Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 199–201
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Géométrie différentielle/Systèmes dynamiques

Comparaison des volumes des variétés riemanniennes

Hamid-Reza Fanaï

Department of Mathematical Sciences, Sharif University of Technology, P.O.Box 11365-9415, Tehran, Iran

Reçu le 26 avril 2004 ; accepté le 20 mai 2004

Disponible sur Internet le 17 juin 2004

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

À l'aide du résultat de rigidité de Besson, Courtois et Gallot, et aussi la notion d'intersection des métriques, nous comparons les volumes des variétés riemanniennes à partir des longueurs de leurs géodésiques périodiques. ***Pour citer cet article : H.-R. Fanaï, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

Comparison of volumes of Riemannian manifolds. Using the rigidity result of Besson, Courtois and Gallot, and also the notion of intersection of metrics, we compare volumes of Riemannian manifolds by means of lengths of their periodic geodesics. ***To cite this article: H.-R. Fanaï, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***
© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Soit (M, g) une variété riemannienne complète (que l'on suppose toujours lisse, connexe et sans bord). Il est bien connu qu'on peut représenter chaque classe de conjugaison $\langle\gamma\rangle$ du groupe fondamental de M par une classe d'homotopie libre de courbes dans M. On note $\ell_g(\gamma)$ la longueur d'une courbe de longueur minimale dans cette classe. On sait qu'une telle courbe est toujours une géodésique périodique (qui peut être réduite à un point) et lorsque la métrique g est sans points conjugués, alors toutes les géodésiques périodiques dans cette classe d'homotopie libre ont même longueur $\ell_g(\gamma)$. De plus si g est de courbure négative, on a l'unicité d'une telle géodésique périodique dans chaque classe d'homotopie libre de courbes.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des classes de conjugaison du groupe fondamental de M. Alors on définit le spectre marqué des longueurs de la métrique g comme l'élément $(\ell_g(\gamma))_{\gamma\in\mathcal{C}}$ du produit direct $\mathbb{R}^{\mathcal{C}}$ indexé par l'ensemble $\mathcal{C}$. Il est naturel de demander si une inégalité entre les spectres marqués des longueurs de deux métriques implique une

Adresse e-mail : fanai@sharif.ac.ir (H.-R. Fanaï).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.05.019

inégalité entre les volumes des variétés riemanniennes associées. Cette question a déjà été posée dans [2], et a été étudiée (notamment en dimension 2) dans [3]. Dans cette Note, nous donnons une nouvelle application du résultat de rigidité de Besson, Courtois et Gallot [1] et montrons le

Théorème 1.1. *Soit* (M, g_0) *une variété riemannienne compacte localement symétrique de courbure négative et* $n = \dim M \geqslant 3$. *Soit* g_1 *une autre métrique riemannienne de courbure négative sur* M*, telle que pour toute classe de conjugaison* $\langle\gamma\rangle$ *du groupe fondamental de* M*, on a* $\ell_{g_1}(\gamma) \geqslant \ell_{g_0}(\gamma)$. *Alors* $\mathrm{vol}(M, g_1) \geqslant \mathrm{vol}(M, g_0)$. *L'égalité est atteinte si et seulement si* g_1 *est isométrique à* g_0.

Le cas des métriques conformément équivalentes de courbure négative est déjà résolu dans [3]. En utilisant la notion d'intersection des métriques que nous avons étudiée dans [4] avec la même démarche que [3], nous présentons une version plus générale.

Théorème 1.2. *Soit* g_0 *une métrique riemannienne complète sans points conjugués de volume fini sur une variété* M. *Supposons que l'enveloppe convexe des mesures de Dirac, supportées sur des géodésiques périodiques est dense dans l'espace de toutes les mesures finies invariantes par le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent* $S_{g_0}M$. *Soit* g_1 *une autre métrique riemannienne sans points conjugués conformément équivalente à* g_0 *sur* M. *Si pour toute classe de conjugaison* $\langle\gamma\rangle$ *du groupe fondamental de* M*, on a* $\ell_{g_1}(\gamma) \geqslant \ell_{g_0}(\gamma)$*, alors* $\mathrm{vol}(M, g_1) \geqslant \mathrm{vol}(M, g_0)$. *L'égalité est atteinte si et seulement si* $g_1 = g_0$.

2. Démonstrations

Tout d'abord, on montre le Théroème 1.1. Dans [1], les auteurs prouvent un théorème de rigidité qui dans le cadre présent donne l'inégalité suivante :

$$h^n(g_1)\,\mathrm{vol}(M, g_1) \geqslant h^n(g_0)\,\mathrm{vol}(M, g_0)$$

avec égalité si et seulement si g_1 est isométrique à g_0. Rappelons que pour toute métrique riemannienne g sur une variété compacte M, $h(g)$ désigne l'entropie volumique de g associée à $\widetilde{M}$ le revêtement universel de M muni de la métrique relevée $\tilde{g}$. Il est bien connu que si g est de courbure négative, alors $h(g) = h_{\mathrm{top}}(g)$ où $h_{\mathrm{top}}(g)$ est l'entropie topologique du flot géodésique. On note $N_g(T)$ le nombre des géodésiques périodiques de période $\leqslant T$. On peut maintenant conclure. Par hypothèse sur les spectres marqués des longueurs de g_0 et g_1, il est clair que pour tout $T > 0$, on a nécessairement $N_{g_0}(T) \geqslant N_{g_1}(T)$. Ceci avec un résultat connu [7] implique donc $h(g_0) \geqslant h(g_1)$. En combinant avec l'inégalité de Besson, Courtois et Gallot, on a $\mathrm{vol}(M, g_1) \geqslant \mathrm{vol}(M, g_0)$ ce qui donne l'inégalité recherchée. En cas d'égalité, on serait dans le cas d'égalité de [1], ce qui montre que g_1 est isométrique à g_0. Ainsi on termine la preuve du Théorème 1.1.

Maintenant, on montre le Théroème 1.2. Pour le faire, rappelons la définition de l'intersection [5] : pour toute mesure de probabilité μ sur $S_{g_0}M$ invariante par le flot géodésique de (M, g_0), l'intersection de g_1 par rapport à g_0 et μ est égale à :

$$I_\mu(g_0, g_1) = \inf_{t>0} \frac{1}{t} \int\limits_{S_{g_0}M} a(v, t)\,\mathrm{d}\mu(v)$$

où $a(v, t) = d_{\tilde{g}_1}(\widetilde{C}_v(0), \widetilde{C}_v(t))$ et pour tout vecteur $v \in S_{g_0}M$, $\widetilde{C}_v(t)$ désigne le relevé de la géodésique paramétrée par la longueur d'arc, définie par v, dans le revêtement universel de M.

Soient γ_0 et γ_1 deux géodésiques périodiques de g_0 et g_1 respectivement, donnant les longueurs minimales dans une même classe d'homotopie libre associée à $\langle\gamma\rangle$. Soit δ_0 la mesure de Dirac normalisée, associée à γ_0 sur $S_{g_0}M$ invariante par le flot géodésique de (M, g_0). Soient ℓ_0 la g_0-longueur de γ_0 et ℓ_1 la g_1-longueur de γ_1. Par hypothèse $\ell_1 \geqslant \ell_0$. Exactement comme dans [4], nous calculons $I_{\delta_0}(g_0, g_1)$, l'intersection de g_1 par rapport à g_0 et δ_0 et obtenons :

$$I_{\delta_0}(g_0, g_1) = \frac{\ell_1}{\ell_0} \geqslant 1.$$

Par conséquent, l'intersection de g_1 par rapport à g_0 et toute mesure de Dirac normalisée est $\geqslant 1$. Soit $\mu_L(g_0)$ la mesure de Liouville normalisée sur $S_{g_0}M$. L'hypothèse sur la densité des mesures de Dirac, comme dans [4] nous donne :

$$I_{\mu_L(g_0)}(g_0, g_1) \geqslant 1.$$

D'après [5], on sait que pour deux métriques g_0 et g_1 sans points conjugués et conformément équivalentes, on a toujours :

$$I_{\mu_L(g_0)}(g_0, g_1) \leqslant \left(\frac{\mathrm{vol}(M, g_1)}{\mathrm{vol}(M, g_0)}\right)^{1/n}$$

où $n = \dim M$, avec égalité si et seulement si $g_1 = c\, g_0$ pour une constante $c > 0$. Ceci donne l'inégalité recherchée sur les volumes :

$$\mathrm{vol}(M, g_0) \leqslant \mathrm{vol}(M, g_1).$$

Dans le cas d'égalité, on a nécessairement $c = 1$ et donc $g_0 = g_1$.

Remarque 1. Il est à noter que notre hypothèse est vérifiée dans le cas particulier des flots d'Anosov (en courbure négative par exemple). Il est difficile de prouver une sorte de densité des mesures de Dirac dans un autre cadre que le cas habituel mentionné. Une question très intéressante est de savoir si cette hypothèse est satisfaite pour des variétés de rang 1, i.e. la courbure est nonpositive mais il y a une géodésique hyperbolique, c'est à dire une géodésique qui n'admet pas de champ de Jacobi parallèle perpendiculaire. Dans ce cadre, il est connu que [6] la mesure d'entropie maximale est une limite des mesures de Dirac.

Remerciement

L'auteur remercie le Conseil de Recherches de l'Université Technologique Sharif pour son soutien.

Références

[1] G. Besson, G. Courtois, S. Gallot, Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative, GAFA 5 (1995) 731–799.
[2] C. Croke, Rigidity theorems in riemannian geometry, preprint.
[3] C. Croke, N. Dairbekov, Lengths and volumes in riemannian manifolds, preprint.
[4] H.-R. Fanaï, Spectre marqué des longueurs et métriques conformément équivalentes, Bull. Belg. Math. Soc. 5 (1998) 525–528.
[5] G. Knieper, Volume growth, entropy and the geodesic stretch, Math. Res. Lett. 2 (1995) 39–58.
[6] G. Knieper, The uniquenesse of the measure of maximal entropy for geodesic flows on rank 1 manifolds, Ann. Math. 148 (1998) 291–314.
[7] G.A. Margulis, Applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature, Funct. Anal. Appl. 3 (1969) 335–336.