, V)$  is simple, we prove that the renormalized mass of the electron is greater than its bare one. We then deduce that the anomalous magnetic moment of the electron is positive.

Finally, following [4], we can conjecture that  $H(P_3)$  without infrared regularization has no ground state in  $\mathcal{H}$ .

### 1. Le modèle

Nous considérons un électron dans  $\mathbb{R}^3$ , de charge  $e$  et de masse  $m$ , interagissant simultanément avec, un champ magnétique classique,  $(0, 0, b(x_1, x_2))$  pointant dans la direction  $x_3$  avec  $b(x_1, x_2) = \frac{\partial a_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}(x_1, x_2)$  où  $a(x_1, x_2)$  est un potentiel vecteur, avec un potentiel électrostatique  $V(x_1, x_2)$  et enfin avec le champ électromagnétique quantifié donné en jauge de Coulomb par ( $j = 1, 2, 3$ )

$$A_j(x, \rho) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\mu=1,2} \int d^3k \left( \frac{\rho(k)}{|k|^{1/2}} \epsilon_\mu(k)_j e^{-ik \cdot x} a_\mu^\star(k) + \frac{\rho(k)}{|k|^{1/2}} \epsilon_\mu(k)_j e^{ik \cdot x} a_\mu(k) \right) \tag{3}$$

$$B_j(x, \rho) = \frac{i}{2\pi} \sum_{\mu=1,2} \int d^3k \left( -|k|^{1/2} \rho(k) \left( \frac{k}{|k|} \wedge \epsilon_\mu(k) \right)_j e^{-ik \cdot x} a_\mu^\star(k) + |k|^{1/2} \rho(k) \left( \frac{k}{|k|} \wedge \epsilon_\mu(k) \right)_j e^{ik \cdot x} a_\mu(k) \right) \tag{4}$$

où  $\rho(k)$  est une fonction positive de troncature à l’infini et de régularisation à l’origine dont nous préciserons les caractéristiques plus loin (cf. (17)), les vecteurs (réels) de polarisation,  $\epsilon_\mu(k)$ , satisfont  $\epsilon_\mu(k) \cdot \epsilon_{\mu'}(k) = \delta_{\mu\mu'}$ ,  $k \cdot \epsilon_\mu(k) = 0$ ;  $a_\mu(k)$  et  $a_\mu^\star(k)$  sont les opérateurs d’annihilation et de création habituels agissant dans l’espace de Fock pour les photons

$$\mathcal{F} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)^{\otimes_n}$$

et satisfaisant les relations canoniques de commutation ( $a^\sharp = a^\star$  ou  $a$ )

$$[a_\mu^\sharp(k), a_{\mu'}^\sharp(k')] = 0 \quad \text{et} \quad [a_\mu(k), a_{\mu'}^\star(k')] = \delta_{\mu\mu'} \delta(k - k'). \tag{5}$$

Dans l’espace de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \otimes \mathcal{F} \simeq L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F})$ , l’hamiltonien de Pauli en jauge de Coulomb est donné formellement par

$$H = \frac{1}{2m} (p - ea(x') - eA(x, \rho))^2 - \frac{e}{2m} b(x') \sigma_3 \otimes 1 + V(x') \otimes 1 + 1 \otimes H_{ph} - \frac{e}{2m} \sigma \cdot B(x, \rho) \tag{6}$$

où  $x' = (x_1, x_2)$ ,  $p = -i\nabla_x$ ,  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  sont les trois matrices de Pauli et l’hamiltonien des photons est donné par  $H_{ph} = \sum_{\mu=1,2} \int |k| a_\mu^\star(k) a_\mu(k) d^3k$ . Nous avons supposé que  $\frac{\hbar}{2\pi} = c = 1$ .

En fait, la charge  $e$  devant le champ électromagnétique quantifié sera considérée comme un paramètre que nous noterons  $g$ . Par ailleurs nous remplaçons la partie quadratique  $A(x, \rho) \cdot A(x, \rho)$  par le terme quadratique :  $A(x, \rho) \cdot A(x, \rho)$  : où les produits entre opérateurs de création et d’annihilation ont été réordonné au sens de Wick. L’hamiltonien ainsi obtenu diffère du précédent par une constante et peut s’écrire

$$H = H_0 + H_I \tag{7}$$

où

$$H_0 = \left\{ \frac{1}{2m} p_3^2 + \frac{1}{2m} \sum_{j=1,2} (p_j - ea_j(x'))^2 - \frac{e}{2m} b(x') \sigma_3 + V(x') \right\} \otimes 1 + 1 \otimes H_{ph} \tag{8}$$

et

$$H_I = -\frac{g}{m} A_3(x, \rho) p_3 - \frac{g}{m} \sum_{j=1,2} A_j(x, \rho) (p_j - ea_j(x')) - \frac{g}{2m} \sigma \cdot B(x, \rho) + \frac{g^2}{2m} : A(x, \rho) \cdot A(x, \rho) : . \tag{9}$$

Les potentiels  $b(x')$  et  $V(x')$  sont choisis de telle sorte que la borne inférieure du spectre de

$$h(b, V) = \frac{1}{2m} \sum_{j=1,2} (p_j - ea_j(x'))^2 - \frac{e}{2m} b(x') \sigma_3 + V(x') \quad (10)$$

soit une valeur propre strictement négative, isolée et de multiplicité finie. Il résulte de [13,15,6,1] qu'il est toujours possible de trouver  $b, V$  dans la classe

$$V \in L^\infty(\mathbb{R}^2) \quad \text{et} \quad V(x') \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad |x'| \rightarrow +\infty, \quad (11)$$

$$b \in C^1(\mathbb{R}^2) \quad \text{et} \quad 1/C \leq b(x') \leq C, \quad |\nabla b(x')| \leq C \quad \text{pour un} \quad C > 1 \quad (12)$$

qui satisfassent cette propriété.

## 2. Résultats

Notre premier résultat montre que notre modèle est mathématiquement bien posé :

**Proposition 2.1.** *Supposons que*

$$\int_{|k| \leq 1} \frac{|\rho(k)|^2}{|k|^2} d^3k < \infty \quad \text{et} \quad \int_{|k| \geq 1} |k| |\rho(k)|^2 d^3k < \infty.$$

Il existe  $g_1 > 0$  tel que pour tout  $|g| \leq g_1$   $H$  est auto-adjoint dans  $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \otimes \mathcal{F}$  avec le même domaine que  $H_0$ .

L'hamiltonien  $H$  est invariant par translation dans la direction  $x_3$ . Nous pouvons alors décomposer  $H$  en intégrale directe suivant le moment total dans la direction  $x_3$  :  $P_3 = p_3 \otimes 1 + 1 \otimes d\Gamma(k_3)$ . En effet  $[H, P_3] = 0$  et suivant [2] nous avons

$$H \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H(P_3) dP_3 \quad (13)$$

où  $H(P_3)$  est l'opérateur réduit donné dans  $L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2) \otimes \mathcal{F}$  par

$$H(P_3) = H_0(P_3) + H_I(P_3) \quad (14)$$

avec

$$H_0(P_3) = h(b, V) \otimes 1 + 1 \otimes \left\{ \frac{1}{2m} (P_3 - d\Gamma(k_3))^2 + H_{ph} \right\} \quad (15)$$

et

$$\begin{aligned} H_I(P_3) = & -\frac{g}{m} A_3(x', 0, \rho)(P_3 - d\Gamma(k_3)) - \frac{g}{m} \sum_{j=1,2} A_j(x', 0, \rho)(p_j - ea_j(x')) \\ & - \frac{g}{2m} \sigma \cdot B(x', 0, \rho) + \frac{g^2}{2m} : A(x', 0, \rho) \cdot A(x', 0, \rho) : . \end{aligned} \quad (16)$$

A nouveau si  $|g| \leq g_1$  alors l'opérateur  $H(P_3)$  est auto-adjoint dans  $L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2) \otimes \mathcal{F}$  avec pour domaine  $D(H(P_3)) = D(H_0(P_3))$  pour tout  $P_3$  réel. Notre principal résultat est le suivant

**Théorème 2.2.** *Supposons que  $\rho$  satisfait*

$$\int_{|k| \leq 1} \frac{|\rho(k)|^2}{|k|^3} d^3k < \infty \quad \text{et} \quad \int_{|k| \geq 1} |k| |\rho(k)|^2 d^3k < \infty \tag{17}$$

alors il existe  $0 < P_0 < m$  et  $0 < g_0$  tels que pour tout  $|P_3| \leq P_0$  et pour tout  $|g| \leq g_0$

- (i)  $H(P_3)$  a un état fondamental.
- (ii) La multiplicité de  $\inf \sigma(H(P_3))$  est inférieure à celle de  $\inf \sigma(h(b, V))$ .
- (iii) Le spectre absolument continu de l'opérateur  $(H(P_3))$  est la demi-droite  $[\inf \sigma(H(P_3)), +\infty)$ .

2.1. Commentaires

- La démonstration de (i) utilise de manière essentielle l'hypothèse que la borne inférieure du spectre de  $h(b, V)$  est une valeur propre isolée de multiplicité finie. Les énoncés (ii) et (iii) sont des corollaires qui découlent facilement de (i) (cf. [11,12]).
- Ce théorème s'inscrit dans une longue série de résultats concernant l'existence d'un état fondamental pour des modèles issus de l'électrodynamique quantique non relativiste. Nous ne pouvons pas proposer dans cette note une liste de références exhaustive ; citons néanmoins [7] et plus récemment [14] pour le modèle de Nelson, [3] pour un modèle de Pauli–Fierz avec une partie électronique confinante, [5,10,8,4] pour un modèle invariant par translation. Dans notre cas nous jouons à la fois sur le confinement dans les directions orthogonales au champ magnétique  $(x_1, x_2)$  et sur l'invariance par translation dans la direction  $x_3$ .
- La régularisation infrarouge est indispensable pour notre résultat. La question de savoir ce qui se passe dans la limite où cette régularisation disparaît est pour l'instant ouverte. On peut s'attendre à ce qu'il n'y ait plus d'état fondamental dans l'espace  $\mathcal{H}$  à la manière du récent résultat [4] pour un modèle de Pauli–Fierz invariant par translation (essentiellement le modèle (6) avec  $b = V = 0$ ).
- La méthode que nous utilisons est assez générale (cf. paragraphe suivant) et s'applique aussi au cas de l'atome ou de l'ion positif dans un champ de photons. On retrouve en effet à nouveau un hamiltonien électronique contenant une partie confinante et une partie invariante par translation. Cette extension sera publiée ultérieurement.
- A partir du Théorème 2.2, quand  $e(b, V)$  est simple, on peut montrer que la masse renormalisée de l'électron est plus grande que sa masse nue. De ce fait le moment magnétique anormal de l'électron est positif.

3. Esquisse de la preuve

Notre méthode s'appuie sur des bases existantes et les mélange. Nous tirons avantage du fait que nous pouvons à la fois confiner dans le plan  $x_1x_2$  (et alors utiliser des techniques issues de [3,5,9]) et réduire dans la direction  $x_3$  (et alors utiliser des techniques issues de [7,8]). Nous obtenons ainsi une démonstration relativement simple de l'existence d'un état fondamental pour  $H(P_3)$ .

Remarquons tout d'abord que si  $|P_3| \leq m$  alors  $H_0(P_3)$  a un état fondamental d'énergie  $e(b, V) + \frac{P_3^2}{2m}$  où  $e(b, V)$  est l'infimum du spectre de  $h(b, V)$ .

Introduisons alors une troncature infrarouge régularisée,  $\rho_\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant  $0 \leq \rho_\sigma(k) \leq \rho(k)$ ,  $\rho_\sigma(k) = 0$  pour  $|k| \leq \sigma$  et  $\int d^3k \frac{|\rho_\sigma(k) - \rho(k)|^2}{|k|^j} \rightarrow 0$  quand  $\sigma \rightarrow 0$  ( $j = -1, 1, 2$ ). Puis définissons l'hamiltonien  $H_\sigma(P_3) = H_0(P_3) + H_{I,\sigma}(P_3)$  où, dans la partie d'interaction, nous avons remplacé  $\rho$  par  $\rho_\sigma$ . Si  $E_\sigma(P_3)$  désigne l'infimum du spectre de  $H_\sigma(P_3)$ , nous démontrons que pour  $|P_3|$  et  $g$  assez petits (et indépendamment de  $\sigma$  petit),

$$E_\sigma(P_3 - k_3) - E_\sigma(P_3) \geq -\frac{3}{4}|k| \tag{18}$$

puis que  $H_\sigma(P_3)$  a un état fondamental que nous noterons  $\Phi_\sigma(P_3)$ . Tout le jeu consiste alors à démontrer que cet état fondamental a une limite non nulle dans  $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \otimes \mathcal{F}$  quand  $\sigma \rightarrow 0$ . Pour cela il faut être capable de contrôler, dans l'état  $\Phi_\sigma$ , le nombre de bosons d'énergie plus petite que  $\sigma$  et qui donc n'interagissent pas avec l'électron dans le modèle engendré par  $H_\sigma(P_3)$ . Dans cette étape cruciale la relation (18) joue un rôle important.

## Références

- [1] J. Avron, I. Herbst, B. Simon, Schrödinger operators with magnetic fields I. General interactions, *Duke Math. J.* 48 (1978) 847–883.
- [2] J. Avron, I. Herbst, B. Simon, Schrödinger operators with magnetic fields II. Separation of the center of mass in homogeneous magnetic fields, *Ann. Phys.* 114 (1978) 431–451.
- [3] V. Bach, J. Fröhlich, I.M. Sigal, Spectral analysis for systems of atoms and molecules coupled to the quantized radiation field, *Commun. Math. Phys.* 207 (1999) 249–290.
- [4] T. Chen, Operator-theoretic infrared renormalization and construction of dressed 1-particle states, preprint, mp-arc 01-310, 2001.
- [5] J. Dereziński, C. Gérard, Asymptotic completeness in quantum field theory. Massive Pauli–Fierz Hamiltonians, *Rev. Math. Phys.* 11 (1999) 383–450.
- [6] M. Dimassi, G.D. Raikov, Spectral asymptotics for quantum Hamiltonians in strong magnetic fields, preprint, LAGA, Université Paris Nord, 2004.
- [7] J. Fröhlich, On the infrared problem in a model of scalar electrons and massless scalar bosons, *Fortschr. Phys.* 22 (1974) 159–198.
- [8] J. Fröhlich, M. Griesemer, B. Schlein, Asymptotic completeness for Compton scattering, *Commun. Math. Phys.* 252 (2004) 415–476.
- [9] J. Fröhlich, M. Griesemer, B. Schlein, Asymptotic completeness for Rayleigh scattering, *Ann. Inst. H. Poincaré* 3 (2002) 107–170.
- [10] C. Gérard, On the existence of ground states for massless Pauli–Fierz Hamiltonians, *Ann. Inst. H. Poincaré* 1 (2000) 443–459.
- [11] F. Hiroshima, Ground states and spectrum of quantum electrodynamics of non-relativistic particles, *Trans. Amer. Math. Soc.* 353 (2001) 4497–4528.
- [12] F. Hiroshima, Multiplicity of ground states in quantum field models: application of asymptotic fields, preprint, math-ph/0402075, 2004.
- [13] A. Itwatsuka, H. Tamura, Asymptotics distribution of eigenvalues for Pauli operators with non constant magnetic fields, *Duke Math. J.* 93 (1998) 535–574.
- [14] A. Pizzo, One particle (improper) states in Nelson's massless model, *Ann. Inst. H. Poincaré* 4 (2003) 439–486.
- [15] G.D. Raikov, Eigenvalue asymptotics for the Pauli operator in strong non-constant magnetic fields, *Ann. Inst. Fourier* 49 (1999) 1603–1636.