



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 727–732



<http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/>

Analyse numérique

La condensation de la matrice masse, ou mass-lumping, pour les éléments finis mixtes de Raviart–Thomas–Nédélec d'ordre 1

Patrick Lacoste

CEA DAM-DIF, B.P. 12, 91680 Bruyères-Le-Châtel, France

Reçu le 5 février 2004 ; accepté après révision le 13 septembre 2004

Disponible sur Internet le 2 novembre 2004

Présenté par Olivier Pironneau

Résumé

On présente un moyen pratique de réaliser la condensation de masse des éléments finis de Raviart–Thomas–Nédélec d'ordre 1. Appliqué à l'intégration des équations de Maxwell posées au second ordre, cela permet d'utiliser des méthodes explicites d'intégration du système. *Pour citer cet article : P. Lacoste, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).*
© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Mass-lumping for the first order Raviart–Thomas–Nédélec finite elements. We present practical means to obtain a positive diagonal matrix for the first order Raviart–Thomas–Nédélec finite elements. Applying it to the second order Maxwell equations allows us to use explicit time schemes to solve the resulting differential system. *To cite this article: P. Lacoste, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).*
© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

A few years ago we exposed here, an algebraic and simple manner [2] to obtain lumped mass from the consistent mass matrix resulting from an approximation by mean of mixed finite elements of $H(\text{curl})$. Its use leads to effective time integration methods [1], but presents a major drawback: depending on the mesh regularity (obtuse angles), the lumped mass matrix may become null or negative. We build here a numerical process to avoid such a difficulty. We proceed as follows, using notations defined above. Let (m_{ij}) and (k_{ij}) be respectively the mass and stiffness matrices; let (α_i) and (f_i) be respectively the vectors of degrees of freedom and external forces – in our case arising from Maxwell equation at second order in a lossless bounded medium (see [3], for example) – built with $H(\text{curl})$ conforming finite elements [4] of order 1, on a triangle in \mathbb{R}^2 , or on a tetrahedron, in \mathbb{R}^3 . That is, we consider the

Adresse e-mail : patrick.lacoste@cea.fr (P. Lacoste).

problem resulting in the following differential equation for the *d.o.f.* on an edge number *i* (after the well-known assembling process): $m_{ii}\ddot{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{N_c} m_{ij}\ddot{\alpha}_j + k_{ii}\alpha_i + \sum_{j=1}^{N_c} k_{ij}\alpha_j = f_i$ where i_1, i_2, \dots, i_{N_c} are the number of edges connected to the edge *i* and distincts from *i* ($N_c = 4$ on Fig. 2(a), $N_c = 9$ on Fig. 2(b)). Following Théorème 2.1 and Proposition 3.1, we can substitute equivalently to (m_{ij}) , a diagonal matrix $\text{diag}(m_{ii}^L)$ given by Eq. (5) in dimension 2 for a triangle *K*, and by Eq. (6) in dimension 3, for a tetrahedron *K*. Then we can consider instead of the problem above, the following differential equation: $m_{ii}^L\ddot{\alpha}_i + k_{ii}\alpha_i + \sum_{j=1}^{N_c} k_{ij}\alpha_j = f_i$. The problem occurs when the sum of all the cotangent terms in the above expression m_{ii}^L , is less or equal to zero. The goal of this paper is to prove that we can replace the previous and consistent mass matrix by an invertible mass matrix, and then we are lead to the formulation: $\ddot{\alpha}_i + \tilde{k}_{ii}\alpha_i + \sum_{j=1}^{N_c} \tilde{k}_{ij}\alpha_j = \mathcal{F}(\alpha_{l_1}, \alpha_{l_2}, \dots, \alpha_{l_{N_a}})$ where the (\tilde{k}_{ij}) 's are new stiffness terms, \mathcal{F} is a new second member, and $\alpha_{l_1}, \alpha_{l_2}, \dots, \alpha_{l_{N_a}}$ are new artificial degrees of freedom lying on the edge *i*, and where the integer N_a indicates the number of elements linked to the edge *i* ($N_a = 2$ on Fig. 2(a) and $N_a = 3$ on Fig. 2(b)).

1. Introduction

On a présenté il y a quelques années ici même [2], une technique de condensation de masse des éléments finis de $H(\text{rot})$. Son utilisation est efficace [1], mais cette méthode a l'important défaut de la possible perte de définie positivité pour des maillages non de Delaunay. On présente dans cette Note un moyen d'y remédier.

On choisit comme problème type les équations de Maxwell posées au second ordre, dans un ouvert borné Ω d'un milieu sans pertes, de bord conducteur parfait Γ de normale extérieure \vec{n} , après éliminations du champ magnétique, dans lesquelles pour simplifier on a imposé toutes les constantes arbitrairement à 1. Pour J donné, il faut trouver E dans $H(\text{rot}, \Omega; E \wedge \vec{n}|_{\Gamma} = 0)$, solution de [3] : $\partial_2 E + \text{rot rot } E = -\partial_t J$.

Une formulation variationnelle de ce problème conduit, pour tout $E' \in H(\text{rot}, \Omega; E \wedge \vec{n}|_{\Gamma} = 0)$, à : $\int_{\Omega} \partial_{t^2} E \cdot E' \, dx + \int_{\Omega} \text{rot } E \cdot \text{rot } E' \, dx = - \int_{\Omega} \partial_t J \cdot E' \, dx$.

Soit τ_h un maillage en triangles ou en tétraèdres de Ω , de diamètre h vérifiant, pour tout triangle : $h/\rho \leq \chi$, où χ est une constante et ρ le rayon du cercle inscrit. On utilise les normes $L^2(\Omega)$ et $H(\text{rot}, \Omega)$ des champs de l'espace $H(\text{rot}, \Omega)$ et de son approximation V_h sur le maillage, et on les note $|\cdot|_{\Omega}$ et $\|\cdot\|_{\Omega}$ respectivement. De même pour les restrictions à une maille τ , on a les normes $|\cdot|_{\tau}$ et $\|\cdot\|_{\tau}$ respectivement, et donc : $\|u\|_{\Omega}^2 = |u|_{\Omega}^2 + |\text{rot } u|_{\Omega}^2 = \sum_{\tau \in \tau_h} \|u\|_{\tau}^2$ et $|u|_{\Omega}^2 = \sum_{\tau \in \tau_h} |u|_{\tau}^2$. Enfin l'utilisation d'éléments finis de Raviart–Thomas–Nédélec sur Ω , conduit au problème d'algèbre linéaire (si $\partial_{t^2} \alpha = \ddot{\alpha}$) :

$$M\ddot{\alpha} + K\alpha = F \tag{1}$$

où les matrices $M = (m_{ij})$, $K = (k_{ij})$, $F = (f_i)$, $\alpha = (\alpha_i)$, dont la taille égale le nombre d'arêtes de τ_h , sont obtenues par l'assemblage de matrices élémentaires définies sur τ , analogues aux suivantes :

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \int_{\tau} p_i \cdot p_j \, dx, & k_{ij} &= \int_{\tau} \text{rot } p_i \cdot \text{rot } p_j \, dx, & i, j &= 1, N, & \text{et} \\ f_i &= - \int_{\tau} \partial_t J \cdot p_i \, dx, & i &= 1, N \end{aligned} \tag{2}$$

si on a posé $E|_{\tau} \approx \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i$ et $\alpha|_{\tau} = (\alpha_i)_{i=1, N}$, où $N = 3$ en dimension 2, $N = 6$ en dimension 3.

2. La condensation de masse des éléments finis de Nédélec d'ordre 1

On démontre dans [2], le résultat suivant :

Théorème 2.1. *Il existe une matrice diagonale m^L et une seule telle que les formes bilinéaires symétriques définies respectivement par $m = (m_{ij})$ et $m^L = \text{diag}(m_{ii}^L)$ sur l'espace $(V_h)|_{\tau}$, coïncident sur le sous-espace des champs*

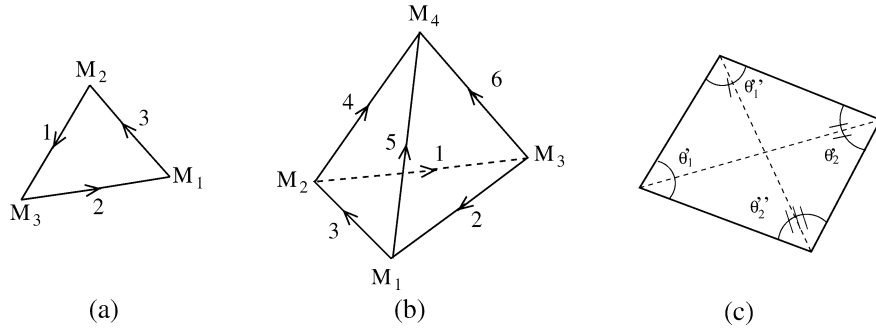


Fig. 1. Élément fini triangle (a), tétraèdre (b) et propriété de Delaunay dans un quadrilatère convexe (c).

constants. Soit $u \in H(\text{rot}, \Omega)$ et $\alpha = (\alpha_i)$ le vecteur des degrés de liberté de son interpolé sur V_h . Si M^L est la matrice diagonale obtenue par assemblage des matrices m^L , alors il existe $h_0 > 0$ et une constante C positive, tels que pour tout $h \leq h_0$, on ait : $|((M^L - M)\alpha, \alpha)| \leq Ch \|u\|_\Omega$.

On prouve qu'en dimension 2, avec l'orientation de la Fig. 1(a), on a :

$$m_{ii}^L = m_{ii} + m_{jk} - m_{ij} - m_{ik}, \quad \text{pour } i, j, k = 1, 3 \text{ deux à deux distincts} \tag{3}$$

et en dimension 3 (voir [2]), avec l'orientation de la Fig. 1(b), on a :

$$m_{ii}^L = m_{ii} + \sum_{j,k \text{ connectés à } i} \epsilon_{jk} \cdot m_{jk}, \quad \text{pour } i = 1, 6 \text{ et où } \epsilon_{jk} = 1 \text{ si les arêtes } j \text{ et } k \text{ convergent ou divergent au même sommet du tétraèdre, et } \epsilon_{jk} = -1 \text{ sinon.} \tag{4}$$

3. Expression géométrique de la masse lumpée

On définit les quantités suivantes, aussi bien pour les triangles que pour les tétraèdres (Figs. 1(a) et (b)), constitués de N_s sommets : pour $i = 1, N_s, M_i$ et λ_i sont respectivement les sommets et leurs coordonnées barycentriques du triangle ou du tétraèdre, \vec{n}_i la normale à l'arête du triangle ou à la face du tétraèdre, opposé au sommet M_i , S_i et H_i sont respectivement l'aire du triangle opposé au sommet M_i et la hauteur issue du sommet M_i du tétraèdre ; pour $i, j, k = 1, N_s$ deux à deux distincts, l_{ij} est la longueur de l'arête de sommets M_i et M_j du triangle ou du tétraèdre, h_{ij}^k est la hauteur issue du sommet M_k du triangle $M_i M_j M_k$ et enfin θ_{ij}^k et Θ_{ij} désignent respectivement l'angle issue du sommet M_k dans le triangle $M_i M_j M_k$ et l'angle définis par les vecteurs \vec{n}_i, \vec{n}_j (ou $\text{grad } \lambda_i, \text{grad } \lambda_j$). Avec ces grandeurs on prouve la

Proposition 3.1. On a en dimension 2, pour le triangle K :

$$m_{ii}^L = \frac{1}{2} \cot \Theta_{jk}, \quad \text{pour } i, j, k = 1, N_s \text{ deux à deux distincts} \tag{5}$$

et en dimension 3, pour le tétraèdre K :

$$m_{ii}^L = \frac{1}{6} l_{pq} \cdot \cot \Theta_{jk}, \quad j, k, p, q = 1, N_s \text{ deux à deux distincts, } i = \text{numéro de l'arête}(p, q). \tag{6}$$

Démonstration. Les calculs sont élémentaires. Les champs constants sont définis par $\{\overrightarrow{\text{grad}} \lambda_i\}_{i=1, N_s}$.

En dimension 2 d'espace, on a : $\overrightarrow{\text{grad}} \lambda_i = -\frac{\vec{n}_i}{h_{jk}^i}$. On a par définition :

$$m_{ii}^L = \int_K \overrightarrow{\text{grad}} \lambda_j \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \lambda_k \, dx = \text{mes}(K) \frac{\vec{n}_j \cdot \vec{n}_k}{h_{ik}^j \cdot h_{ij}^k} = \frac{\text{mes}(K)}{h_{ik}^j \cdot h_{ij}^k} \cos \Theta_{jk} = \frac{1}{4} \frac{l_{ij} \cdot l_{ik}}{\text{mes}(K)} \cos \Theta_{jk},$$

or : $\text{mes}(K) = \frac{1}{2} l_{ij} \cdot l_{ik} \sin \Theta_{jk}$, donc : $m_{ii}^L = \frac{1}{2} \cot \Theta_{jk}$.

En dimension 3 d'espace, si on pose $i = \text{numéro de l'arête}(p, q)$, on a :

$$m_{ii}^L = \frac{\text{mes}(K)}{H_j \cdot H_k} \cos \Theta_{jk} = \frac{1}{3} \frac{S_k}{H_j} \cos \Theta_{jk},$$

or : $S_k = \frac{1}{2} h_{pq}^j \cdot h_{jp}^k = \frac{1}{2} (\sin \theta_{jp}^l \cdot l_{jq}) \cdot l_{pq}$, et : $H_j = \sin \Theta_{jk} \cdot h_{pq}^j = \sin \Theta_{jk} (\sin \theta_{jp}^l \cdot l_{jq})$, donc : $m_{ii}^L = \frac{1}{6} l_{pq} \cot \Theta_{jk}$. \square

Définition 3.2 (*Assemblage*). On définit, pour une arêtes i du maillage, $(K_j^i)_{j=1, N_a}$, l'ensemble des N_a mailles (éléments) du maillage ayant l'arête i en commun. Si l'on note $m_{ii}(\tau)$ le terme élémentaire défini par la relation (2), il en résulte que les termes m_{ii} , sont données par :

$$m_{ii} = m_{ii}(K_1^i) + m_{ii}(K_2^i) + \dots + m_{ii}(K_{N_a}^i) \quad (7)$$

et de même pour le terme de la relation (5) ou (6) :

$$m_{ii}^L = m_{ii}^L(K_1^i) + m_{ii}^L(K_2^i) + \dots + m_{ii}^L(K_{N_a}^i). \quad (8)$$

L'approximation par éléments finis selon (1) et (2) conduit pour le d.d.l. i à l'équation :

$$m_{ii} \ddot{\alpha}_i + \sum_{j \in K_j^i} m_{ij} \ddot{\alpha}_j + k_{ii} \alpha_i + \sum_{j \in K_j^i} k_{ij} \alpha_j = f_i. \quad (9)$$

L'opération de condensation de masse conduit au système différentiel ordinaire :

$$m_{ii}^L \ddot{\alpha}_i + k_{ii} \alpha_i + \sum_{j \in K_j^i} k_{ij} \alpha_j = f_i \quad (10)$$

où m_{ii}^L est fourni par (8). Il est clair que le terme m_{ii}^L , qui en vertu de la Proposition 3.1 est une somme de cotangentes, en nombre N_a , peut être négatif ou nul. Cela résulte, par exemple, en dimension 2 d'espace ($N_a = 2$), de la propriété simple suivante :

Propriété 3.3. Dans un quadrilatère convexe (Fig.1(c)), on a toujours : $(\cot \theta_1' + \cot \theta_2') \cdot (\cot \theta_1'' + \cot \theta_2'') \leq 0$.

Si lorsque la matrice lumpée $M^L = (m_{ii}^L)$ est définie positive, l'intégration de (1) est aisée – et construite à cet effet – cette perte éventuelle de positivité interdit l'intégration de ce système. Nous présentons dans ce qui suit une solution pour remédier à ce problème de perte de positivité.

4. Modification de la masse lumpée

Aussi bien en dimension 2 qu'en dimension 3 d'espace, on se place dans le cas où la partie du maillage $\tau_i = \bigcup_{j=1}^{N_a} K_j^i$, c'est-à-dire les mailles qui ont l'arête i en commun, produit un terme $m_{ii}^L \leq 0$. On va alors fabriquer un sous-maillage de τ_i qui subdivise les angles concernés dans le calcul de m_{ii}^L et substituer à la relation (10), dans laquelle m_{ii}^L est négatif, une équation différentielle intégrable. C'est l'objet de la

Proposition 4.1. L'approximation par éléments finis de Raviart–Thomas–Nédélec d'ordre 1 de l'équation de Maxwell, conduit pour chaque d.d.l. de numéro i , à

$$m_{ii} \ddot{\alpha}_i + \sum_{j \in K_j^i} m_{ij} \ddot{\alpha}_j + k_{ii} \alpha_i + \sum_{j \in K_j^i} k_{ij} \alpha_j = f_i. \quad (11)$$

La condensation de masse de (11) se traduit, à l'aide de m_{ii}^L donné par (8) et lorsque $m_{ii}^L > 0$, par :

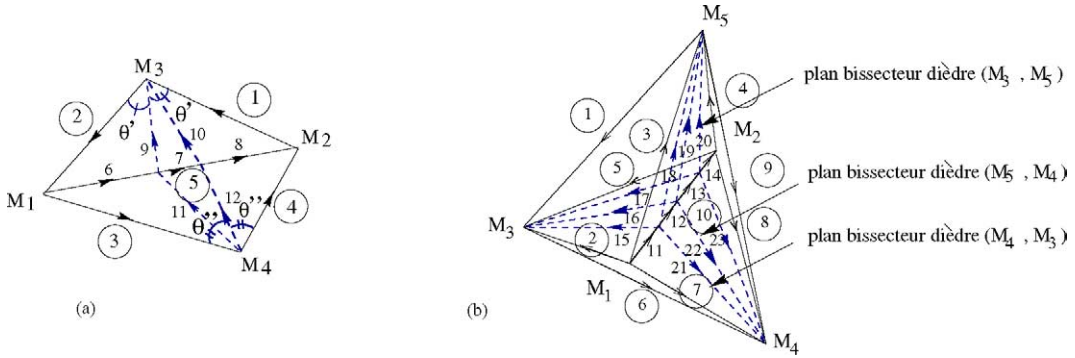


Fig. 2. Découpage des mailles pour lesquelles $m_{ii}^L \leq 0$ en dimension 2 (a) et en dimension 3 (b).

$$m_{ii}^L \ddot{\alpha}_i + k_{ii} \alpha_i + \sum_{j \in K_j^i} k_{ij} \alpha_j = f_i, \tag{12}$$

lorsque $m_{ii}^L \leq 0$, il existe des constantes (\tilde{k}_{ij}) , un second membre \mathcal{F} ne dépendant que des données initiales et de valeurs de type d.d.l. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N_a}$ situées sur l'arête i , telles que la condensation de masse de (11) s'écrit :

$$\ddot{\alpha}_i + \tilde{k}_{ii} \alpha_i + \sum_{j \in K_j^i} \tilde{k}_{ij} \alpha_j = \mathcal{F}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N_a}). \tag{13}$$

Démonstration. On considère le cas où m_{ii}^L est négatif. La mise sous forme (13) exige de rompre avec la technique de l'assemblage matriciel. C'est pourquoi on raisonne sur un modèle de maille τ_i générique (i.e. dont les arêtes sont numérotées de 1 à N_c) et où l'arête i est numérotée $N_c + 1$.

Cas de la dimension 2. On considère les deux triangles de la Fig. 2(a), pour lesquels le terme m_{ii}^L est supposé négatif pour l'arête numéro $N_c + 1 = 5$ ($m_{55}^L < 0$). On procède à un sous-découpage de ces deux triangles comme suit : on trace sur ces deux triangles les deux bissectrices des angles opposés à l'arête 5, puis chacune est prolongée jusqu'au sommet opposé, de telle sorte que – d'une manière générale – chaque angle opposé est au plus divisé en 3 angles strictement inférieur à $\pi/2$ (donc avec des cotangentes strictement positives) et en sorte que l'arête numéro 5 est partagée en trois arêtes numérotées 6, 7, 8. L'approximation par éléments finis dans τ_i conduit aux relations :

$$\begin{aligned} m_{66}^L \ddot{\alpha}_6 + k_{26} \alpha_2 + k_{36} \alpha_3 + k_{69} \alpha_9 + k_{611} \alpha_{11} + k_{66} \alpha_6 &= f_6, & \text{dans } K_1^6 \cup K_2^6, \\ m_{77}^L \ddot{\alpha}_7 + k_{79} \alpha_9 + k_{710} \alpha_{10} + k_{711} \alpha_{11} + k_{712} \alpha_{12} + k_{77} \alpha_7 &= f_7, & \text{dans } K_1^7 \cup K_2^7, \\ m_{88}^L \ddot{\alpha}_8 + k_{18} \alpha_1 + k_{48} \alpha_4 + k_{810} \alpha_{10} + k_{812} \alpha_{12} + k_{88} \alpha_8 &= f_8, & \text{dans } K_1^8 \cup K_2^8. \end{aligned} \tag{14}$$

Dans (14) les m_{ii}^L sont strictement positifs et donc en multipliant chaque relation par $(m_{ii}^L)^{-1}$, en sommant et en utilisant la relation $\alpha_5 = \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8$, on obtient une équation de type (13) pour le d.d.l. numéro 5. Il faut encore éliminer les d.d.l. $\alpha_9, \dots, \alpha_{12}$, ce qui s'obtient grâce aux relations (Stokes) suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_9 &= -\alpha_2 - \alpha_6 + \int_{K_1^6} \text{rot } E \, dx, & \alpha_{10} &= +\alpha_1 + \alpha_8 - \int_{K_1^8} \text{rot } E \, dx, \\ \alpha_{11} &= -\alpha_3 + \alpha_6 + \int_{K_2^6} \text{rot } E \, dx, & \alpha_{12} &= +\alpha_4 - \alpha_8 - \int_{K_2^8} \text{rot } E \, dx, \\ \alpha_8 &= -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_6 - \alpha_7 + \int_{K_1^5} \text{rot } E \, dx = \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_6 - \alpha_7 - \int_{K_2^5} \text{rot } E \, dx. \end{aligned} \tag{15}$$

On obtient au final une expression du type (13), avec un second membre \mathcal{F} dépendant d'une part de (α_6, α_7) , des données f_i et d'autre part des intégrales de $\text{rot } E$ sur les K_j^i .

Cas de la dimension 3. On considère les N_a tétraèdres de la Fig. 2(b) (on choisit $N_a = 3$, qui est le minimum d'une quantité variable), pour lesquels le terme m_{ii}^L est supposé négatif pour l'arête numéro $N_c + 1 = 10$

($m_{1010}^L < 0$). On procède à un sous-découpage de ces trois tétraèdres comme suit : on trace dans ces tétraèdres les plans bissecteurs des angles opposés à l'arête 10 de sorte que l'arête numéro 10 est partagée en quatre arêtes numérotées 11, 12, 13, 14. A partir des points ainsi définis sur l'arête 10, on prolonge chacun des plans bissecteurs aux $N_a - 1 = 2$ tétraèdres restants, de telle sorte qu'en général, chaque angle opposé est au plus divisé en $N_a + 1 = 4$ angles strictement inférieur à $\pi/2$. L'approximation par éléments finis dans τ_i conduit dans les tétraèdres $(K_j^{11})_{j=1, N_a}$, aux relations :

$$m_{1111}^L \ddot{\alpha}_{11} + k_{1111} \alpha_1 + k_{2111} \alpha_2 + k_{3111} \alpha_3 + k_{6111} \alpha_6 + k_{7111} \alpha_7 + k_{9111} \alpha_9 + k_{1115} \alpha_{15} + k_{1118} \alpha_{18} + k_{1121} \alpha_{21} + k_{1111} \alpha_{11} = f_{11}. \quad (16)$$

On a des relations analogues à (16) pour les d.d.l. numéro 12, 13 et 14, respectivement dans les tétraèdres K_j^{12} , K_j^{13} et K_j^{14} , et donc en multipliant chaque relation par $(m_{ii}^L)^{-1}$, en sommant et en utilisant la relation $\alpha_{10} = \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14}$, on obtient une équation de type (13) pour le d.d.l. numéro 10. Comme en dimension 2, on élimine les d.d.l. intérieurs $\alpha_{N_a+N_c+3}, \dots, \alpha_{N_a(N_a+1)+N_c+2}$, grâce aux relations (théorème de Stokes) suivantes dans les tétraèdres K_1^{10} :

$$\alpha_{15} = \alpha_2 - \alpha_{11} + \int_{K_{11}^{M_3}} \text{rot}_f E_f dx, \quad \alpha_{16} = \alpha_2 - \alpha_{11} - \alpha_{12} + \int_{K_{11}^{M_3}} \text{rot}_f E_f dx + \int_{K_{12}^{M_3}} \text{rot}_f E_f dx,$$

$$\alpha_{17} = \alpha_5 + \alpha_{14} - \int_{K_{14}^{M_3}} \text{rot}_f E_f dx,$$

où on note, de manière non univoque, $K_j^{M_i}$ le triangle issue du point M_i et comportant l'arête numéro j et où on note, avec des orientations adéquates, E_f la composante tangentielle de E sur la face f du tétraèdre concerné, de normale \vec{n} , et rot_f l'opérateur rotationnel surfacique sur la face f tel que $\text{rot}_f E_f = \text{rot } E \cdot \vec{n}$. Avec des relations analogues on élimine les d.d.l. intérieurs α_{18}, α_{19} et α_{20} dans les tétraèdres K_2^{10} , et les d.d.l. α_{21}, α_{22} et α_{23} dans les tétraèdres K_3^{10} . Cette élimination est indépendante de N_a .

Enfin on utilise aussi les relations : $\alpha_{14} = \alpha_2 - \alpha_5 - \alpha_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{13} - \int_{K_{10}^{M_3}} \text{rot}_f E_f dx = \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{13} - \int_{K_{10}^{M_5}} \text{rot}_f E_f dx = \alpha_7 - \alpha_8 - \alpha_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{13} - \int_{K_{10}^{M_4}} \text{rot}_f E_f dx$.

On obtient au final une expression du type (13), avec un second membre \mathcal{F} dépendant d'une part de $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13})$, des données f_i , et enfin des intégrales de $\text{rot } E$ sur des $K_j^{M_i}$. On montre finalement qu'il est possible, à l'aide des relations (12) et (13), d'obtenir un système général (1) pourvu d'une matrice diagonale (définie) positive et donc utiliser un schéma explicite pour son intégration, comme par exemple le schéma de Newmark. Les résultats s'étendent, *mutatis mutandis*, à l'opérateur divergence et aux éléments finis mixtes de l'espace $H(\text{div})$ à l'ordre un [5]. \square

Références

- [1] Y. Benhassine, V.P. Carpes, L. Pichon, Comparison of mass lumping techniques for solving the 3d Maxwell's equations in the time domain, IEEE Trans. Magn. 36 (4) (2000) 1548–1552.
- [2] Y. Haugazeau, P. Lacoste, Condensation de la matrice masse pour les éléments finis mixtes de $H(\text{rot})$, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 316 (1993) 509–512.
- [3] P. Monk, A simple proof of convergence for an edge element discretization of Maxwell's equations, in: C. Cartensen, et al. (Eds.), Computational Electromagnetics, in: Lectures Notes in Comput. Sci. Engrg., vol. 28, 2003, pp. 127–142.
- [4] J.C. Nédélec, Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 , Numer. Math. 35 (1980) 315–341.
- [5] P.-A. Raviart, J.-M. Thomas, A Mixed Finite Element Method for Second Order Elliptic Problems, Springer-Verlag, Berlin, 1977.