Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 411–416
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

Géométrie algébrique

Fonctions constructibles et intégration motivique I

Raf Cluckers [a], François Loeser [b]

[a] *Katholieke Universiteit Leuven, Department of Mathematics, Celestijnenlaan 200B, 3001 Leuven, Belgium*
[b] *École normale supérieure, département de mathématiques et applications, UMR 8553 du CNRS, 45, rue d'Ulm, 75230 Paris cedex 05, France*

Reçu le 22 mars 2004 ; accepté après révision le 1er juin 2004

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

On introduit un formalisme d'images directes pour les fonctions constructibles motiviques. On en tire une version très générale de l'intégration motivique pour laquelle un théorème de changement de variables est établi. Ces constructions admettent une généralisation au cadre relatif, ce qui permet également de développer une version relative de l'intégration motivique. ***Pour citer cet article : R. Cluckers, F. Loeser, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

Constructible functions and motivic integration I. We introduce a direct image formalism for constructible motivic functions. One deduces a very general version of motivic integration for which a change of variables theorem is proved. These constructions are generalized to the relative framework, in which we develop a relative version of motivic integration. ***To cite this article: R. Cluckers, F. Loeser, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abridged English version

In the present Note we fix a field k of characteristic zero and we consider for any field K containing k the field of Laurent series $K((t))$ endowed with its natural valuation $\mathrm{ord}\colon K((t))^\times \to \mathbf{Z}$. For x in $K((t))$ we set $\overline{\mathrm{ac}}(x) = xt^{-\mathrm{ord}(x)} \bmod t$ if $x \neq 0$ and $\overline{\mathrm{ac}}(0) = 0$. We use the Denef–Pas $\mathcal{L}_{\mathrm{DP}}$ language which is a 3-sorted language $(\mathbf{L}_{\mathrm{Val}}, \mathbf{L}_{\mathrm{Res}}, \mathbf{L}_{\mathrm{Ord}}, \mathrm{ord}, \overline{\mathrm{ac}})$ with sorts corresponding respectively to valued field, residue field and value

Adresses e-mail : raf.cluckers@wis.kuleuven.ac.be (R. Cluckers), Francois.Loeser@ens.fr (F. Loeser).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.06.026

group variables. The languages $\mathbf{L}_{\mathrm{Val}}$ and $\mathbf{L}_{\mathrm{Res}}$ are equal to the ring language $\mathbf{L}_{\mathrm{Rings}} = (+, -, \cdot, 0, 1)$, and for $\mathbf{L}_{\mathrm{Ord}}$ we take the Presburger language $\mathbf{L}_{\mathrm{PR}} = \{+, 0, 1, \leqslant\} \cup \{\equiv_n \mid n \in \mathbf{N},\ n > 1\}$, with $\equiv_n$ the equivalence relation modulo n. Symbols ord and $\overline{\mathrm{ac}}$ will be interpreted respectively as valuation and angular component, so that $(K((t)), K, \mathbf{Z})$ is a structure for $\mathcal{L}_{\mathrm{DP}}$. We shall also add constants symbols in the Val, resp. Res, sort, for every element of $k((t))$, resp. k. Let φ be a formula in the language $\mathcal{L}_{\mathrm{DP}}$ with respectively m, n and r free variables in the various sorts. For every K in F_k, the category of fields containing k, we denote by $h_\varphi(K)$ the subset of $h[m,n,r](K) := K((t))^m \times K^n \times \mathbf{Z}^r$ consisting of points satisfying φ. We call the assignment $K \mapsto h_\varphi(K)$ a definable subassignment and we define a category Def_k whose objects are definable subassignments. More generally for S in Def_k, we denote by Def_S the category of objects of Def_k over S. We denote by RDef_S the subcategory of Def_S consisting of definable subassignments of $S \times h[0,n,0]$, for variable n. We denote by $SK_0(\mathrm{RDef}_S)$ the corresponding Grothendieck semiring. We consider the ring $A = \mathbf{Z}[\mathbf{L}, \mathbf{L}^{-1}, (\frac{1}{1-\mathbf{L}^{-i}})_{i>0}]$. For $q > 1$ we denote by $\vartheta_q : A \to \mathbf{R}$ the morphism sending $\mathbf{L}$ to q. We write A_+ for the subset of elements a in A with $\vartheta_q(a) \geqslant 0$ for $q > 1$. We consider the subring $\mathcal{P}(S)$ of the ring of functions from the set of points of S to A generated by constant functions, definable functions $S \to \mathbf{Z}$ and functions of the form $\mathbf{L}^\beta$ with β definable $S \to \mathbf{Z}$. We write $\mathcal{P}_+(S)$ for the semiring of functions in $\mathcal{P}(S)$ with values in A_+. If Y is a definable subassignment of S, we denote by $\mathbf{1}_Y$ the function in $\mathcal{P}_+(S)$ with value 1 on Y and 0 outside. We denote by $\mathcal{P}_+^0(S)$ the sub-semiring of $\mathcal{P}_+(S)$, generated by such functions and by the constant function $\mathbf{L} - 1$. There is a morphism $\mathcal{P}_+^0(S) \to SK_0(\mathrm{RDef}_S)$ sending $\mathbf{1}_Y$ to the class of Y and sending $\mathbf{L} - 1$ to the class of $K \mapsto S(K) \times (K \setminus \{0\})$. Finally we may define the semiring of positive constructible motivic functions on S by $\mathcal{C}_+(S) = SK_0(\mathrm{RDef}_S) \otimes_{\mathcal{P}_+^0(S)} \mathcal{P}_+(S)$.

To any algebraic subvariety Z of $\mathbf{A}^m_{k((t))}$ we assign the definable subassignment h_Z of $h[m,0,0]$ given by $h_Z(K) = Z(K((t)))$. The Zariski closure of a subassignment S of $h[m,0,0]$ is the intersection W of all algebraic subvarieties Z of $\mathbf{A}^m_{k((t))}$ such that $S \subset h_Z$. We set $\dim S := \dim W$. More generally, if S is a subassignment of $h[m,n,r]$, we define $\dim S$ to be $\dim p(S)$ with p the projection $h[m,n,r] \to h[m,0,0]$. One proves, using results of [7] and [5], that two isomorphic objects in Def_k have the same dimension. For every non negative integer d, we denote by $\mathcal{C}_+^{\leqslant d}(S)$ the ideal of $\mathcal{C}_+(S)$ generated by $\mathbf{1}_Z$ with Z definable subassignment of S and $\dim Z \leqslant d$. We set $C_+(S) = \bigoplus_d C_+^d(S)$ with $C_+^d(S) := \mathcal{C}_+^{\leqslant d}(S)/\mathcal{C}_+^{\leqslant d-1}(S)$.

Our main result is Théorème 3.1 which states existence and unicity, for k a field of characteristic zero, S in Def_k, and Z in Def_S of a graded semigroup $\mathrm{I}_S C_+(Z)$ of $C_+(Z)$ together with pushforward morphisms $f_! : \mathrm{I}_S C_+(Z) \to \mathrm{I}_S C_+(Y)$ for every morphism $f : Z \to Y$ in Def_S, satisfying a list of eight natural conditions (A1)–(A8). When S is the final object $h[0,0,0]$ and f is the morphism $Z \to S$, $f_!$ corresponds to motivic integration. We give (Théorème 3.2) a very general version of the change of variables theorem in this new framework.

Finally, fix Λ in Def_k. Replacing dimension by relative dimension, we may define relative analogues $C_+(Z \to \Lambda)$ of $C_+(Z)$ for $Z \to \Lambda$ in Def_Λ. Théorème 3.1 may be generalized to this relative setting. In particular we construct a morphism

$$\mu_\Lambda : \mathrm{I}_\Lambda C_+(Z \to \Lambda) \longrightarrow \mathcal{C}_+(\Lambda) = \mathrm{I}_\Lambda C_+(\Lambda \to \Lambda)$$

which corresponds to motivic integration along the fibers of the morphism $Z \to \Lambda$.

1. Préliminaires

1.1. Langage de Denef–Pas. Dans ce travail on fixe un corps k de caractéristique zéro et on considère des corps K contenant k ainsi que le corps des séries de Laurent $K((t))$ muni de la valuation naturelle $\mathrm{ord} : K((t))^\times \to \mathbf{Z}$. Pour x dans $K((t))$ on pose $\overline{\mathrm{ac}}(x) = xt^{-\mathrm{ord}(x)} \bmod t$ si $x \neq 0$ et $\overline{\mathrm{ac}}(0) = 0$. On utilise le langage de Denef–Pas $\mathcal{L}_{\mathrm{DP}}$. Il s'agit d'un langage à trois sortes $(\mathbf{L}_{\mathrm{Val}}, \mathbf{L}_{\mathrm{Res}}, \mathbf{L}_{\mathrm{Ord}}, \mathrm{ord}, \overline{\mathrm{ac}})$ correspondant respectivement à des variables d'un corps valué, de son corps résiduel et du groupe de valuation. Pour la sorte de type Val, on prendra comme langage

$\mathbf{L}_{\mathrm{Val}}$ le langage des anneaux $\mathbf{L}_{\mathrm{Rings}} = (+, -, \cdot, 0, 1)$, de même, on prendra le langage $\mathbf{L}_{\mathrm{Res}} = \mathbf{L}_{\mathrm{Rings}}$ pour la sorte de type Res, tandis que pour la sorte de type Ord on prendra le langage de Presburger

$$\mathbf{L}_{\mathrm{PR}} = \{+, 0, 1, \leqslant\} \cup \{\equiv_n \mid n \in \mathbf{N},\ n > 1\},$$

avec $\equiv_n$ la relation d'équivalence modulo n. Les symboles ord et $\overline{\mathrm{ac}}$ seront interprétés respectivement comme la valuation et la composante angulaire. Ainsi $(K((t)), K, \mathbf{Z})$ est une structure pour $\mathcal{L}_{\mathrm{DP}}$. Les formules du premier ordre dans le langage $\mathcal{L}_{\mathrm{DP}}$ sont construites à partir des symboles de $\mathcal{L}_{\mathrm{DP}}$ ainsi que de variables, des connecteurs logiques $\wedge$, $\vee$, $\neg$, des quantificateurs $\exists$, $\forall$ et du symbole de l'égalité $=$. En général on dispose également d'un symbole de constante dans la sorte de type Val, resp. Res, pour tout élément de $k((t))$, resp. k.

1.2. Sous-assignements. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ un foncteur covariant d'une catégorie $\mathcal{C}$ à valeurs dans celle des ensembles. Rappelons qu'un sous-assignement h de F est la donnée, pour tout objet C de $\mathcal{C}$, d'un sous-ensemble $h(C)$ de $F(C)$, cf. [4]. Les opérations et notations usuelles de la théorie des ensembles s'étendent trivialement aux sous-assignements. Ainsi pour deux sous-assignements h et h' d'un même foncteur, on définit des sous-assignements $h \cup h'$, $h \cap h'$ et la relation $h \subset h'$, etc. Si $h \subset h'$ on dit que h est un sous-assignement de h'. Un morphisme $f : h \to h'$ entre sous-assignements de foncteurs F_1 et F_2 est la donnée pour tout C d'une application $f(C) : h(C) \to h'(C)$. On définit aisément le sous-assignement $f(h)$ de F_2 ainsi que le graphe de f, un sous-assignement de $F_1 \times F_2$, cf. [4].

1.3. Sous-assignementsdéfinissables. Soit F_k la catégorie des corps contenant k. On note $h[m, n, r]$ le foncteur $F_k \to \mathrm{Ens}$ donné par $h[m, n, r](K) = K((t))^m \times K^n \times \mathbf{Z}^r$. A toute formule φ dans $\mathcal{L}_{\mathrm{DP}}$ à coefficients dans $k((t))$, resp. k, dans la sorte de type Val, resp. Res, ayant respectivement m, n et r variables libres dans les différents types, on associe un sous-assignement h_φ de $h[m, n, r]$, en prenant pour $h_\varphi(K)$ le sous-ensemble de $h[m, n, r](K)$ formé des points satisfaisant φ. Un tel sous-assignement sera appelé définissable. On définit une catégorie Def_k en prenant comme objets les sous-assignements définissables d'un $h[m, n, r]$. Les morphismes dans Def_k sont les morphismes $f : h \to h'$ avec h et h' sous-assignements définissables de $h[m, n, r]$ et $h[m', n', r']$ respectivement dont le graphe est définissable. Si S est un objet de Def_k, on note Def_S la catégorie des morphismes $X \to S$ dans Def_k. On écrit $S[m, n, r]$ pour $S \times h[m, n, r]$. Un point s de S est un couple (s_0, K) avec K dans F_k et s_0 un point de $S(K)$. On pose alors $k(s) = K$ et on note $|S|$ l'ensemble des points de S. Soit $f : X \to S$ un morphisme dans Def_k avec X et S des sous-assignements définissables de $h[m, n, r]$ et $h[m', n', r']$ respectivement. Soit $\varphi(x, s)$ une formule définissant le graphe de f dans $h[m + m', n + n', r + r']$. Si $s = (s_0, K)$ est un point de S, la formule $\varphi(x, s_0)$ définit un objet de Def_K. On définit ainsi un foncteur « fibre en s » $i_s^* : \mathrm{Def}_S \to \mathrm{Def}_{k(s)}$.

1.4. Dimension. A toute sous-variété algébrique Z de $\mathbf{A}^m_{k((t))}$ on associe le sous-assignement définissable h_Z de $h[m, 0, 0]$ donné par $h_Z(K) = Z(K((t)))$. L'adhérence de Zariski d'un sous-assignement S de $h[m, 0, 0]$ est l'intersection W des sous-variétés algébriques Z de $\mathbf{A}^m_{k((t))}$ telles que $S \subset h_Z$. On définit la dimension de S comme $\dim S := \dim W$. Plus généralement, si S est un sous-assignement de $h[m, n, r]$, on définit $\dim S$ comme la dimension de l'image de S par la projection $h[m, n, r] \to h[m, 0, 0]$. La démonstration de l'énoncé suivant n'est pas triviale et repose sur des résultats de Denef et Pas [7] et van den Dries [5].

Proposition 1.1. *Deux objets isomorphes de* Def_k *ont même dimension.*

2. Fonctions constructibles

2.1. Fixons S dans Def_k. On considère la sous-catégorie RDef_S de Def_S formée des sous-assignements définissables Z de $S \times h[0, n, 0]$, pour n variable, le morphisme $Z \to S$ étant induit par la projection sur S. On note $SK_0(\mathrm{RDef}_S)$ le quotient du semi-groupe libre sur les classes d'isomorphisme d'objets $[Z \to S]$ de RDef_S

par les relations $[\emptyset \to S] = 0$ et $[(Y \cup Y') \to S] + [(Y \cap Y') \to S] = [Y \to S] + [Y' \to S]$, pour Y et Y' sous-assignements définissables d'un $S \times h[0, n, 0]$, et $K_0(\mathrm{RDef}_S)$ le groupe abélien associé. Noter que le morphisme $SK_0(\mathrm{RDef}_S) \to K_0(\mathrm{RDef}_S)$ n'est pas injectif. Le produit cartésien induit une unique structure de semi-anneau sur $SK_0(\mathrm{RDef}_S)$ et d'anneau sur $K_0(\mathrm{RDef}_S)$. Pour tout morphisme $f : S \to S'$ dans Def_k, on dispose d'un morphisme $f^* : SK_0(\mathrm{RDef}_{S'}) \to SK_0(\mathrm{RDef}_S)$ induit par produit fibré. Si $f : S \to S'$ est un objet dans $\mathrm{RDef}_{S'}$, la composition avec f induit un morphisme $f_! : SK_0(\mathrm{RDef}_S) \to SK_0(\mathrm{RDef}_{S'})$. Ces constructions s'étendent à K_0. On considère l'anneau $A = \mathbf{Z}[\mathbf{L}, \mathbf{L}^{-1}, (\frac{1}{1-\mathbf{L}^{-i}})_{i>0}]$. Pour tout réel $q > 1$ on note $\vartheta_q : A \to \mathbf{R}$ le morphisme envoyant $\mathbf{L}$ sur q. On note A_+ le sous-semi-groupe de A formé des a tels que $\vartheta_q(a) \geqslant 0$ pour tout $q > 1$. On note $\mathcal{P}(S)$ le sous-anneau de l'anneau des fonctions $|S| \to A$ engendré par les constantes, les fonctions définissables $S \to \mathbf{Z}$ et les fonctions de la forme $\mathbf{L}^\beta$ avec β définissable $S \to \mathbf{Z}$. On note $\mathcal{P}_+(S)$ le semi-anneau formé des fonctions de $\mathcal{P}(S)$ à valeurs dans A_+.

2.2. Si Y est un sous-assignement définissable de S, on note $\mathbf{1}_Y$ la fonction de $\mathcal{P}(S)$ valant 1 sur Y et 0 ailleurs. On note $\mathcal{P}^0(S)$, resp. $\mathcal{P}^0_+(S)$, le sous-anneau de $\mathcal{P}(S)$, resp. le sous-semi-anneau de $\mathcal{P}_+(S)$, engendré par de telles fonctions et par la fonction constante $\mathbf{L} - 1$. On note $\mathbf{L}$ et $\mathbf{L} - 1$ la classe de $S[0, 1, 0]$ et $S \times h_{\mathbf{A}^1_k \setminus \{0\}}$ dans $SK_0(\mathrm{RDef}_S)$ et dans $K_0(\mathrm{RDef}_S)$. On a des morphismes naturels $\mathcal{P}^0(S) \to K_0(\mathrm{RDef}_S)$ et $\mathcal{P}^0_+(S) \to SK_0(\mathrm{RDef}_S)$ envoyant $\mathbf{1}_Y$ sur $[Y \to S]$ et $\mathbf{L} - 1$ sur $\mathbf{L} - 1$. Finalement on définit le semi-anneau des fonctions constructibles positives par $\mathcal{C}_+(S) = SK_0(\mathrm{RDef}_S) \otimes_{\mathcal{P}^0_+(S)} \mathcal{P}_+(S)$ et l'anneau des fonctions constructibles par $\mathcal{C}(S) = K_0(\mathrm{RDef}_S) \otimes_{\mathcal{P}^0(S)} \mathcal{P}(S)$. Si $f : S \to S'$ est un morphisme dans Def_k le morphisme f^* a une extension naturelle en $f^* : \mathcal{C}_+(S') \to \mathcal{C}_+(S)$. Si, de plus, f est un morphisme dans $\mathrm{RDef}_{S'}$, le morphisme $f_!$ admet une extension naturelle en $f_! : \mathcal{C}_+(S) \to \mathcal{C}_+(S')$. Ces constructions s'étendent à $\mathcal{C}$.

2.3. Soit φ une fonction dans $\mathcal{P}(S[0, 0, r])$. On dit que φ est S-intégrable si pour tout $q > 1$ et tout x dans $|S|$ la série $\sum_{i \in \mathbf{Z}^r} \vartheta_q(\varphi(x, i))$ est sommable. On démontre que si φ est S-intégrable il existe une unique fonction $\mu_S(\varphi)$ dans $\mathcal{P}(S)$ telle que $\vartheta_q(\mu_S(\varphi)(x))$ soit égale à la somme de la série précédente pour tout $q > 1$ et tout x dans $|S|$. On note $\mathrm{I}_S\mathcal{P}_+(S[0, 0, r])$ l'ensemble des fonctions S-intégrables dans $\mathcal{P}_+(S[0, 0, r])$ et on pose $\mathrm{I}_S\mathcal{C}_+(S[0, 0, r]) = \mathcal{C}_+(S) \otimes_{\mathcal{P}_+(S)} \mathrm{I}_S\mathcal{P}_+(S[0, 0, r])$. C'est un sous $\mathcal{C}_+(S)$-semi-module de $\mathcal{C}_+(S[0, 0, r])$ et μ_S s'étend par tensorisation en un morphisme $\mu_S : \mathrm{I}_S\mathcal{C}_+(S[0, 0, r]) \to \mathcal{C}_+(S)$.

2.4. Pour tout entier d, on note $\mathcal{C}^{\leqslant d}_+(S)$ l'idéal de $\mathcal{C}_+(S)$ engendré par les fonctions $\mathbf{1}_Z$ avec Z sous-assignement définissable de S et $\dim Z \leqslant d$. On pose $C_+(S) = \bigoplus_d C^d_+(S)$ avec $C^d_+(S) := \mathcal{C}^{\leqslant d}_+(S)/\mathcal{C}^{\leqslant d-1}_+(S)$. C'est un semi-groupe abélien gradué, ainsi qu'un $\mathcal{C}_+(S)$-semi-module. Ses éléments sont les Fonctions constructibles positives sur S. Si φ est une fonction appartenant à $\mathcal{C}^{\leqslant d}_+(S)$, mais pas à $\mathcal{C}^{\leqslant d-1}_+(S)$, on note $[\varphi]$ son image dans $C^d_+(S)$. Si $f : S \to S'$ est un isomorphisme dans Def_k, on peut définir une fonction « ordre du jacobien » $\mathrm{ord\,jac} f$, qui n'est définie que presque partout, et est égale presque partout à une fonction définissable, et en particulier on peut définir $\mathbf{L}^{-\mathrm{ord\,jac} f}$ dans $C^d_+(S)$, pour S de dimension d, cf. [1]. On définit de même $C(S)$ à partir de $\mathcal{C}(S)$.

3. Intégration motivique : le résultat principal

Théorème 3.1. *Soit k un corps de caractéristique zéro et soit S dans* Def_k. *Il existe un unique foncteur $Z \mapsto \mathrm{I}_S C_+(Z)$ de* Def_S *dans la catégorie des semi-groupes abéliens, le foncteur des Fonctions S-intégrables, associant à tout morphisme $f : Z \to Y$ dans* Def_S *un morphisme $f_! : \mathrm{I}_S C_+(Z) \to \mathrm{I}_S C_+(Y)$ vérifiant les conditions suivantes* :

(A0) *Pour tout Z dans* Def_S, *$\mathrm{I}_S C_+(Z)$ est un sous-semi-groupe gradué de $C_+(Z)$; $\mathrm{I}_S C_+(S) = C_+(S)$.*

(A1a) *Si $S \to S'$ est un morphisme dans* Def_k *et Z est dans* Def_S, *alors $\mathrm{I}_{S'} C_+(Z) \subset \mathrm{I}_S C_+(Z)$, et pour φ dans $\mathrm{I}_{S'} C_+(Z)$, $f_!(\varphi)$ est le même, considéré dans $\mathrm{I}_{S'}$ ou dans I_S.*

(A1b) *Une Fonction positive φ sur Z est S-intégrable si et seulement si elle est Y-intégrable et $f_!(\varphi)$ est S-intégrable.*

(A2) *Si Z est la réunion disjointe de deux sous-assignements définissables Z_1 et Z_2, alors l'isomorphisme $C_+(Z) \simeq C_+(Z_1) \oplus C_+(Z_2)$ induit un isomorphisme $\mathrm{I}_S C_+(Z) \simeq \mathrm{I}_S C_+(Z_1) \oplus \mathrm{I}_S C_+(Z_2)$, sous lequel on a $f_! = f_{|Z_1!} \oplus f_{|Z_2!}$.*

(A3) *Pour tout α dans $\mathcal{C}_+(Y)$ et tout β dans $\mathrm{I}_S C_+(Z)$, $\alpha f_!(\beta)$ est S-intégrable si et seulement si $f^*(\alpha)\beta$ l'est et dans ce cas $f_!(f^*(\alpha)\beta) = \alpha f_!(\beta)$.*

(A4) *Si $i : Z \hookrightarrow Z'$ est l'inclusion de sous-assignements définissables d'un même objet de Def_S, $i_!$ est induit par le prolongement par zéro en dehors de Z et envoie injectivement $\mathrm{I}_S C_+(Z)$ dans $\mathrm{I}_S C_+(Z')$.*

(A5) *Soit Y dans Def_S et soit π la projection $Y[0,n,0] \to Y$. Une Fonction $[\varphi]$ dans $C_+(Y[0,n,0])$ est S-intégrable si et seulement si $[\pi_!(\varphi)]$ l'est* (*avec les notations de* 2.2) *et dans ce cas $\pi_!([\varphi]) = [\pi_!(\varphi)]$.*

(A6) *Soit Y dans Def_S et soit π la projection $Y[0,0,r] \to Y$. Une Fonction $[\varphi]$ dans $C_+(Y[0,0,r])$ est S-intégrable si et seulement si il existe φ' avec $[\varphi'] = [\varphi]$ qui soit Y-intégrable au sens de* 2.3 *et telle que $[\mu_Y(\varphi')]$ soit S-intégrable. On a alors $\pi_!([\varphi]) = [\mu_Y(\varphi')]$.*

(A7) *Soit Y dans Def_S et soit Z le sous-assignement de $Y[1,0,0]$ défini par $\mathrm{ord}(z - c(y)) = \alpha(y)$ et $\overline{\mathrm{ac}}(z - c(y)) = \xi(y)$, avec z la coordonnée sur le facteur $\mathbf{A}^1_{k((t))}$ et α, ξ, c des fonctions définissables sur Y respectivement à valeurs dans $\mathbf{Z}$, $h[0,1,0] \setminus \{0\}$ et $h[1,0,0]$. On considère $f : Z \to Y$ induit par la projection. Alors $[\mathbf{1}_Z]$ est S-intégrable si et seulement si $\mathbf{L}^{-\alpha-1}[\mathbf{1}_Y]$ l'est et dans ce cas $f_!([\mathbf{1}_Z]) = \mathbf{L}^{-\alpha-1}[\mathbf{1}_Y]$.*

(A8) *Soit Y dans Def_S et soit Z le sous-assignement de $Y[1,0,0]$ défini par $z - c(y) = 0$ avec z la coordonnée sur le facteur $\mathbf{A}^1_{k((t))}$ et c un morphisme $Y \to h[1,0,0]$. On considère $f : Z \to Y$ induit par la projection. Alors $[\mathbf{1}_Z]$ est S-intégrable si et seulement si $\mathbf{L}^{(\mathrm{ord\,jac} f)\circ f^{-1}}$ l'est et dans ce cas $f_!([\mathbf{1}_Z]) = \mathbf{L}^{(\mathrm{ord\,jac} f)\circ f^{-1}}$.*

La preuve du théorème utilise de façon essentielle le théorème de décomposition en cellules de Denef et Pas [7].

On définit $\mathrm{I}_S C(Y)$ comme le sous-groupe de $C(Y)$ engendré par l'image de $\mathrm{I}_S C_+(Y)$. On démontre que si $f : Y \to Y'$ est un morphisme dans Def_S, le morphisme $f_! : \mathrm{I}_S C_+(Y) \to \mathrm{I}_S C_+(Y')$ admet une extension naturelle en $f_! : \mathrm{I}_S C(Y) \to \mathrm{I}_S C(Y')$.

L'énoncé suivant est une version générale des théorèmes de changement de variable de [3] et [4].

Théorème 3.2. *Soit $f : X \to Y$ un isomorphisme entre sous-assignements définissables de dimension d. Pour toute fonction φ dans $\mathcal{C}_+^{\leqslant d}(Y)$ ayant une classe non nulle dans $C_+^d(Y)$, $[f^*(\varphi)]$ est Y-intégrable et $f_![f^*(\varphi)] = \mathbf{L}^{(\mathrm{ord\,jac} f)\circ f^{-1}}[\varphi]$.*

Quand S est égal à $h[0,0,0]$, i.e. à l'objet final de Def_k, on écrit $\mathrm{I}C_+(Z)$ pour $\mathrm{I}_S C_+(Z)$ et on dira intégrable pour S-intégrable. On adopte des conventions similaires lorsque C_+ est remplacé par C. Notons que $\mathrm{I}C_+(h[0,0,0]) = C_+(h[0,0,0]) = SK_0(\mathrm{RDef}_k) \otimes_{\mathbf{N}[\mathbf{L}-1]} A_+$ et que $\mathrm{I}C(h[0,0,0]) = K_0(\mathrm{RDef}_k) \otimes_{\mathbf{Z}[\mathbf{L}]} A$. Pour ϕ dans $\mathrm{I}C_+(Z)$, ou dans $\mathrm{I}C(Z)$, on définit l'intégrale motivique $\mu(\varphi)$ par $\mu(\varphi) = f_!(\varphi)$ avec f le morphisme $Z \to h[0,0,0]$. Les relations de cette nouvelle construction avec les constructions antérieures de l'intégration motivique, tant dans sa version géométrique, introduite dans [6] et développée dans [3], que dans sa version arithmétique [4], ainsi qu'avec l'intégration p-adique seront explicitées ultérieurement.

4. Intégrales dépendant d'un paramètre

On fixe Λ dans Def_k qui joue le rôle d'un espace de paramètres. Pour S dans Def_Λ, on considère l'idéal $\mathcal{C}_+^{\leqslant d}(S \to \Lambda)$ de $\mathcal{C}_+(S)$ engendré par les fonctions $\mathbf{1}_Z$ avec Z sous-assignement définissable de S tel que toutes les fibres de $Z \to \Lambda$ soient de dimension $\leqslant d$. On pose $C_+(S \to \Lambda) = \bigoplus_d C_+^d(S \to \Lambda)$ avec $C_+^d(S \to \Lambda) := \mathcal{C}_+^{\leqslant d}(S \to \Lambda)/\mathcal{C}_+^{\leqslant d-1}(S \to \Lambda)$. C'est un semi-groupe abélien gradué (et aussi un $\mathcal{C}_+(S)$-semi-module). Si φ appartient à $\mathcal{C}_+^{\leqslant d}(S \to \Lambda)$, mais pas à $\mathcal{C}_+^{\leqslant d-1}(S \to \Lambda)$, on note $[\varphi]$ son image dans $C_+^d(S \to \Lambda)$. On a l'analogue suivant du Théorème 3.1.

Théorème 4.1. *Soit k un corps de caractéristique zéro, soit Λ dans* Def_k *et soit S dans* Def_Λ. *Il existe un unique foncteur $Z \mapsto \mathrm{I}_S C_+(Z \to \Lambda)$ de* Def_S *dans la catégorie des semi-groupes abéliens, associant à tout morphisme $f : Z \to Y$ dans* Def_S *un morphisme $f_{!\Lambda} : \mathrm{I}_S C_+(Z \to \Lambda) \to \mathrm{I}_S C_+(Y \to \Lambda)$ vérifiant les analogues de* (A0)–(A8) *obtenus en remplaçant $C_+(\_)$ par $C_+(\_ \to \Lambda)$ et* ord jac *par son analogue relatif* $\mathrm{ord\,jac}_\Lambda$.

Pour $f : Z \to \Lambda$ dans Def_Λ, on dispose ainsi d'un morphisme $\mu_\Lambda := f_{!\Lambda} : \mathrm{I}_\Lambda C_+(Z \to \Lambda) \to \mathcal{C}_+(\Lambda) = \mathrm{I}_\Lambda C_+(\Lambda \to \Lambda)$ qui correspond à l'intégration dans les fibres de Λ d'après l'énoncé suivant.

Proposition 4.2. *Soit φ une Fonction dans $C_+(Z \to \Lambda)$. Elle appartient à $\mathrm{I}_\Lambda C_+(Z \to \Lambda)$ si et seulement si pour tout point λ de Λ, la restriction φ_λ de φ à la fibre de Z en λ est intégrable. L'intégrale motivique de φ_λ est alors égale à $i_\lambda^*(\mu_\Lambda(\varphi))$, pour tout λ.*

Bien entendu on peut également définir l'analogue relatif $C(S \to \Lambda)$ de $C(S)$, et étendre la notion d'intégrabilité et la construction de $f_{!\Lambda}$ à ce cadre.

Les détails des constructions et des preuves seront donnés dans [2].

Remerciements

Pendant la réalisation de ce projet, le premier auteur était chercheur postdoctoral du Fonds de Recherche Scientifique – Flandres (Belgique) et il a bénéficié du soutien partiel du projet européen EAGER.

Références

[1] R. Cluckers, F. Loeser, Fonctions constructibles et intégration motivique II, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).
[2] R. Cluckers, F. Loeser, Constructible motivic functions and motivic integration, en préparation.
[3] J. Denef, F. Loeser, Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration, Invent. Math. 135 (1999) 201–232.
[4] J. Denef, F. Loeser, Definable sets, motives and p-adic integrals, J. Amer. Math. Soc. 14 (2001) 429–469.
[5] L. van den Dries, Dimension of definable sets, algebraic boundedness and Henselian fields, Ann. Pure Appl. Logic 45 (1989) 189–209.
[6] M. Kontsevich, Exposé à Orsay, 7 décembre 1995.
[7] J. Pas, Uniform p-adic cell decomposition and local zeta functions, J. Reine Angew. Math. 399 (1989) 137–172.